Lezione 27.3.14

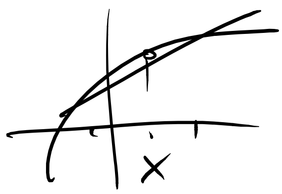
Funzioni semiconcave

Def $f \in C(\mathbb{R}^n)$ è SEMICONC. di cost. $C_1 \in \mathbb{R}$ se

$$f(x+z) - 2f(x) + f(x-z) \le C_1 |z|^2 \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}^n$$

Es. 1 f CONCAVA $\Rightarrow$ f semiconc. di cost. $c = 0$

$$x = \frac{x+z}{2} + \frac{x-z}{2}$$



$$f(x) \ge \frac{1}{2} f(x+z) + \frac{1}{2} f(x-z)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \ge f(x+z) + f(x-z) - 2f(x)$$

Vicev. f s.c. di cost. $c = 0 \Rightarrow f$ conc.

Dim: FAE ; N.B. $f \in C$

Oss f s.c. $- C_1 \Rightarrow$

$$\underline{f(x+z) - 2f(x) + f(x-z)} \le C_1$$

$$|z|^2$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{f(x+z)-f(x)}{|z|} - \frac{-f(x-z)+f(x)}{|z|}\right)\frac{1}{|z|} \leq C$$

S. concavità significa una limitatezza dell'alto delle differenze finite 2ᵉ.

Esercizio $f \in C^2 \Rightarrow \left[f \text{ è S.C. di cost. } C \iff D^2 f - CI \leq 0 \right]$

Prop. f semiconc. di cost. $C \iff$

$x \mapsto f(x) - \frac{C}{2}|x|^2$ è concava.

Dim. Solo "$\Leftarrow$" $\quad f - \frac{C}{2}|\cdot|^2$ conc. $\Rightarrow$

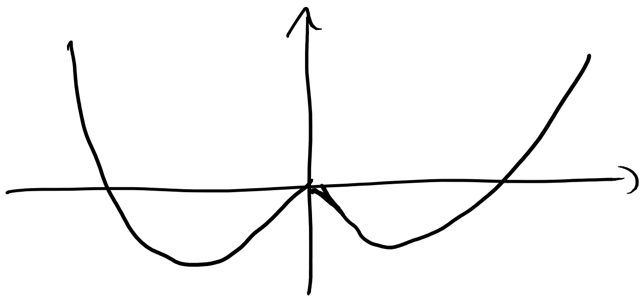
$$f(x) - \frac{C}{2}|x|^2 \geq \frac{1}{2}\left(f(x+z) - \frac{C}{2}|x+z|^2\right) + \frac{1}{2}\left(f(x-z) - \frac{C}{2}|x-z|^2\right)$$

$$|x+z|^2 + |x-z|^2 = 2|x|^2 + 2|z|^2 + \cancel{2x\cdot z} - \cancel{2x\cdot z}$$

$$2f(x) - \cancel{C|x|^2} \geq f(x+z) + f(x-z) - \cancel{C|x|^2} - C|z|^2$$

$$\Rightarrow \quad C|z|^2 \geq f(x+z) + f(x-z) - 2f(x) \quad \blacksquare$$

Esempi 1. $f(x) = |x|^2 - \alpha|x|$, $\alpha > 0$



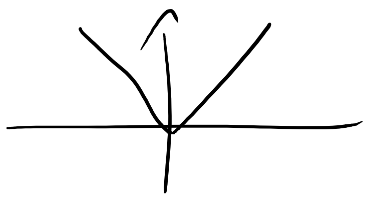
non deriv. in 0

è semiconc.

$f(x) - |x|^2 = -\alpha|x|$ concava.

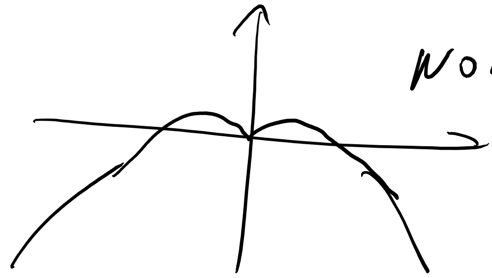
f s.c. di cost. ≤ 2

2. $|x|$



$|x| - c|x|^2$

$\forall c > 0$



NON è CONCAVA

$\Rightarrow |x|$ non è semiconcava!

FATTO: S.C. $\Rightarrow$ Loc LIP

OSS. S.conc. è "proprietà intermedia" tra Lip e C^1

Teorema (S.N. Kružkov '67)

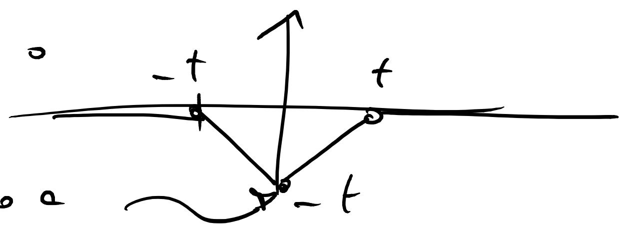
(CP) $\begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

(CP) $\begin{cases} \ \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

H soddisf. (C) (convessità), (S) (superlin.),
e $H \in C^2$, $g \in Lip$. $\Rightarrow \exists$ al più
una sol. debole di (CP) nel seguente
senso $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip,
$u(x,0) = g(x)$, $u_t + H(D_x u) = 0$ q.o.,
e $\exists C \geq 0$. $u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq C|z|^2$
$\forall x, z \in \mathbb{R}^n$ $\forall t > 0$.

<u>Dim</u> NO: v. [Evans].

<u>Es</u>. $\begin{cases} u_t + u_x^2 = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$ $u_{HL}(x,t) \equiv 0$



2ª soluz.
NON è S.C. attorno a

<u>Cor</u>. $H \in C^2$, (C), (S), g Lip e semiconc.
$\Rightarrow u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t H^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$
è l'unica sol. debole nel senso di K.

<u>Dim</u> Resta da verificare che $u(\cdot,t)$ è

s.c. a cost. di indip. da t.

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq ?$$

Scelgo y: $u(x,t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)$

$$? \quad \cancel{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)} + g(y+z) - \cancel{2tL\left(\frac{x-y}{t}\right)} - 2g(y)$$

$$\cancel{+tL\left(\frac{x-y}{t}\right)} + g(y-z) \leq C_1 |z|^2$$

g s.c. $\blacksquare$

INTRODUZIONE ALLE "SOLUZIONI DI VISCOSITÀ"

<u>Scopo</u> NOZIONE di SOL. DEBOLE che assic. $\exists$, unicità della sol. di problemi di Cauchy e p. di Dirichlet.

"Richiamo": "weak sols." di eq. der. parziali "in forma di div."

(VE) $\quad \operatorname{div} F(x,u) = 0 \quad$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

$F = (F_1, \dots, F_n)$ c. vett. C^1

$\varphi \in C^1_c(\Omega)$ "f. test"

$$\int_\Omega \varphi \underbrace{\operatorname{div} F(x,u)} \, dx$$

$$\int_\Omega \left[\operatorname{div}(\varphi F) - F \cdot \nabla \varphi \right] dx =$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi F \cdot \nu \, d\sigma}_{= 0} - \int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx$$

ν: normale est. a Ω.

u sol. di (VE) $\Rightarrow \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) \quad \int_\Omega F(x,u) \cdot \nabla\varphi \, dx = 0 \quad (*)$

Per (VE) si def. sol. debole $u \in L^1_{loc}(\Omega)$: $(*)$ $\forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$.

MA $u_t + H(D_x u) = 0$ **NON** è in forma div: questo motiva la funzione.

IDEA: PRINCIPIO DEL MASSIMO e METODO della VISCOSITÀ EVANESCENTE e METODO della VISCOSITÀ EVANESCENTE

per

(HJ) $\quad u_t + H(D_x u, x) = 0$

Considero, per $\varepsilon > 0$

$$(HJ_\varepsilon) \quad u^\varepsilon_t + H(D_x u^\varepsilon, x) = \underbrace{\varepsilon \Delta_x u^\varepsilon}$$

$$\Delta_x u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

"viscosità artificiale"
" matematica

HJ_ε hanno soluzioni $u^\varepsilon \in C^2$ e

mi aspetto che le sol. "fisicamente corrette" di HJ sia $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon$

Il meglio che si riesca a provare su u^ε è EQUILIMITATEZZA e EQUICONTINUITA'.

Teor. ASCOLI-ARZELA' $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_j \to 0$ t.c. $u^{\varepsilon_j} \to u$ loc. uniformemente.

Supponiamo che u^ε sol. di (HJ_ε) $\exists$

e che $u^{\varepsilon_j} \to u$ loc. unif.

OSS IMPORTANTE Pr... $u \in C^2$

OSS IMPORTANTE   Prendo $\varphi \in C^2$

$u^\varepsilon - \varphi$ ha un max loc. in $(\bar{x}, \bar{t})$, $\bar{t} > 0$
(MIN)

$u^\varepsilon_t = \varphi_t$ in $(\bar{x}, \bar{t})$, $D_x u^\varepsilon = D_x \varphi$, $D^2_x (u^\varepsilon - \varphi) \leq 0$

$$\Delta_x u^\varepsilon \leq \Delta_x \varphi \quad (\geq)$$

$$u^\varepsilon_t + H(D_x u^\varepsilon, x) = \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon$$

$$\varphi_t + H(D_x \varphi, x) \leq \varepsilon \Delta_x \varphi \quad \text{in } (\bar{x}, \bar{t})$$
$(\geq)$

Questo motiva la

DEF. $u \in C(\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[)$ è sol. di viscosità di (HJ) $u_t + H(D_x u, x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ se

$\forall \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[)$, $\forall (\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ di MAX loc. di $u - \varphi$

$$\varphi_t + H(D_x \varphi, x) \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} \leq 0$$

e $\forall (\bar{x}, \bar{t})$, $\bar{t} > 0$ di MIN. loc di $u - \varphi$

$$\varphi_t + H(D_x \varphi, x) \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} \geq 0.$$

Prop. $H \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $u^\varepsilon \in C^2$ risolve (HJ_ε)

$u^{\varepsilon_j} \to u$ loc. unif. $\Rightarrow$ u è sol. visco. di (HJ)

Dim. Faccio "$\leq$" ("$\geq$" SIMMETRICO!)

Caso 1 $u - \varphi$ ha massimo $\overset{\text{LOC}}{\text{STRETTO}}$ in $(\bar{x}, \bar{t})$
(FORTE)

(cioè $(u-\varphi)(\bar{x},\bar{t}) > (u-\varphi)(x,t)$ $\forall (x,t) \in B_r(\bar{x},\bar{t}) \setminus \{(\bar{x},\bar{t})\}$)

Lemma $\forall\, 0 < \varepsilon_j \leq \bar{\varepsilon}$ $\exists (x_j, t_j)$:

$$\begin{cases} u^{\varepsilon_j} - \varphi \text{ ha max. loc. in } (x_j, t_j) \\ (x_j, t_j) \to (\bar{x}, \bar{t}). \end{cases}$$

Dim. DOPO.

Allora in (x_j, t_j) $u^{\varepsilon_j}_t = \varphi_t$, $\nabla_x u^{\varepsilon_j} = \nabla_x \varphi$

e $\Delta u^{\varepsilon_j} \leq \Delta \varphi$

$$0 = u^{\varepsilon_j}_t + H(D_x u^{\varepsilon_j}, x) - \varepsilon \Delta u^{\varepsilon_j} \Big|_{(x_j, t_j)}$$

$$\geq \varphi_t + H(D_x \varphi, x) - \varepsilon \Delta \varphi \Big\|_{(x_j, t_j)}$$

$j \to +\infty$

$$\varphi_t(\bar{x},\bar{t}) + H(D\varphi(\bar{x},\bar{t}), \bar{x}) \qquad 0$$

$$\underbrace{\varphi_t(\bar{x},\bar{t}) + H(D\varphi(\bar{x},\bar{t}),\bar{x})}_{\Rightarrow} \;\downarrow 0$$

$$\Rightarrow \qquad \leq 0 \qquad // \text{Caso 1.}$$

<u>Caso 2</u> $u-\varphi$ max loc. in $(\bar{x},\bar{t})$ (NON NEC. STRETTO)

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) + |x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|^2 > \varphi(x,t)$$

se $x \neq \bar{x}$, $t \neq \bar{t}$

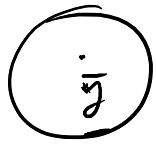
$\Rightarrow u - \tilde{\varphi}$ ha MAX STRETTO in $(\bar{x},\bar{t})$.

$$\text{Caso 1} \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{\varphi_t}}{\tilde{\varphi}_t} + H(\underset{\overset{\parallel}{D_x\varphi}}{D_x\tilde{\varphi}}, x)\Big|_{(\bar{x},\bar{t})} \leq 0$$

// Caso 2.

<u>Dim. Lemma</u> $f_j := u^{\varepsilon_j} - \varphi \to f := u - \varphi$

$(\bar{x},\bar{t}) =: \bar{y}$ max stretto di f.



$\exists r > 0$
$\exists \delta > 0$

$$\max_{\partial B_r(\bar{y})} f < f(\bar{y}) - \delta$$

$f_j \to f$ loc. uni f.

$j \geq J$

$$\max_{\partial B_r(\bar{y})} f^j < f(\bar{y}) - \frac{\delta}{3} < f(\bar{y}) - \frac{2\delta}{3} < f^j(\bar{y})$$

$\Rightarrow \exists\, y^\delta \in B_r(\xi)$ di max per f^δ

Ripeto l'argomento con $r_j \to 0$ e produco

$y^j \to \bar{y}$, $y^j \in B_r(\xi)$ di max loc. per f^j. ∎

Lezione 28.3.14

Come ulteriore motivazione alla def. di sol. visco. proviamo

Teor. $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (C), (S), g Lip

$$\Rightarrow u = u_{HL}(x,t) := \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ tH^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

è sol. visco di $u_t + H(D_x u) = 0$

in $\Omega := \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$.

Dim "$\leq$" $u(x,t) \overset{(PPD)}{=} \min_y \left\{ (t-s) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}$

$\forall t > s$, Fisso $q \in \mathbb{R}^n$ $y = x - hq$ $t - s = h > 0$

$$u(x,t) - u(x-hq, t-h) \leq h L\left(\frac{\cancel{h}q}{\cancel{h}}\right)$$

Fisso $\varphi \in C^1$: $u - \varphi$ ha max (loc) in (x,t)

$(u-\varphi)(x,t) \geq (u-\varphi)(x-hq, t-h)$ h piccolo

$u(x,t) - u(x-hq, t-h) \geq \varphi(x,t) - \varphi(x-hq, t-h)$

$\Rightarrow \dfrac{\varphi(x,t) - \varphi(x-hq, t-h)}{h} \leq L(q)$

$h \searrow 0$

$$D\varphi \cdot q + \varphi_t - L(q) \leq 0$$

$\sup_q$

$$\varphi_t + H(D\varphi)\Big|_{(x,t)} \leq 0$$

// $\frac{1}{2}$

"$\geq$" Ora $\varphi \in C^1$: $u - \varphi$ ha <u>min</u> in (x,t)

Fisso z : $u(x,t) = tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z)$

Prendo $y = x - \frac{h}{t}(x-z)$

$u(y,s) \leq sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)$ $\quad s = t-h$, $h = t-s > 0$

Come nella dim. già fatta

$$\frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}$$

$$u(x,t) - u(y,s) \geq (t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

$(u-\varphi)(x,t) \leq (u-\varphi)(y,s)$ h piccolo

$u(x,t) - u(y,s) \leq \varphi(x,t) - \varphi(y,s)$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x,t)-\varphi(y,s)}{t-s} \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

Come nella dim. per u diff.le, $h = t-s \to 0$

$$\varphi_t + D\varphi \cdot \frac{x-z}{t} - L\left(\frac{x-z}{t}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi_t + H(D\varphi)\Big|_{(x,t)} \geq 0 \ . \ \blacksquare$$

Proprietà delle sol. viscosità

Contesto un po' più generale:

$$(E) \qquad F(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ aperto}$$

$F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ CONT.

Def. (i) $u \in USC(\Omega)$ è visco-sottosol di (E) se $\forall \varphi \in C^1(\Omega)$: $u - \varphi$ max loc. in $\bar{x}$

$$F(D\varphi(\bar{x}), u(\bar{x}), \bar{x}) \leq 0$$

(ii) $u \in LSC(\Omega)$ è visco-soprasol. di (E) se $\forall \varphi \in C^1(\Omega)$: $u - \varphi$ MIN. loc. in $\tilde{x}$

$$F(D\varphi(\tilde{x}), u(\tilde{x}), \tilde{x}) \geq 0$$

(iii) u sol. viscosa è sotto e SOPRASOL.
(Soluz. sopra "viscosa")

Richiamo a) $u \in USC(\Omega)$ se $\forall x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} u(x)$$

b) $u \in LSC(\Omega)$ se $\forall x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} u(x).$$

COERENZA di V.-SOL. con le SOL. CLASS.
(CONSISTENCY) ([Evans] Cap. 10 oppure
M.B. – I. Capuzzo Dolcetta .. Birkhäuser 1997)

Prop. (Coerenza 1) (i) $u \in C(\Omega)$ ha derivate parziali in Ω e risolve (E) ovunque (in senso classico) $\Rightarrow$ u è sol. visc.

(ii) u sol. visc. di (E) è $u \in C^1(\Omega)$
$\Rightarrow$ u risolve (E) ovunque in senso classico.

Dim. (i) "$\leq$" $\varphi \in C^1(\Omega)$, $\bar{x} \in \operatorname{argmax}(u-\varphi)$

$\Rightarrow Du(\cancel{\bar{x}}) = D\phi(\bar{x})$, $F(\underset{\underset{D\phi(\bar{x})}{\parallel}}{Du(\bar{x})}, u(\bar{x}), \bar{x}) = 0$

$= 0 \Rightarrow \leq 0$ // $\frac{1}{2}$

"$\geq$" IDEM....

(ii) $u \in C^1$ e visco. sol. : posso prendere $\varphi = u$: in ogni punto $u - \varphi$ ha sia max che min $F(\underset{\underset{Du(x)}{\parallel}}{D\phi(x)}, u(x), x) \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow F(Du(x), u(x), x) = 0$. $\blacksquare$

Voglio dim. che, se u è sol. visco. e u diff.le in $\bar{x} \in \Omega \Rightarrow F(Du(\bar{x}), u(\bar{x}), \bar{x}) = 0$

<u>Richiamo</u>: u diff.le in $\bar{x} \in \Omega$ se $\exists p \in \mathbb{R}^N$:

$$u(x) = u(\bar{x}) + p \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|) \quad x \to \bar{x}$$

<u>Def.</u> $u \in USC(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}^N$ è in $D^+u(\bar{x})$ se $u(x) \leq u(\bar{x}) + p \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|) \quad x \to \bar{x}$;

$u \in LSC(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}^N$ è in $D^-u(\bar{x})$ se

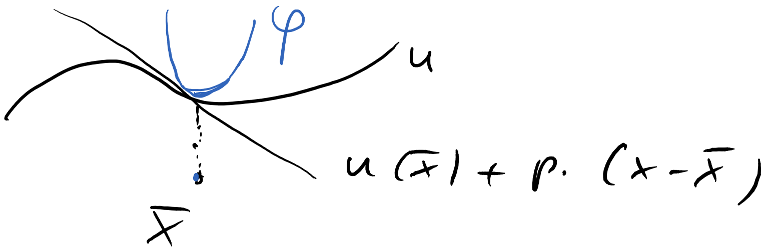
$u(x) \geq u(\bar{x}) + p\cdot(x-\bar{x}) + o(|x-\bar{x}|) \quad x \to \bar{x}$

N.B. u diff.le in $\bar{x} \iff D^+u(\bar{x}) \cap D^-u(\bar{x}) \neq \emptyset$

e in tal caso $Du(\bar{x}) \in D^+u(\bar{x}) \cap D^-u(\bar{x})$.

Lemma i) $p \in D^+u(\bar{x}) \iff \exists\, \varphi \in C^1(\Omega)$:

$u - \varphi$ ha max (loc) in $\bar{x}$, $D\varphi(\bar{x}) = p$ (e $u(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$)



($u(x) - \varphi(x) \leq u(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u \leq \varphi$
"φ tocca u da sopra")

ii) $p \in D^-u(\bar{x}) \iff \exists\, \varphi \in C^1(\Omega)$:

$u - \varphi$ min in $\bar{x}$, $D\varphi(\bar{x}) = p$, $(u(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}))$

Dim i) "$\Rightarrow$" elementare ma non banale

v. Cap. II [BCD] o Cap 10 [Ev].

"$\Leftarrow$" Ip. $u \leq \varphi \quad x \approx \bar{x}$, $\varphi \in C^1$

$$u(x) - u(\bar{x}) \leq \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = \underbrace{D\varphi(\bar{x})}_{p} \cdot (x - \bar{x}) + o(|x-\bar{x}|) \quad x \to \bar{x}$$

$$u(x) \leq u(\bar{x}) + p\cdot(x-\bar{x}) + o(|x-\bar{x}|).$$

(ii) $p \in D^- u(\bar{x}) \iff -p \in D^+(-u)(\bar{x})$

verif. della def.

+(i) $\Rightarrow$ conclusione (Ex. Pc.).

N.B. Grazie al Lemma

$u \in USC(\Omega)$ è sottosol. v. di (E) $\iff$

$$F(p, u(x), x) \leq 0 \quad \forall p \in D^+ u(x)$$

$u \in LSC(\Omega)$ è soprasol. di (E) $\iff$

$$F(p, u(x), x) \geq 0 \quad \forall p \in D^- u(x)$$

$\blacksquare$

Cor. (Coerenza 2) Se u è visco sol. di (E) e u è diff.le in $\bar{x} \Rightarrow F(Du(\bar{x}), u(\bar{x}), \bar{x}) = 0$

Dim. $\underbrace{Du(\bar{x})}_{=\bar{p}} \in D^+ u(\bar{x}) \cap D^- u(\bar{x})$

u sottosol. $\Rightarrow$ $F(\bar{p}, u(\bar{x}), \bar{x}) \leq 0$

u soprasol. $\Rightarrow$ $F(\bar{p}, u(\bar{x}), \bar{x}) \geq 0$

$\Rightarrow$ $F(\bar{p}, u(\bar{x}), \bar{x}) = 0$. $\blacksquare$

——— o ———

STABILITA' delle sol. visco. risp.

alla conv. uniforme.

<u>Prop.</u> $u_n \in C(\Omega)$ viscosol. di

$$F_n(Du_n, u_n, x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$F_n \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega)$, e

$$u_n \to u \quad \text{loc. unif. in } \Omega$$
$$F_n \to F \quad \text{loc. unif. in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$$

$\Rightarrow$ u è viscosol. di $F(Du, u, x) = 0$

<u>Oss.</u> Anche se $F_n = F$ $u_n \in C^1$ sol. classica di $F(Du_n, u_n, x) = 0$ $u_n \xrightarrow{\text{unif.}} u$
$\not\Rightarrow$ $F(Du, u, x) = 0$

<u>Dim</u> "$\leq$" Basta provare che $\forall \varphi \in C^1$
$\forall \bar{x} \in \operatorname{argmax}(u - \varphi)$, p.to di MAX STRETTO
(non è restrittivo, v. ieri),

$$F(D\varphi(\bar{x}), u(\bar{x}), \bar{x}) \leq 0.$$

Da ieri so che $u_n - \varphi$ ha max loc.
in x_n, $x_n \to \bar{x}$. u_n sottosol. di $F_n \leq 0$

$$F_n(D\varphi(x_n), u_n(x_n), x_n) \leq 0$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad n \to \infty$

$$F\left(D\varphi(\bar{x}),\ u(\bar{x}),\ \bar{x} \right) \leq 0. \quad \blacksquare$$

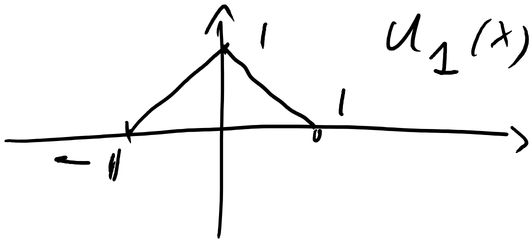
$n \to 0$

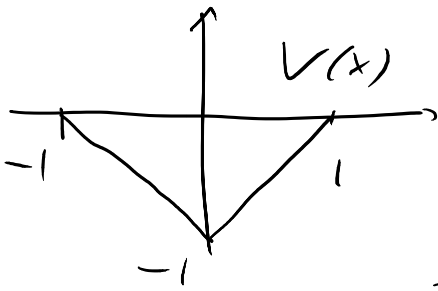
ESEMPIO IMPORTANTE

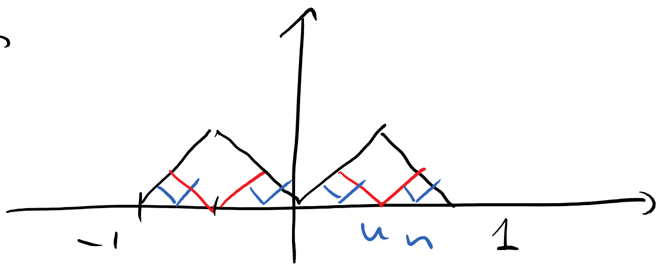
$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 & \text{in }]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Eq. iconale in $N = 1$

" $u' = \pm 1$ "







u_n sono sol. q.o. $\qquad u_n \to 0$ unif. in $[-1, 1]$

$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{u}$

$u \equiv 0$ NON soddisfa $|u'| - 1 = 0$ in NESSUN punto.

Q: Quale delle sol. costruite è sol. visco.?

Comincio con $u_1(x) = 1 - |x|$ e

$V(x) = |x| - 1$. Devo calcolare D^+ e D^-

in $x = 0$.