Lezione 10.4.14

giovedì 10 aprile 2014 08.23

OSS. sul problema di Cauchy.

1. La formula di Hopf-Lax è limitata in $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[$ se, per es. $\min H^*(q) = 0$.

Dim $u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ t H^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$

$\geq \inf g$ perché $H^* \geq 0$

$\frac{x-y^*}{t} \in \operatorname{argmin} H^* \Rightarrow H^*\left(\frac{x-y^*}{t}\right) = 0$

$u(x,t) \leq g(y^*) \leq \sup g$.

$\Rightarrow \inf g \leq u \leq \sup g$. $\boxtimes$

2. Il principio di confronto ha molte varianti. Per es.:

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dip. anche da x!)

$$(H) \begin{cases} |H(p,x) - H(p,y)| \leq C|x-y|(1+|p|) \\ |H(p,x) - H(q,x)| \leq C|p-q| \end{cases}$$

Con (H) vale il Principio del Confronto

Con (H) vale il principio del confronto per u, v solo limitate e cont. (non occorre Lip.)

__Dim.__ v. [Evans] o esercizio!

INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO.

Sistema di controllo

$$(S) \begin{cases} \dot{y}(s) = f(y(s), \alpha(s)) & , s > t \\ y(t) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$y(s)$ = stato del sistema al tempo s

__DATI__ : $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ cont.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto, $T > 0$ tempo finale

Supp.
$$\begin{cases} |f(x, a)| \leq M & \forall x \in \mathbb{R}^n, a \in A \\ |f(x, a) - f(z, a)| \leq L|x - z| & \forall x, z \in \mathbb{R}^n, \forall a \in A. \end{cases}$$

Dalla teoria delle EDO, $\forall \alpha : [t, T] \to A$ cont. $\exists !$ sol. di (S), la denoto con $y(s) = y_x(s) = y_x(s; \alpha, t)$

con $y(s) = y_x(s) = y_x(s;\alpha,t)$

Inoltre:

(E1) $|y_x(s;\alpha,t) - x| \le M(s-t)$

(E2) $|y_x(s;\alpha,t) - y_z(s;\alpha,t)| \le e^{L(s-t)} |x-z|$

$\forall \alpha(\cdot)$, $\forall x, z$, $t > s$.

Richiamo (S) con $\alpha \in C$ è EQUIVALENTE a

$$y(s) = x + \int_t^s f(y(\tau), \alpha(\tau))\, d\tau .$$

In teoria del controllo occorre la classe di controlli ammissibile

$$\mathcal{A} := \{ \alpha : [0,T] \to A \text{ mis.li} \}$$

Def. Per $\alpha \in \mathcal{A}$ una sol. di (S) è $y : [t,T] \to \mathbb{R}^n$ ass. cont. t.c.

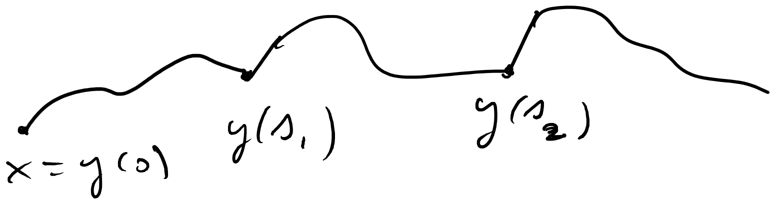
$$y(s) = x + \int_s^t f(y(\tau), \alpha(\tau))\, d\tau . \quad \forall s \in [t,T].$$

Thm. $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\exists$ unica sol. $y(\cdot) = y_x(\cdot;\alpha,t)$ di (S) e soddisfa (E1) (E2).

Dim. Simile a quella nel caso

Dim. Simile a quella del caso continuo, p. es. [BCD]. $\boxtimes$

OSS. $y(\cdot)$ è diff.le $\forall s$: α cont. in s. Se α è cont. a tratti



$y(\cdot) \in C^1$ a tratti.

Esercizio Dim del Teor 7! per $\alpha \in C$ a tratti.

FUNZIONALE COSTO a ORIZZONTE FINITO

Def. $\ell : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$J(x,t,\alpha) = \underbrace{\int_t^T \ell(y(s), \alpha(s))\, ds}_{\text{costo corrente}} + \underbrace{g(y(T))}_{\text{costo terminale}}$$

$y(s) = y_x(s; \alpha, t)$

Obiettivo del controllore: MIN J.

Supp.
$$\begin{cases} |\ell(z,a)|, |g(z)| \le C & \forall x,z \in \mathbb{R}^n \\ |g(x) - g(z)| \le C|x-z| & \\ |\ell(x,a) - \ell(z,a)| \le C|x-z| & \forall a \in A \end{cases}$$

Se $\ell, g \not\equiv 0$ il probl. è di BOLZA

Se $\ell, g \not\equiv 0$ il probl. è di BOLZA

se $\ell \equiv 0$ probl. di MAYER

se $g \equiv 0$ " " LAGRANGE.

Collegamento con C.d.V.: $\dot{y} = \alpha$ $A \equiv \mathbb{R}^n$

$\ell(x,a) = L(x,a)$ $g \equiv 0$ $J = \int_t^T L(y(s), \dot{y}(s))\,ds$

N.B. Il probl. di Bolza si riconduce a un probl. di Mayer aggiungendo

y_{n+1} : $\begin{cases} \dot{y}_{n+1} = \ell(y, \alpha) \\ y_{n+1}(t) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow y_{n+1} = \int_t^s \ell(y(\tau), \alpha(\tau))\,d\tau$

$$\min \int_t^T \ell + g(y(T)) = \min \left(y_{n+1}(T) + g(y(T)) \right)$$

Faremo le dim. per il probl. di Mayer.

—— o ——

PROBLEMI: Trovare controlli ottimi e costo minimo.

METODI
- $\exists$ di controlli ottimi
- cond. NEC. di ottimalità

Faremo il metodo della PROGRAMMAZIONE DINAMICA:

... ... strategia

DINAMICA:

Condiz. SUFF di min. + strategie per costruire sol. ottime.

Punto di partenza è la def. della FUNZIONE VALORE del probl.

$$V(x,t) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x,t,\alpha)$$

= costo minimo come funzione del p. iniz. x e t. iniz. t.

Scopo: • mostrare che V risolve una PDE

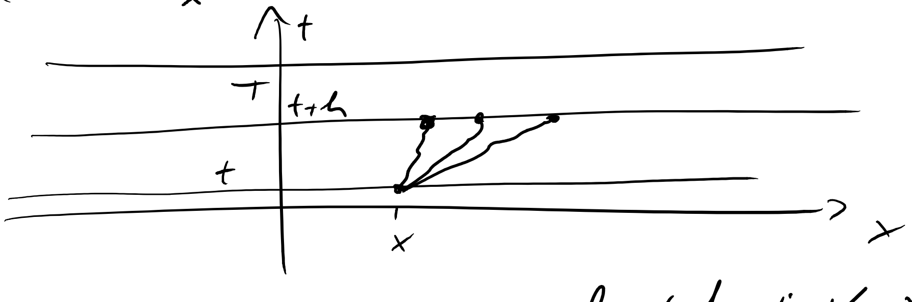
• se si risolve tale PDE si possono costruire controlli ottimi (da V).

<u>Teor.</u> (Principio della Prog. Din.).

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le t < T$, $h > 0$: $t+h < T$

$$V(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+h} \ell(y(s), \alpha(s))\, ds + V(y(t+h), t+h) \right\} \qquad \text{(DPP)}$$

$(y(s) = y_x(s; \alpha, t))$



Se $t+h = T$ ritrovo la def. di V xché

Se $t+h=T$ ritrovo la cond. finale

$V(z,T)=g(z)$

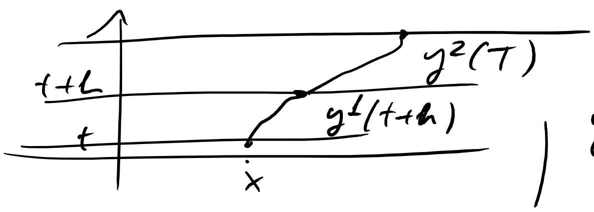
<u>Dim</u> del <u>DPP</u> per P. Mayer, $\ell\equiv 0$

"$\leq$" Fisso $\alpha_1\in\mathcal{A}$

risolvo $\begin{cases} y'=f(y,\alpha_1) & t<s<t+h \\ y(t)=x \end{cases}$ e lo chiamo $y^1(s)$

Fisso $\varepsilon>0$ e scelgo $\alpha_2\in\mathcal{A}$:

$$g(y^2(T))\overset{(*)}{\leq} V(y^1(t+h),t+h)+\varepsilon$$



$y^2(s)$ risolve

$$\begin{cases} y'=f(y,\alpha^2) & t+h<s<T \\ y(t+h)=y^1(t+h) \end{cases}$$

<u>Def.</u> $\alpha^3(s)=\begin{cases} \alpha^1(s) & t\leq s\leq t+h \\ \alpha^2(s) & t+h<s\leq T \end{cases}$

$y^3(\cdot)$ risolve $\begin{cases} y'=f(y,\alpha^3) & t<s<T \\ y(t)=x \end{cases}$

x UNICITA' TRAIETT.

$\Rightarrow$ $y^3(s)=\begin{cases} y^1(s) & t\leq s\leq t+h \\ y^2(s) & t+h\leq s\leq T \end{cases}$

$\Rightarrow\ y^3(T)=y^2(T)$

$$V(x,t)\leq J(x,t,\alpha^3(\cdot))=g(y^3(T))=g(y^2(T))$$

$(*)$

$$\overset{(*)}{\leq} \varepsilon + V(y^1(t+h), t+h)) \quad \forall \alpha_1 \in \mathcal{A}$$

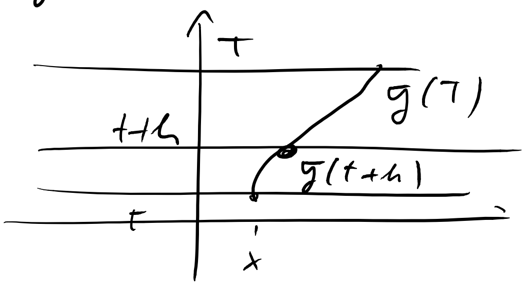
$$\Rightarrow v(x,t) \leq \varepsilon + \underbrace{\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} v(y(t+h), t+h)}$$

$$\varepsilon \searrow 0 \quad \Rightarrow \quad v(x,t) \leq \qquad \blacksquare \ \tfrac{1}{2}$$

"$\geq$" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\alpha} \in \mathcal{A}$.

$$V(x,t) + \varepsilon \geq J(x,t,\bar{\alpha}) = g(\bar{y}(T))$$

$\bar{y}(\cdot)$ traiett. di $\bar{\alpha}$. $\begin{cases} y' = f(y, \bar{\alpha}) \\ y(t) = x \end{cases}$



$$V(\bar{y}(t+h), t+h) \leq g(\bar{y}(T))$$

$$V(x,t) + \varepsilon \geq V(\bar{y}(t+h), t+h)$$

$$\geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} V(y(t+h), t+h)$$

$$\varepsilon \searrow 0 \quad \Rightarrow \quad v(x,t) \geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} V(y(t+h), t+h)$$

$\blacksquare$

<u>Prop.</u> Sotto le ipotesi fatte su f, ℓ, g e A $\Rightarrow$ $v : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ è limitata e Lip.

<u>Dim.</u> Per semplicità: solo $\ell \equiv 0$.

Dim. per semplicità ...

P.1 $|v(x,t)| \le T \sup|f| + \sup|g|$
$\forall x, t.$

P.2 Lip. in x. Ref.: Cap. 10 [Evans]

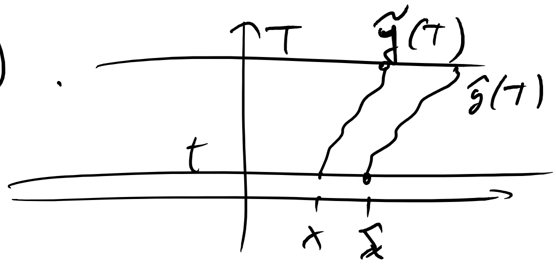
— Lezione 11.4.14 —

Teor. $\exists C: |v(x,t) - v(\hat{x},t)| \le C|x - \hat{x}|$
$\forall\, 0 \le t \le T \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$

Comincio con $v(x,t) - v(\hat{x},t) \le \dots$

Fisso $\varepsilon > 0$ e $\hat{\alpha}$: $v(\hat{x},t) + \varepsilon \ge g(\hat{y}(T))$

$\hat{y}(s) = y_{\hat{x}}(s; t, \hat{\alpha})$.



$\tilde{y}(s) := y_x(s; t, \hat{\alpha})$

$$(E2) \Rightarrow |\hat{y}(T) - \tilde{y}(T)| \le e^{L(T-t)} |x - \hat{x}|$$

$$\Rightarrow v(x,t) - v(\hat{x},t) \le g(\tilde{y}(T)) - g(\hat{y}(T)) + \varepsilon$$
$$\le L_g |\tilde{y}(T) - \hat{y}(T)| + \varepsilon$$

$\varepsilon \searrow 0 \quad v(x,t) - v(\hat{x},t) \le C|x - \hat{x}|$

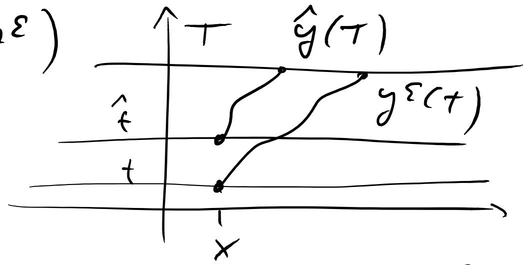
Ripeto l'argomento per $v(\hat{x},t) - v(x,t) \le \dots$
e trovo $|v(x,t) - v(\hat{x},t)| \le C|x - \hat{x}|$.

$\blacksquare$ P.2.

P.3 $\quad V(x,\hat{t}) - V(x,t) \le \dots \qquad 0 \le t < \hat{t} \le T$

Fisso $\varepsilon > 0$ $\exists\, \alpha^\varepsilon \in \mathcal{A}$: $V(x,t) + \varepsilon \ge g(y^\varepsilon(T))$

$y^\varepsilon(s) := y_x(s; t, \alpha^\varepsilon)$



$\hat{\alpha}(s) := \alpha^\varepsilon(s + t - \hat{t})$

$\hat{t} \le s \le T$

$\hat{y}(\cdot)$ è sol di $\begin{cases} \dot{y} = f(y, \hat{\alpha}) & \hat{t} < s \\ y(\hat{t}) = x \end{cases}$

OSS: $\hat{y}(s) = y^\varepsilon(s + t - \hat{t})$ xchè

$\hat{y}(\hat{t}) = x = y^\varepsilon(t)$

$\dot{y}^\varepsilon(s + t - \hat{t}) = f(y^\varepsilon(\ ), \underbrace{\alpha^\varepsilon(s + t - \hat{t})}_{\hat{\alpha}(s)})$

Unicità x ODE $\Rightarrow$ $\hat{y}(s) = y^\varepsilon(s + t - \hat{t})$

$V(x,\hat{t}) - V(x,t) \le g(\hat{y}(T)) - g(y^\varepsilon(T)) + \varepsilon$

$= g(y^\varepsilon(T + t - \hat{t})) - g(y^\varepsilon(T)) + \varepsilon$

$\le L_g \, | y^\varepsilon(T + t - \hat{t}) - y^\varepsilon(T) | + \varepsilon$

$\le L_g M |t - \hat{t}| + \varepsilon \qquad \varepsilon \to 0$

$\Rightarrow V(x,\hat{t}) - V(x,t) \le C |t - \hat{t}|$ se $t < \hat{t}$

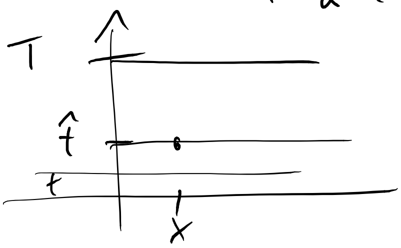
$\blacksquare$ P.3

P.4 $\quad V(x,t) - V(x,\hat{t}) \le \dots \qquad t < \hat{t}$

$\varepsilon > 0 \quad \exists\, \hat{\alpha}$: $V(x,\hat{t}) + \varepsilon \ge g(\hat{y}(T))$

$\dots \quad \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t) \qquad t \le s \le T + t - \hat{t}$

$$\bar\alpha(s) := \begin{cases} \hat\alpha(s+\hat t - t) & t \le s \le T+t-\hat t \\ \hat\alpha(T) & T+t-\hat t < s \le T \end{cases}$$



$$v(x,t) \le g(\bar y(T))$$

Dim come prima si mostra che

$$\bar y(s) = \hat y(s+\hat t - t) \quad \ldots\ldots$$

Dettagli della conclusione ... Es. Pc opp. [EV].

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$H(p,x) := \max_{a\in A} \{-f(x,a)\cdot p - \ell(x,a)\}$$

$$= -\min_{a\in A} \{f(x,a)\cdot p + \ell(x,a)\}$$

<u>Teor</u> Sotto le ipotesi su f, ℓ, g, A, la f. valore v del problema di controllo ottimo è è UNICA SOL. VISCOSITA' del problema ai valori terminali per l'eq. di H-J-B

$$\begin{cases} -u_t + H(D_x u, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u(x,T) = g(x). \end{cases}$$

<u>OSS.</u> $w(x,t) = u(x, T-t) \qquad w_t = -u_t$

Oss. $w(x,T) = u(x, T-t)$ $\quad w_t = \;\; _t$

e $w(x,0) = u(x,T) = g(x)$, $\Rightarrow w$

soddisfa il probl. ai valori iniziali

$$\begin{cases} w_t + H(D_x w, x) = 0 & \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ w(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Verificare che questo vale anche in senso viscosità! ∎

Dim. P.1 Per def. $V(x,T) = g(x)$

$\boxed{\text{SKO } \ell \equiv 0}$

e dalle Prop. so che V è limitata.

P.2 "V sottosol.". $\phi \in C^1 : (V-\phi)$

ha max in (x,t), $0<t<T$.

Tesi: $-\phi_t + H(D_x\phi, x)\big|_{(x,t)} \leq 0$ (T1)

Fisso $\bar{a} \in A$, $\bar{\alpha}(s) \equiv \bar{a}$ $\forall s$

$\bar{y}(\cdot) = y_x(\cdot\,; t, \bar{\alpha})$. N.B. $\dot{\bar{y}}(s) \;\exists\; \forall s$.

Uso "$\leq$" in DPP:

$$V(x,t) \leq V(\bar{y}(t+h), t+h) \quad \forall\, 0 \leq h < T-t$$

$$(V-\phi)(x,t) \geq (V-\phi)(\bar{y}(t+h), t+h)$$

$$V(x,t) - V(\bar{y}(t+h), t+h) \geq \phi(x,t) - \phi(\bar{y}(t+h), t+h)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(x,t) - \phi(\bar{y}(t+h), t+h)}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi(x,t) - \phi(y(T+h), T+h))}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad -\phi_t(x,t) - D_x\phi(x,t) \cdot \underset{f(x,\bar{a})}{\overset{\bullet}{y}(t)} \leq 0 \qquad \forall \bar{a}$$

$$\Rightarrow \quad -\phi_t + \underbrace{\max_{a \in A}\left\{-D_x\phi \cdot f(x,a)\right\}}_{H(D_x\phi,\, x)}\Big|_{(x,t)} \leq 0$$

che è (T1). $\blacksquare$ P.2

<u>P.3</u> v "SUPERSOL." $\phi \in C^1$, $V - \phi$ minim (x,t)

$0 < t < T$ (T2) $\quad -\phi_t + H(D_x\phi, x)\Big|_{(x,t)} \geq 0$

Uso "$\geq$" in DPP. Fisso $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{\alpha} \in \mathcal{A}$:

$$V(x,t) \geq V(\bar{y}(t+h), t+h) - \varepsilon h \qquad \bar{y}(s) = y_x(s;t,\bar{\alpha})$$

$$(V - \phi)(x,t) \leq (V - \phi)(\bar{y}(t+h), t+h)$$

$$V(x,t) - V(\bar{y}(t+h), t+h)) \leq \phi(x,t) - \phi(\bar{y}(t+h), t+h)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x,t) - \phi(\bar{y}(t+h), t+h) \geq -\varepsilon h$$

Voglio dividere per $h > 0$ e fare $h \to 0$

MA $\overset{\circ}{y}(t)$ può non esistere!

Tuttavia $\overset{\circ}{\bar{y}}(s) \ \exists = f(\bar{y}(s), \bar{\alpha}(s))$ q.o. s.

$$\phi(x,t) - \phi(\bar{y}(t+h), t+h) = \int^{t+h} -\frac{d}{ds}\phi(\bar{y}(s), s)\, ds$$

$$\phi(x,t)-\phi(\bar y(t+h),t+h)=\int_t^{t+h}-\frac{d}{ds}\phi(\bar y(s),s)\,ds$$

$$=-\int_t^{t+h}[\underbrace{\phi_t(\bar y(s),s)}_{=\phi_t(x,t)+o(1)}+\underbrace{D_x\phi(\bar y(s),s)}_{=D_x\phi(x,t)+o(1)}\cdot \underbrace{\dot{\bar y}(s)}_{=f(\bar y(s),\bar\alpha(s))}]\,ds$$

$$\boxed{\bar y(s)-x=O(h)}$$

e $f(\bar y(s),\bar\alpha(s))=f(x,\bar\alpha(s))+o(1)$

$$=o(h)-\phi_t(x,t)h+\int_t^{t+h}\underbrace{-D_x\phi(x,t)\cdot f(x,\bar\alpha(s))}_{\le \max_{a\in A}\left(-D_x\phi(x,t)\cdot f(x,a)\right)=H(D_x\phi(x,t),x)}\,ds$$

$$\Rightarrow -\varepsilon\frac{h}{h}\le\frac{o(h)}{h}-\phi_t(x,t)\frac{h}{h}+\frac{h}{h}H(D_x\phi(x,t),x)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon\le \underbrace{-\phi_t+H(D_x\phi,x)\Big|_{(x,t)}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\searrow 0 \qquad 0\le$$ che è (12)

$\blacksquare$ P.3

<u>P.4</u> Dall'oss. dopo l'enunciato del Teor. per l'unicità basta verificare le condiz. di struttura su H per il Principio del confronto. Uso

(1) $|H(x,p)-H(y,p)|\le C|x-y|(1+|p|)$

$$\begin{cases} (1) & |H(x,p)-H(y,p)| \le C|x-y|(1+|p|) \\ (2) & |H(x,p)-H(y,q)| \le C|p-q|. \end{cases}$$

Le verifica per $H(p,x) = \max_{a\in A}\{-f(x,a)\cdot p\}$.

$$H(x,p) - H(y,p) \le -f(x,\bar a)\cdot p + f(y,\bar a)\cdot p$$

$$\left(\bar a : H(x,p) = -f(x,\bar a)\cdot p\right)$$

$\le L_f |x-y||p|$ .... $H(y,p) - H(x,p) \le \dots$ scambio i ruoli di x e y.

$\Rightarrow (1)$

Per (2) $\quad H(x,p) - H(x,q) = f(x,\bar a)\cdot p - f(x,\bar a)\cdot q$

$\le |f(x,\bar a)||p-q| \le M|p-q|$

Scambio x e y ... $\Rightarrow$ (2) $\blacksquare$

Teoremi di verifica e "SINTESI del FEEDBACK ottimale".

In questo seguito NON occorre avere costi limitati, din limitata, ... A compatto, basta che sia def. e cont.

$$H(p,x) = \max_{a\in A}\{-f(x,a)\cdot p - \ell(x,a)\}$$

(Per semplicità $\ell \equiv 0$)

T. verifica. Supp. $\exists\, w \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T]) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$

che risolve

$$\begin{cases} -w_t + H(D_x w, x) = 0 & 0 < t < T \\ w(x,T) = g(x) \end{cases}$$

e quindi $w_t + \min_{a \in A} f(x,a) \cdot D_x w = 0$

Prendo $a^*(x,t) \in \operatorname{argmin}_a f(x,a) \cdot D_x w(x,t)$

$^* : \mathbb{R}^n \times]0,T[\to A$, e considero

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f\left(y(s), {}^*(y(s), s)\right) & 0 < s < T \\ y(0) = x \end{cases}$$

e suppongo che abbia sol. $y^*(\cdot)$ e

chiamo $\alpha^*(s) := a^*(y^*(s), s)$

(e supp. $\alpha^* \in \mathcal{A}$.) $\Longrightarrow$

α^* è controllo ottimo per $y(0) = x$, cioè

$$J(x, 0, \alpha^*) \le J(x, 0, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Dim. $y(\cdot) = y_x(\cdot\,; 0, \alpha)$

$$\frac{d}{ds} w(y(s), s) = w_t + D_x w \cdot f(y(s), \alpha(s))$$

$$\ge w_t + \underbrace{\min_{a \in A} D_x w \cdot f(y(s), a)}_{H(D_x w,\, x)}$$

$= \iff \alpha(s) = \alpha^*(s)$

$$= 0$$

$$\Rightarrow W(x,0) \leq W(y(T),T) = g(y(T))$$

$$\parallel$$

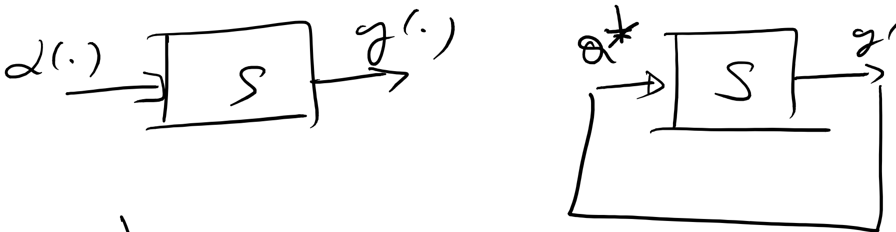
$$W(y^*(T),T) = g(y^*(T))$$

$$\Rightarrow g(y^*(T)) \leq g(y(T))$$

$$\Rightarrow J(x;0,\alpha^*) \leq J(x;0,\alpha) \ \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Commenti: • Si chiama teor. di verifica perché, se so W, posso verificare se $\bar{\alpha}(\cdot)$ è ottimo controllando che

• I controlli in $\mathcal{A}$ si chiamano anche a CICLO APERTO o OPEN LOOP



α^* si dice CLOSED LOOP o FEEDBACK

N.B. I controlli feedback sono preferibili perché ROBUSTI.

DIFFICOLTA' ad applicare questo metodo.

• In gen. non $\exists$ sol. C^1 di H-J-B.

▶ Anche se $\exists\, w \in C^1$ risolve (CP)

$\arg\min D_x w \cdot f(x,a)$ non è continua

$\Rightarrow$ traiettorie $\dot y = f(y, a^*(y,s))$

può non esistere.

▶ Il metodo descritto con la sintesi del feedback funziona per problemi LINEARI – QUADRATICI:

$\dot y = Ay + B\alpha$ $\qquad$ A, B matrici $\quad \alpha(s) \in \mathbb{R}^m$

$$J(x,t,\alpha) = \int_t^T \Big[\underbrace{y(s)^T M y(s)}_{M \in Sym(N)} + \underbrace{\alpha(s)^T R\, \alpha(s)}_{R \in Sym(m)} \Big] ds$$

$$+\, y(T)^T Q\, y(T) \qquad Q \in Sym(N)$$

Per questi problemi cerco sol. di HJB della forma $W(x,t) = x^T K(t) x$

$K(t) \in Sym(N) \qquad K(T) = Q$

Si verifica una tale sol. $\exists \iff$ è risolubile una EDO per $K(t)$:

$$\dot K = -KA - A^T K - M + K B R^{-1} B^T K$$

Eq. diff. di RICCATI

Si dim. che se $M, Q \geq 0$ e $R > 0$

$\exists !$ sol. $K(t) \geq 0$ dell'eq. diff. di Riccati

Ref. W. Fleming - R. Rishel : Det. & stoc. optimal control. Springer '75

- E fuori da L-Q ?

La teoria delle sol. viscosità FEEDBACK OTTIMALI APPROSSIMATI

Idea : discretizzare il tempo :

v. [BCD] Cap I, VII, e

App. di Falcone x metodi numerici.

- Abbiamo visto il CONTROLLO DETERMINISTICO

La teoria delle sol. viso. funziona anche per

- giochi diff. deterministici (a somma 0)
- controllo stocastico.

FINE