# **Equazioni Differenziali** $\quad 4^o$ **test — 2.3.2010**

**1)** **(a)** Provare che se $u$ è una funzione subarmonica in $\Omega$ allora per ogni $B(x,r) \subseteq \Omega$

**(i)** $\quad u(x) \le \fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma \qquad$ (proprietà della sottomedia sferica),

**(ii)** $\quad u(x) \le \fint_{B(x,r)} u(y) \, dy \qquad$ (proprietà di sottomedia sulle palle).

**(b)** Viceversa, provare che ogni $u \in C(\Omega)$ con la proprietà di sottomedia sulle palle (ii) è subarmonica.

**2)** Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $U_T = U \times ]0, T[$, $\Gamma_T$ la sua frontiera parabolica, $c \in C(\overline{U_T})$ e $u \in C^2(\overline{U_T} \setminus \Gamma_T) \cap C(\overline{U_T})$ soddisfi

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c(x,t)u \le 0 & \text{in } U_T \\ u \le 0 & \text{su } \Gamma_T, \end{cases}$$

Provare che $u \le 0$ in $U_T$.
[Suggerimento: considerare $v(x,t) = e^{\lambda t} u(x,t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ opportuno].