Lezione 13.3.14

$$\begin{cases} u_t + G(D_x u, u, x, t) = 0 & \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, & G, g \in C^3 \end{cases}$$

Richiamo: il sistema delle caratteristiche è

$$\begin{cases} (a) \begin{cases} \dot{p}_i = -G_z p_i - G_{x_i} & i = 1, \dots, n \\ \dot{p}_{n+1} = -G_z p_{n+1} - G_t \end{cases} \\ (b) \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^{n} G_{p_i} p_i + p_{n+1} \\ (c) \begin{cases} \dot{\underline{X}}_i = G_{p_i} & i = 1, \dots, n \\ \dot{\underline{X}}_{n+1} = 1 \end{cases} \\ p(0) = (\nabla g(y), -G(\nabla g, \cancel{g}, y, 0)) \quad (=: q(y)) \\ z(0) = g(y) \\ \underline{X}(0) = (y, 0) \end{cases}$$

Lemma. $\overline{X}(y, s)$ is loc. invertibile

giovedì 13 marzo 2014 09.26

$p = (\bar{p}, p_{n+1})$

(C) $\Big\{ \; x_{n+1}$

$+ p_{n+1} = 0$

(PDE)

Caratt. proiett.

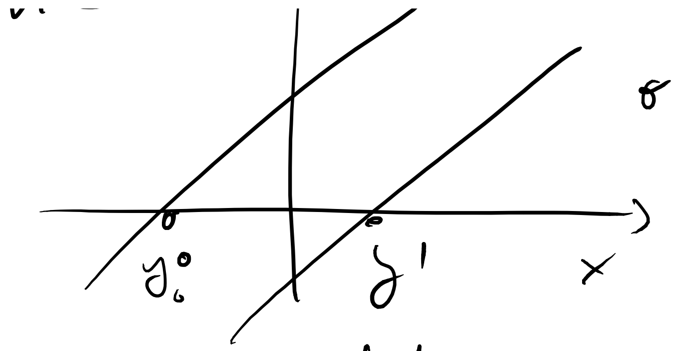
SOLO RETTE .

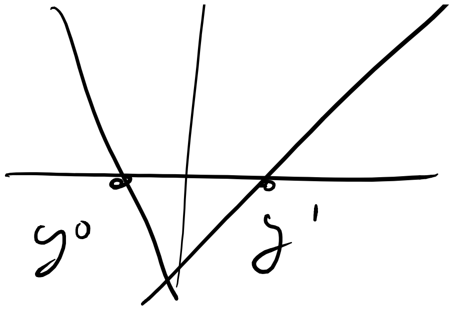
Per usare $\left(\underline{I} + t\, f' \circ g\right)\left(\underline{\Psi}(x,t)\right) = x$

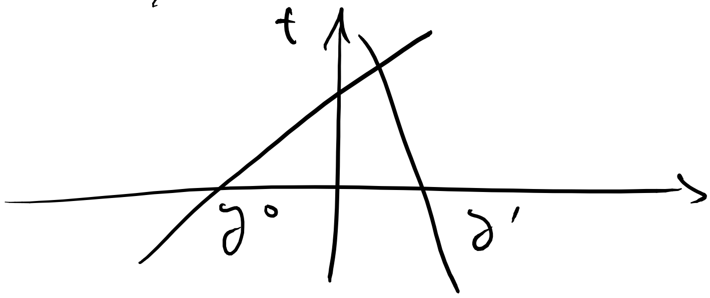
e $\dfrac{\partial}{\partial t}$ - - - - .

N.B. u $\exists$ finchè le caratteristiche proiettate $\underline{X}$ non si incrociano :

$n = 1$





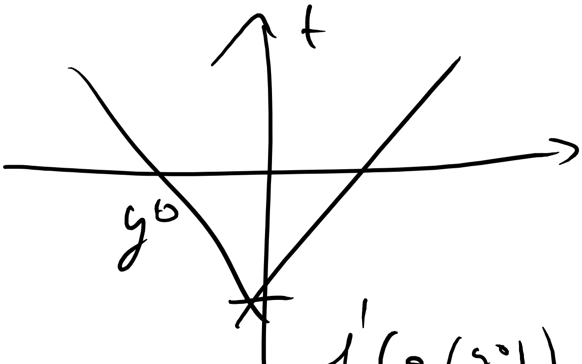


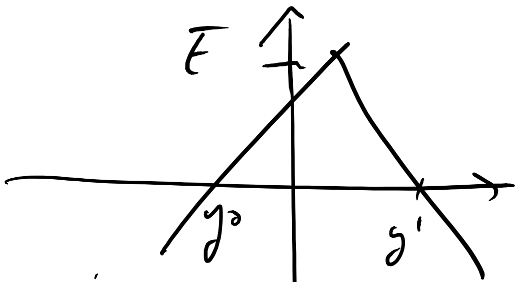
Quando $\bar{X}$ perde iniettività? $y_0 < y_1$

In $\bar{t}$:

$$y^0 + \bar{t}\, f'(g(y^0)) = y^1 + \bar{t}\, f'(g(y^1))$$

$$\bar{t} = \frac{y^1 - y^0}{f'(g(y^0)) - f'(g(y^1))}$$





$f'(g(y^0)) < f'(g(y^1))$ $\qquad$ $f'(g(y^0)) > f'(g(y^1))$

Es. • Se $f' \circ g$ è STR. CRESC.

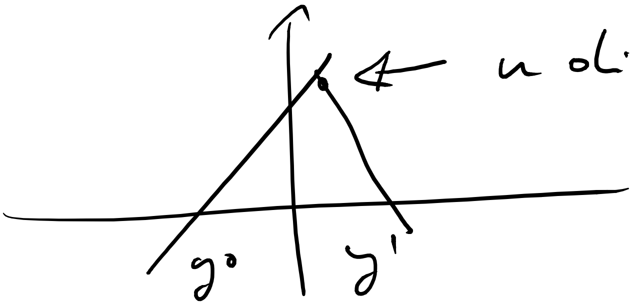
non c'è incrocio delle caratt. $\Rightarrow$ sol. u è def. $\forall\, t > 0$

(Es. $f'' > 0$ e $g' > 0$)

o se $f' \circ g$ è STR DECRESC.

(es. $f'' > 0$ e $g' < 0$)

Sol. Non è def. $\forall t$ $\exists$ SHOCK = SALTO di u



← u discontinua

Exerc. Sol. esplicita di Burgers

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = ax + b \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

— o —

Es. 3 Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(D_x u, x) = 0 \qquad H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

almeno C^1

[illegible]

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -H_{x_i}(\bar{p}, \underline{X}) & i = 1, \dots, n \\ \dot{p}_{n+1} = 0 \\ \dot{z} = H_p(\bar{p}, \underline{X}) \cdot \bar{p} + p_{n+1} \\ \dot{X}_i = H_{p_i}(\bar{p}, \underline{X}) \\ \dot{X}_{n+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_{n+1}(s) = s \quad (s = 1) \end{cases}$$

$$\dot{p}_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{n+1}(s) = p_{n+1}(0) = -H(\nabla g(y), y)$$

PDE: $p_{n+1}(s) = -H(\bar{p}(s), \underline{X}(s)) \quad \forall s$

$$\Rightarrow \quad H(\bar{p}(s), \underline{X}(s)) = \text{cost.} \quad \forall s.$$

SIST. CAR. si RIDUCE A:

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_x(p, \underline{X}) & n \text{ eq.} \\ \dot{X} = H_p(p, \underline{X}) & n \text{ eq.} \end{cases} \text{ SIST HAM.}$$

$$\dot{z} = H_p(p, x) \cdot p - H(p, x) \quad 1 \text{ eq}$$

Solo x!

Es. 3 bis

CASO SPECIALE

$$u_t + H(D_x u) = 0$$

$$\dot{p} = 0 \Rightarrow p(y,s) = \nabla g(y)$$

$$\dot{\underline{X}} = H_p(p) \Rightarrow \underline{X}(y,s) = y + s H_p(\nabla g(y))$$

$$z(y,s) = g(y) + s\left[H_p(\nabla g)\cdot\nabla g - H(\nabla g)\right]$$

Se $\exists$ inversa di $\underline{X}$, $\underline{Y}(x,t)$, cand. sol. è

$$u(x,t) := g(\underline{Y}) + t\left[H_p(\nabla g(\underline{Y}))\cdot\nabla g(\underline{Y}) - H(\nabla g(\underline{Y}))\right]$$

Teor. Ass. $H \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e

$y \mapsto \underline{X}(y,t)$ ha inversa $\underline{Y}(x,t) \in C^1$ $\forall\, 0 \le t \le T$

$\Rightarrow$ u risolve (CP) $\begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

Dim. Tesi 1 $\quad D_x u(x,t) = Dg(\underline{Y}(x,t))$

Tesi 2 $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -H(Dg(\underline{Y}(x,t)))$

[P.L. LIONS ... Gen. Sols. of H-J eqs. Pitman '82]

Dim. T. 1 $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_i \dfrac{\partial g}{\partial x_k} +$

$$t\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i H_{p_i}(\nabla g)\, g_{y_i}(\underline{Y})\right)}_{\swarrow} - \cancel{\sum_i H_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g_{y_i}(\underline{Y})\right)}\right]$$

$$\sum_{i,j,l} H_{p_i p_j}\, g_{y_j y_l} \frac{\partial Y_l}{\partial x_k} g_{y_i} + \cancel{\sum_i H_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g_{y_i}(\underline{Y})\right)}$$

$$= \sum_i g_{y_i}\left[\frac{\partial Y_i}{\partial x_k} + t \sum_{j,l} H_{p_i p_j}\, g_{y_j y_l} \frac{\partial Y_l}{\partial x_k}\right]$$

$$(\nabla u)^T = \nabla g^T \left[D_x \underline{Y} + t\, D^2 H\, D^2 g\, D_x \underline{Y}\right]$$

Tesi diventa $[\ \ ] = I$

$$[\ \ ] = \left(I + t\, D^2 H\, D^2 g\right) D_x \underline{Y}$$

T. F. INV. $D_x \underline{Y} = \left(D_x \underline{X}(\underline{Y})\right)^{-1}$

$$D_y \bar{X}(y,t) = I + t\, D^2H\, D^2g$$

$$D_x \bar{Y} = \left[\left(I + t\, D^2H\, D^2g\right)(\bar{Y})\right]^{-1}$$

$\Rightarrow$ Teo$[\quad] = I$ // Teo 1.

Dim. T.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \overbrace{\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial t}}^{= \nabla g \cdot \partial_t \bar{Y}} + \left[H_p \cdot \nabla g - H\right]$$

$$+ t\, \nabla g \cdot D^2H\, D^2g\, \partial_t Y$$

$$= \nabla g \cdot \left[I + tD^2H D^2g\right] \partial_t \bar{Y} + H_p \cdot \nabla g - H = \oplus$$

CLAIM $\partial_t \bar{Y} = -\left[I + t\, D^2H(\nabla g)\, D^2g\right]^{-1} H_p(\nabla g)$

Se è vero

$$\oplus = \cancel{-\nabla g \cdot H_p(\nabla g)} + \cancel{H_p(\nabla g) \cdot \nabla g} - H(\nabla g)$$
$$= -H(\nabla g(\bar{Y}))$$

che è la T.2.

Dim. CLAIM. $\bar{X}(\bar{Y}(x,t),t) = x \quad \forall t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \qquad D_y \underline{X}(\underline{Y},t)\,\partial_t \underline{Y} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{X}(\underline{Y},t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t \underline{Y} = -\underbrace{\left(D_y \underline{X}(\underline{Y},t)\right)^{-1}}_{I + t D^2 H\, D^2 g} \underbrace{\frac{\partial \underline{X}}{\partial t}}_{H_p(\nabla g)} \quad //$$

<u>Corollario 1</u> Ass. $H, g \in C^2$ con $Dg, D^2 g$ limitate in $\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow$

$$T := \sup\{t : \det(I + t\, D^2 H(Dg)\, D^2 g) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n\} > 0$$

e u risolve (CP) in $\mathbb{R}^n \times]0,T[$.

<u>Dim</u> $T > 0$ xchè $D^2 H(Dg)$ e $D^2 g$ sono limitate.

$D_y \underline{X}(y,t) = I + t D^2 H(Dg) D^2 g$ è invertibile

$\Rightarrow \underline{X}$ è invert. con inv. C^1 $\Rightarrow$ valgono le ipotesi del Teor. $\boxtimes$

—— o ——

Lezione 14.3.14

Corollario 2 Ass. $H, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$

entrambi convesse o entrambi concave.

Allora Teor. vale con $T = +\infty$

e quindi c'è esistenza globale

della soluzione C^1.

Dim: OSS $n = 1$ banale: $H'' \geq 0$

$g'' \geq 0 \Rightarrow 1 + t H''(g') g'' \geq 1$. $\boxtimes$

$n > 1$ $D^2 H(p) \geq 0$ è matrice simm.

semidef. pos., $D^2 g(x) \geq 0$ idem

Fatto di algebra lineare: A, B simm.

$A \geq 0$, $B \geq 0 \Rightarrow$ autovalori di AB

sono ≥ 0.

Allora $\det(I + AB) \geq 1$

xchè λ autov. di $I + AB \Rightarrow$

$\det(I + AB - \lambda I) = 0$

$\det(AB - (\lambda - 1) I) = 0 \iff \lambda - 1$

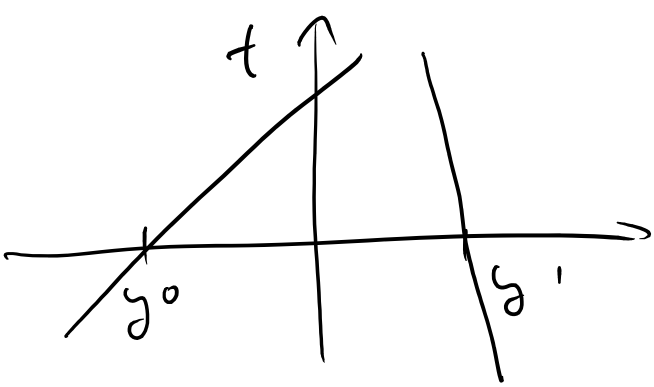
autov. di $AB \Rightarrow \lambda \geq 1$

$\det(I + AB) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 1$. $\blacksquare$

Ma in generale la sol. non è

def. $\forall t$: P.es. dim $n = 1$:

Caratt. proiettate $\bar{X}(y, s) = y + s H'(g'(y))$



Punto d'incontro $\bar{t}$:

$y^0 < y^1$

$$y^0 + \bar{t} H'(g'(y^0)) = y^1 + \bar{t} H'(g'(y^1))$$

$$t = \frac{y^1 - y^0}{H'(g'(y^0)) - H'(g'(y^1))} > 0$$

se $H'(g'(y^0)) > H'(g'(y^1))$

e.g., se $H' \circ g'$ è decrescente

e.g.: $H'' > 0$ e $g'' < 0$

<u>N.B.</u> Qui t <u>non</u> è costante lungo le $\underline{X}(\cdot)$. In generale u <u>non</u> è discont. in t, ma lo è $D_x u$.

Una spiegazione euristica: $n = 1$

$$\begin{cases} u_t + H(u_x) = 0 & \mathbb{R} \times]0,T[\\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$v := u_x$
$$\begin{cases} v_t + H(v)_x = 0 \\ v(x,0) = g'(x) \end{cases}$$

$$\{\, v(x,0) = g'(x)$$

Il tempo $\bar{t}$ di incontro delle caratteristiche per u è lo stesso che per v calcolato ieri.

Es. PC

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{|Du|^2}{2} = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{a|x|^2}{2} + b\cdot x \;(+c) \end{cases}$$

$n \geq 1$

Scrivere la sol. esplicita e trovare T = il tempo di esistenza della sol.

Calcolo delle variazioni e (Eq. di H-J.)

SISTEMI HAMILTONIANI.

(Ref Evans Ch. 3.3)

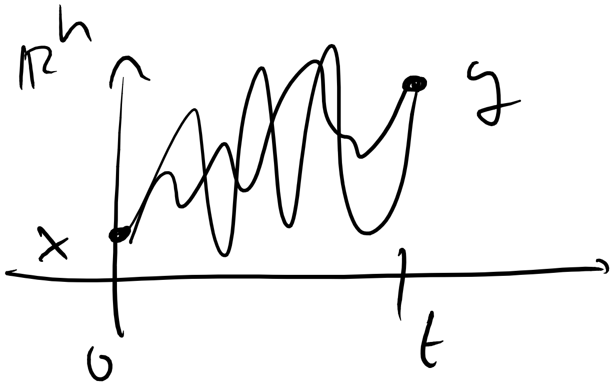
$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la LAGRANGIANO

$L(q, x)$,

Def. Funzionale AZIONE (o ENERGIA)

$$I[w(\cdot)] = \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))\, ds$$

$w \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} := \{ w \in C^1([0,t]) : w(0) = x,\ w(t) = y \}$



Problema base del CdV è:

trovare $\bar{X}(\cdot) \in \mathcal{A}$: $I[\bar{X}(\cdot)] = \min_{w(\cdot) \in \mathcal{A}} I[w(\cdot)]$

Thm. (Condiz. nec. di minimalità)

Supp. $L \in C^2$. Se $\bar{X}(\cdot)$ è minimizzatore di classe C^2 $\Rightarrow$ $\bar{X}(\cdot)$ risolve

$$-\frac{d}{ds} L_q(\dot{\underline{X}}(s), \underline{X}(s)) + L_x(\dot{\underline{X}}(s), \underline{X}(s)) = 0$$
$$0 < s < t$$

l'eq. di EULERO-LAGRANGE ass. a I

<u>Dim</u> V. [E].

<u>Es.</u> $L(q, x) = \frac{m|q|^2}{2} - \phi(x) =$

= en. cinetica − en. potenziale

$L_q = mq \qquad L_x = -\nabla\phi \Rightarrow$ E-L è

$$-\frac{d}{ds} m\dot{\underline{X}} - \nabla\phi(\underline{X}) = 0$$

$$m\ddot{\underline{X}} = f(x) \qquad f(x) = -\nabla\phi$$

Legge di Newton. ∎

COLLEGAMENTO tra E-L e SIST. HAM.

Momento generalizzato:

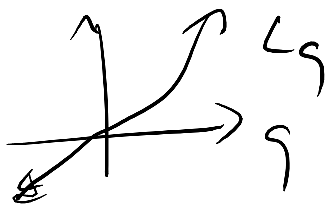
$p(s) := L_q(\dot X, X) \qquad 0 \le s \le t$

<u>Ipotesi su L</u> $\forall\, x, p \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ unica sol. $q \in \mathbb{R}^n$ di (I) $p = L_q(q, x)$, la chiamo $q = Q(p, x)$, e supp. $Q \in C^1$.

$$\boxed{p = L_q(Q(p, x), x)}$$

<u>Ex</u> $n = 1$ $\quad L_{qq} > 0 \Rightarrow L_q$ è str. cresc.

e se anche



$\Rightarrow$ l'ipotesi è verificata.

<u>N.B.</u> $\dot X = Q(p(s), X(s))$.

<u>Def</u> La Hamiltoniana associata a L è

$$H(p,x) := Q(p,x)\cdot p - L(Q(p,x),x)$$

$$x,\ p \in \mathbb{R}^n$$

<u>Ex.</u> (Newton) $L = \frac{m}{2}|q|^2 - \phi(x)$, $m \neq 0$

$$L_q = mq \qquad Q(p,x) = \frac{p}{m} \Rightarrow H = \frac{|p|^2}{m} - \frac{m}{2}\frac{|p|^2}{m^{\cancel{2}}} + \phi(x)$$

$$\Rightarrow H = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(x)$$

<u>Thm</u> $\underline{X}(\cdot)$ sol. di Eulero-Lagrange

$$p = L_q(\dot{\underline{X}}, \underline{X}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{X}}(s) = H_p(p(s), \underline{X}(s)) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \le s \le t \\ \dot{p}(s) = -H_x(p(s), \underline{X}(s)) \end{cases}$$

<u>Dim</u> $\dot{\underline{X}} = H_p$ + facile, Ex PC.

Faccio $\dot{p} = -H_x$.

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \left[p^k \frac{\partial q^k}{\partial x_i}(p,x) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(Q,x)\frac{\partial q^k}{\partial x_i}(p,x) \right]$$

$$[\;] = 0$$

$$-L_{x_i}(q, x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_i} = -L_{x_i}(q, x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(p(s), \bar{X}(s)) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(Q(P(s), \bar{X}(s)), \bar{X}(s)) \qquad Q(P(s),\bar X(s)) = \dot{\bar{X}}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\dot{\bar{X}}(s), \bar{X}(s)) \underset{E-L}{=} -\frac{d}{ds} \underbrace{L_{q_i}(\dot{\bar{X}}(s), \bar{X}(s))}_{p_i(s)}$$

$$= -\dot{p}_i(s). \qquad \blacksquare$$

Met. CARATT.

OSS CdV $\leftrightarrow$ E-L $\rightarrow$ S+H $\leftrightarrow$ H-J

ho connessione tra $\min \int_0^t L(\;\;)$

con $u_t + H(D_x u, x) = 0$

Cosa posso dire su $z(s)$ e su $u(x,t)$?

$$\dot{z} = \dot{\bar{X}} \cdot p - H(p, \bar{X}) = \cancel{\dot{\bar{X}} \cdot p} - \cancel{\dot{\bar{X}} \cdot p} + L(q, \bar{X})$$

$$\Rightarrow z(y,t) = g(y) + \int_0^t L(\dot{\bar{x}}(s), \bar{x}(s))\,ds$$

con $\bar{x}(0) = y$ $\bar{x}(t) = x$

e $\bar{x}$ minimizza $\int_0^t L(\dot{\bar{x}}, \bar{x})\,ds$.

Questo suggerisce che possa essere

$$u(x,t) = \min\left\{\int_0^t L(\dot{w}, w)\,ds + g(y) : \underset{\in \mathbb{R}^n}{w(0) = y}, w(t) = x, w \in C^1\right\}$$

una "soluzione" di

$$(CP) \quad \begin{cases} u_t + H(D_x u, x) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

con H associato ad L come sopra.

<u>Vedremo che</u>: • Se $p \mapsto H(p,x)$ è CONVESSA

$\exists L$: H è l'Ham. ass. ad L.

• la cosiddetta formula

$u(x,t) = \min\{ \ldots \}$ (funzione VALORE)

$u(x,1) = \min\{\ldots\}$ (funzione VALORE del probl. di CdV.)

è SOLUZ. GENERALIZZATA di (CP)

Introduzione all'analisi convessa (anche per $f \notin C'$)

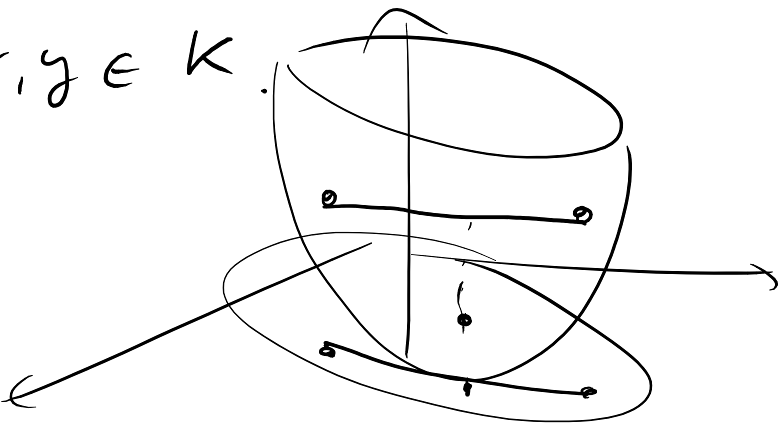
$K \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall x, y \in K$

$tx + (1-t)y \in K \quad \forall t \in [0,1]$

Se K è convesso, $f : K \to \mathbb{R}$ è conv.

se $f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y)$

$\forall t \in [0,1] \quad \forall x, y \in K.$

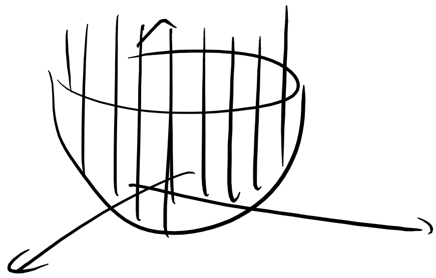


Proprietà di base

1. f convessa $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}$

$$K_c = \{x \in K : f(x) \le c\} \text{ è convesso}$$

2. $\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : t \ge f(x)\}$



$$\overset{\circ}{\operatorname{epi}} f = \{ \_\_\_\_\_ : t > f(x)\}$$

f convessa $\Rightarrow$ $\operatorname{epi} f$ e $\overset{\circ}{\operatorname{epi}} f$ sono convessi in $\mathbb{R}^{n+1}$

3. f convessa $\Rightarrow$ f è loc. Lip ($\Rightarrow$ cont.) in $\overset{\circ}{K}$

Ref. W. Fleming : Fns of several variables.

4. Teorema di separazione per convessi

(Hahn-Banach geometrico in dim $< +\infty$)

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convessi, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$

A aperto $\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$v \cdot x \le \alpha \le v \cdot y \quad \forall x \in A, y \in B$$

(cioè $\{z : v \cdot z = \alpha\}$, iperpiano in $\mathbb{R}^n$ che separa A e B)

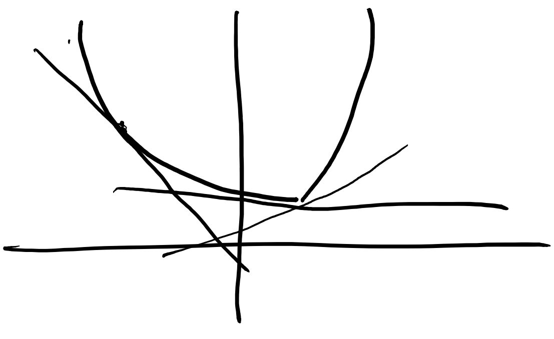
Ref. H. Brezis, Analisi Funzionale

Teor. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ conv., $f : K \to \mathbb{R}$ conv.

$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathring{K} \ \exists\, r \in \mathbb{R}^n$:

iperpiano di supporto

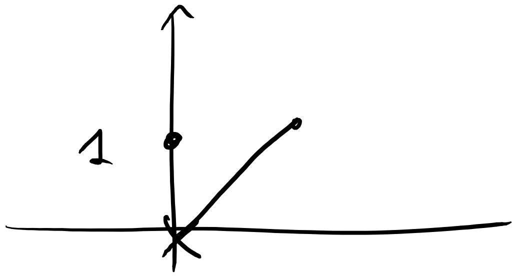
$$f(x) \ge f(x_0) + r \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in K$$



OSS. se f diff. in x_0

$r = \nabla f(x_0)$

OSS. $x_0 \in \mathring{K}$ è essenziale .



$K = [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

in 1 non c'è iperpiano di supp. al graf.