# Equazioni Differenziali        $3^o$ test — 19.2.2010

**1)** Sia $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R. \end{cases}$$

**a)** Verificare che se esiste una soluzione $u \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$ allora verifica $u(x) = u(y)$ se $|x| = |y|$.
**b)** Calcolare la soluzione del problema.

**2)** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f(x) \geq 1$ per ogni $x$. Provare che per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$v(x) \geq \frac{1}{2n} \mathrm{dist}(x; \partial\Omega)^2.$$