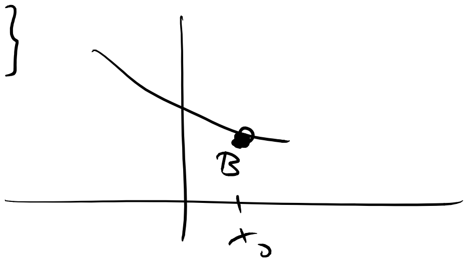
Lezione 20.3.14

giovedì 20 marzo 2014 09.21

Teor $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: K \to \mathbb{R}$ convessa $\Rightarrow \forall x_0 \in \mathring{K}\ \exists\, r \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \geq f(x_0) + r \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$B = \{(x_0, f(x_0))\}$



T. separaz. convessi $\Rightarrow \exists\, v = (p, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$p \cdot x + \gamma t \leq p \cdot x_0 + \gamma f(x_0) \quad \forall (x, t) \in A \qquad (D)$$

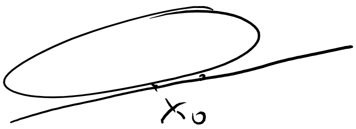
cioè $\forall x \in K\ \forall t > f(x)$

Oss. che $\gamma \leq 0$ perché se no per $t \to +\infty$ ho contraddiz. con (D).

Inoltre $\gamma \neq 0$, perché se $\gamma = 0$

(D) diventa $p \cdot x \leq p \cdot x_0 \quad \forall x \in K$

contradd. con $x_0 \in \mathring{K}$



Quindi $\gamma < 0$ in (D): dividiamo per $|\gamma|$

$$x \cdot \frac{p}{|\gamma|} - t \le x_0 \cdot \frac{p}{|\gamma|} - f(x_0) \quad \forall t > f(x)$$
$$\forall x \in K$$

Prendo $r := \frac{p}{|\gamma|}$, $t \geq f(x)$ $\Rightarrow$

$$x \cdot r - f(x) \le x_0 \cdot r - f(x_0)$$

$$f(x) \ge f(x_0) + r \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in K \quad \blacksquare$$

<u>OSS</u> r : vale $\le$ iperp. supporto

formano $\partial f(x_0)$ il SOTTODIFFERENZIALE

di f in x_0.

<u>Un'applicazione</u>: <u>Disug.</u> di <u>Jensen</u>.

<u>Teor</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa,

$u : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ integrabile

$$\Rightarrow \quad f\left(⨍_U u \, dx \right) \le ⨍_U f(u(x)) \, dx$$

$$⨍_U u \, dx := \frac{1}{|U|} \int_U u \, dx$$

<u>Dim.</u> $p := ⨍_U u \, dx$

Uso T. Ip. supp. con $x_0 = p \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^n$:

$$f(q) \ge f(p) + r \cdot (q - p) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

$q = u(x)$ $\Rightarrow$

$$f(u(x)) \ge f(p) + r \cdot (u(x) - p)$$

$$\fint_V f(u(x))\,dx \geq f\left(\fint_V u\,dx\right) + z\cdot\left(\cancel{\fint_V u\,dx - \fint_V u\,dx}\right)$$

$$\geq f\left(\fint_V u\,dx\right)$$

CONIUGAZIONE CONVESSA

(trasformata di Legendre(-Fenchel))

Consideriamo Lagrangiane t.c.

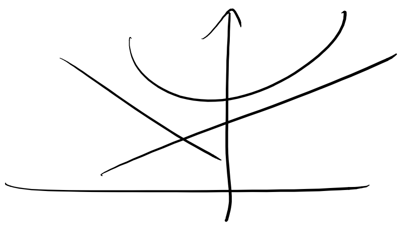
$q \mapsto L(q,x)$ convesse $\forall x$

Poiché $x \in \mathbb{R}^n$ è fisso omettiamo di scriverlo: $L = L(q)$.

<u>Ipotesi</u> su $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(C) $q \mapsto L(q)$ è convessa

(S) $$\lim_{q\to\infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty$$



<u>Def</u>. La CONVESSA CONIUGATA (o trasf. di L-F) di L, L^*, è

$$L^*(p) := \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \{ q\cdot p - L(q) \} \qquad p \in \mathbb{R}^n$$

Motivazione e colleg. con CdV.

Motivazione e colleg. con CdV.

$$(S) \Rightarrow \frac{q\cdot p - L(q)}{|q|} \xrightarrow{|q|\to\infty} -\infty$$

$\Rightarrow q\cdot p - L(q) \to -\infty$ per $q \to \infty$

L conv. $\Rightarrow L$ cont. $\Rightarrow q\cdot p - L(q)$ ha MAX in $\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow L^*(p) < +\infty$.

Se $L \in C^1$ nel p.to di max $p - DL(q) = 0$

Se l'eq. ha un'UNICA sol. $q = Q(p) \Rightarrow$

$$L^*(p) = Q(p)\cdot p - L(Q(p)) = H(p)$$

vista in C.d.V.

Conclusione: Se $L \in C^1$, e $p = DL(q)$ ha sol. unica $\Rightarrow L^* = H$, ma la def di L^* è + generale.

Teor. (DUALITA' CONVESSA) Supp. (C), (S)

$\Rightarrow H := L^*$ soddisfa:

- $p \mapsto H(p)$ è CONVESSA
- $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$

e $H^*(q) = L(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$

N.B. Coniug. conv. è INVOLUTIVA cioè:

$L^{**} = L$.

Dim 1. $H = L^*$ convessa. $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau \leq 1$

$$H(\tau p + (1-\tau)\hat{p}) = \sup_q \{ q \cdot (\tau p + (1-\tau)\hat{p}) - \underbrace{\ }_{\tau + 1 - \tau} L(q) \}$$

$$\leq \sup_q \{ \tau q \cdot p - \tau L(q) \} + \sup_q \{ (1-\tau) q \cdot \hat{p} - (1-\tau) L(q) \}$$

$$\leq \tau H(p) + (1-\tau) H(\hat{p}) \qquad \blacksquare_1$$

2. H soddisfa (S). Fisso $\lambda > 0$

$p \neq 0 \qquad q = \lambda \frac{p}{|p|}$

$$H(p) \geq \lambda |p| - L\left(\lambda \frac{p}{|p|}\right) \geq \lambda |p| - \max_{\partial B(0,\lambda)} L$$

$$\frac{H(p)}{|p|} \geq \lambda - \frac{C_\lambda}{|p|} \Rightarrow \liminf_{p \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} \geq \lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{p \to \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty \qquad \blacksquare_2 .$$

3. " $H^* \leq L$ "

$$H(p) + L(q) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ p \cdot \xi - L(\xi) \} + L(q)$$

$$(\xi = q) \qquad \geq p \cdot q \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow L(q) \geq p \cdot q - H(p) \qquad \forall p, q$$

$$\geq \sup_p \{ p \cdot q - H(p) \} = H^*(q) \quad /\!/$$

4. " $H^* \geq L$ "

$$H^*(q) = \sup_p \{ p \cdot q - \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ \xi \cdot p - L(\xi) \} \}$$

$$\circledast = \sup_p \inf_\xi \{ \underbrace{p\cdot q - \xi\cdot p}_{p\cdot(q-\xi)} + L(\xi) \}$$

$\exists$ iperp supp a L in q : $\exists s \in \mathbb{R}^n$:

$$L(\xi) \geq L(q) + s\cdot(\xi - q) \quad (**)$$

Uso $p = s$ in $\circledast$ $\Rightarrow$

$$H^*(q) \geq \inf_\xi \{ s\cdot(q-\xi) + L(\xi) \}$$

$$\overset{(**)}{\geq} L(q) \quad . \blacksquare$$

<u>Esercizio</u> $L(q) = \frac{|q|^2}{2} \Rightarrow H(p) = \frac{|p|^2}{2}$

<u>PC</u> L^* per $L(q) = \frac{|q|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$

<u>Formule di Hopf-Lax</u>

Studiamo caso partic. di H-J

$$(CP) \begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con $\begin{cases} H \text{ convessa} & H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \lim_{p\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty \end{cases}$

e $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz.

<u>Richiamo</u>: Candidata soluz. di (CP)

(se $H = L^*$, $L \in C^1$ ......) era

$$u(x,t) := \inf \left\{ \int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds + g(y) : \right.$$
$$\left. w \in C^1([0,t], \mathbb{R}^n),\ w(0) = y,\ w(t) = x \right\}$$

<u>Oss.</u> $u(x,0) = g(x)$.

<u>Oss.</u> u è def. come f. valore di un probl. di C.d.V.

<u>Teor.</u> (Hopf-Lax formula). $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall t > 0$

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t\, L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\} \quad (HL)$$

<u>Dim</u> **1**. $\min\{\dots\}$ $\exists$. Fisso $x, t > 0$

$$\left|\frac{x-y}{t}\right| = |y| + o(|y|) \quad y \to +\infty$$

$$\frac{L(q)}{|q|} \to +\infty \text{ per } q \to \infty \qquad \frac{L\left(\frac{x-y}{t}\right)}{|y|} \xrightarrow{y \to \infty} +\infty$$

g Lip: $\exists\, \mathrm{Lip}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $|g(x) - g(y)| \leq \mathrm{Lip}|x-y|$

$x = 0$ $\qquad |g(y)| - |g(x)| \leq |g(x)-g(y)|$

$$\Rightarrow |g(y)| \leq |g(0)| + \mathrm{Lip}|y|$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \xrightarrow[y \to \infty]{} +\infty \Rightarrow \exists \min \text{ in } (HL).$$

2. "$u \leq HL$" $\quad w(s) = y + \frac{s}{t}(x-y)$

$w(0)=y, \quad w(t)=y+x-y=x, \quad \dot w = \frac{x-y}{t}$

$$u(x,t) \le \int_0^t L\left(\frac{x-y}{t}\right) ds + g(y) = \underbrace{t L\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)}$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u(x,t) \le \min_y \{ \qquad \}$. ■

3. " $u \ge HL$ ". Fisso $w \in C^1([0,t],\mathbb{R}^n)$

$$L\Big(\frac{1}{t}\underbrace{\int_0^t \dot w(s)\, ds}_{= x-y}\Big) \overset{\text{Jensen}}{\le} \frac{1}{t}\int_0^t L(\dot w(s))\, ds$$

$w(0)=y$
$w(t)=x$

$$\underbrace{t L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)} \le \underbrace{\int_0^t L(\dot w(s))\, ds + g(y)} \quad \forall y$$

$$\underbrace{\min_y \left\{ t L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\right\}}_{HL} \le \inf_y \{\qquad\} \le u(x,t) \quad \forall w.$$ ■

Vedremo domani che

$\forall x \in \mathbb{R}^n, t>0$ tali che $u(x,t)$ sia

differenziabile $\quad u_t + H(D_x u) = 0$.

Lezione 21.3.14

$$u(x,t) := \begin{cases} (HL), & t>0 \\ g(x), & t=0 \end{cases}$$

Lemma (Una versione semplificata

del Principio di Programmazione Dinam.)

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \quad 0 \leq s < t$

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}$$

OSS Per $s=0$ si riduce a (HL).

Pf "$\leq$" Fisso y $\quad 0 < s < t$

$\exists z : u(y,s) = s L\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)$

$u(x,t) \leq t L\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) \quad \oplus$

Voglio usare la CONVESSITÀ di L

$$\frac{x-z}{t} = \frac{x-y}{t} + \frac{y-z}{t} = \left(1 - \frac{s}{t}\right)\frac{x-y}{t-s} + \frac{s}{t}\frac{y-z}{s}$$

Uso ↑ in $\oplus$

$$u(x,t) \leq \cancel{t}\left[\frac{t-s}{\cancel{t}} L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \frac{s}{\cancel{t}} L\left(\frac{y-z}{s}\right)\right] + g(z)$$

$$= (t-s) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \underbrace{s L\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)}_{u(y,s)} \quad \forall y$$

$$\Rightarrow u(x,t) \leq \inf_y \left\{ (t-s) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}$$

"$\geq$" Facoltativo, v. [Evans]

Conclusione: inf è min xché $y \mapsto u(y,s)$ è Lip. (prossimo lemma), quindi si rifà la dim. di ieri con $u(\cdot, s)$ invece di g. ▨

di g. ∎

<u>Lemma</u> u è Lipschitz in $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[$,

in particolare $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = g(x)$.

<u>Dim.</u> 1. Lip. in x Fisso $t>0$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$

$\exists y : \quad u(x,t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)$

$$u(\hat{x},t) - u(x,t) \le tL\left(\frac{\cancel{\hat{x}} - (\cancel{\hat{x}} - x + y)}{t}\right) + g(\hat{x}-x+y)$$

$$- tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - g(y)$$

$$\le L_g \,|\hat{x} - x \cancel{+y} \cancel{-y}| = L_g |\hat{x} - x|$$

Rifaccio l'argomento con $\hat{x}$ e x scambiati

$\Rightarrow |u(\hat{x},t) - u(x,t)| \le L_g |\hat{x} - x|$ ∎

<u>2</u>. Lip. in t per $t=0$

cioè cerco C: $\quad |u(x,t) - g(x)| \le Ct$, $t>0$

$(y = x)$

$u(x,t) \le tL(0) + g(x)$

Per il "$\ge$"

$$u(x,t) = \min_y \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\} \pm g(x)$$

$$\left(g(y) - g(x) \ge -L_g |x-y| \right)$$

$$\ge g(x) + \min_y \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - L_g |y-x| \right\}$$

$$\left(z = \frac{x-y}{t}\right)$$

$$= g(x) + t \min_z \{ \cancel{t} L(z) - \cancel{t} L_g |z| \}$$

$$= g(x) - t \max_z \{ L_g |z| - L(z) \}$$

$$c|z| = \max_{|w|=c} z \cdot w$$

$$= g(x) - t \max_{|w|=L_g} \underbrace{\max_z \{ z \cdot w - L(z) \}}_{H(w)}$$

$$\geq g(x) - t \max_{|w|=L_g} H$$

$$\Rightarrow -t \max_{|w|=L_g} H \leq u(x,t) - g(x) \leq t L(0)$$

$$C := \max \{ \max_{|w|=L_g} H, L(0) \}.$$

$$|u(x,t) - g(x)| \leq C t \qquad \blacksquare_2$$

<u>3.</u> Lip. in $t > 0$: $0 < \hat{t} < t$

$$u(x,t) = \min_y \{ (t-\hat{t}) L\left(\frac{x-y}{t-\hat{t}}\right) + u(y, \hat{t}) \}.$$

$\operatorname{Lip} u(\cdot, \hat{t}) = L_g \Rightarrow$ per l'argomento di 2

$$\Rightarrow |u(x,t) - u(x,\hat{t})| \leq C(t-\hat{t}) = C|t-\hat{t}|$$

con la stessa C. $\blacksquare$

Fatto di teoria (geometrica) della misura.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip. $\Rightarrow$ differenziabile quasi ovunque.

Teor. u differenziabile in (x,t), $t>0$

$$\Rightarrow \quad u_t + H(D_x u)\Big|_{(x,t)} = 0$$

Dim.: "$\leq$" Fisso $q \in \mathbb{R}^n$, $h>0$

$$u(x+hq, t+h) \overset{(DP)}{=} \min_y \left\{ hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(y,t) \right\}$$

$(y=x)$

$$\leq h\, L\left(\frac{\cancel{h}q}{\cancel{h}}\right) + u(x,t)$$

$$\frac{u(x+hq,t+h) - u(x,t)}{h} \leq L(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

$h \to 0+$

$$\left(D_x u \cdot q + u_t\right)\Big|_{(x,t)} \leq L(q) \qquad \forall q$$

$$u_t + \underbrace{\max_q \left\{ D_x u \cdot q - L(q) \right\}}_{H(D_x u)} \leq 0$$

// $\frac{1}{2}$

2. "$\geq$" $\exists z$: $u(x,t) = tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z)$

$$u(x,t) - u(y,s) \geq tL\left(\frac{x-z}{t}\right) \cancel{+g(z)} - sL\left(\frac{y-z}{s}\right) \cancel{-g(z)}$$

$$= tL\left(\frac{x-z}{t}\right) - sL\left(\frac{y-z}{s}\right) \quad \forall (y,s)$$

Scelgo y: $\quad =$ $\qquad \frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}$

$$\boxed{y = \frac{s}{t}(x-z) + z = \frac{s}{t}x + \left(1-\frac{s}{t}\right)z} \quad \text{Per tale } y$$

$$u(x,t) - u(y,s) \geq (t-s)\,L\left(\frac{x-z}{t}\right) \quad (*)$$

Voglio $y \approx x$ per calcolare $\frac{\partial u}{\partial v}(x,t)$

$t-s = h > 0 \qquad s = t-h$

$$y = \left(1-\frac{h}{t}\right)(x-z) + z = x - h\,\frac{x-z}{t}$$

$(*) \Rightarrow$

$$\frac{u(x,t) - u\left(x-h\frac{x-z}{t},\, t-h\right)}{h} \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

$h \to 0^+$

$$\frac{\partial u}{\partial\left(\frac{x-z}{t},1\right)} \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

$$\parallel$$

$$\left(D_x u \cdot \frac{x-z}{t} + u_t\right)\Big|_{(x,t)}$$

$$u_t + D_x u \cdot \frac{x-z}{t} - L\left(\frac{x-z}{t}\right)\Big|_{(x,t)} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_t + H(D_x u)\big|_{(x,t)} \geq 0$$

perché $H(p) = \max_q \{p\cdot q - L(q)\}$. ∎

Conclusione ... $\left| \min_y \{tH^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\}\right.$ $t>0$

continua $u(x,t) := \begin{cases} \dots \\ g(x), & t=0 \end{cases}$

è Lip. e risolve

$$(\text{"CP"}) \quad \begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 & \text{q.o. } (x,t),\ t>0 \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

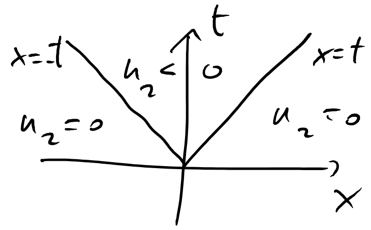
OSS. IMPORTANTE. La u di H-L NON è l'unica soluz. Lip di ("CP")

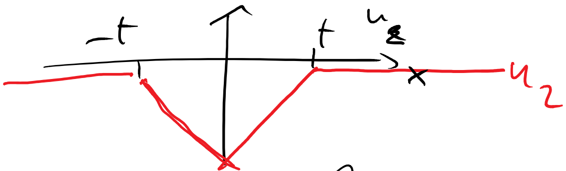
Esempio $n=1$

$$\begin{cases} u_t + u_x^2 = 0 & \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u_{HL}(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{t}{4}\left(\frac{x-y}{t}\right)^2 + 0 \right\} = 0 \quad \forall x,t$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & |x| \geq t \\ |x| - t, & t > x \end{cases}$$





$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \text{sign } x \qquad \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right| = 1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad \forall x,t : |x| \neq t$$

Conclusione: La nozione di soluz. generalizzata "q.o." non è buona perché c'è esistenza ma non unicità.

la nozione è TROPPO DEBOLE.

OSS. le soluzioni classiche sono UNICHE!

Prop. (Principio del confronto). Supp $H \in C(\mathbb{R}^n)$

$u, v : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ con derivate parziali

prime, Lip. e limitate

$$\begin{cases} u_t + H(D_x u) \le v_t + H(D_x v) & 0 < t \le T \\ u(x,0) \le v(x,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow u(x,t) \le v(x,t) \quad \forall\ 0 \le t \le T.$

Cor. C'è al più una sol. di (CP)

Lip, limitata e con derivate parziali

prime.

Dim. se u, v sono 2 soluz. Princ.

confronto $\Rightarrow u \le v$, e rovesciando i

ruoli $v \le u$. $\blacksquare$

Idea della dim. Cercare max di $u - v$

e mostrare che sono raggiunti in $t=0$

Per produrre i max si considera

$$\Phi(x,t) := u(x,t) - v(x,t) - \eta t - \beta \log(1+|x|^2)$$

$\eta, \beta > 0$ "piccoli" ...

Es. PC (v. note 2013).

OSS. $u_{HL}(x,t)$ è limitata in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

se g è limitata perché

$$|u(x,t) - g(x)| \le Ct \le CT$$

__Cor.__ Se g è limitata e u_{HL} ha derivate parziali in $\mathbb{R}^n \times [0, \bar{T}]$

$\Rightarrow$ è l'unica soluz. di (PC) limitata, Lip. e con der. parziali.

Cerchiamo nozioni di soluzione generalizzate + deboli di classica e + forti di q.o. t.c. (CP) abbia $\exists$ e unicità delle soluzione

Ci sono (almeno) 2 risposte al problema.

- "SOLUZIONI SEMICONCAVE"
  (S.N. KRUŽKOV ~1960-67)
  - OK per H convesse.
- VISCOSITY SOLUTIONS
  M. CRANDALL, P.L. LIONS, L.C. EVANS ≥'82
  - OK per H non nec. convesse
  - va oltre le eq. di H-J.