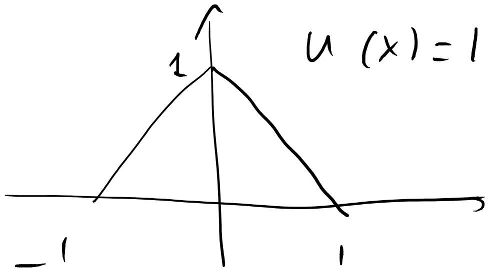
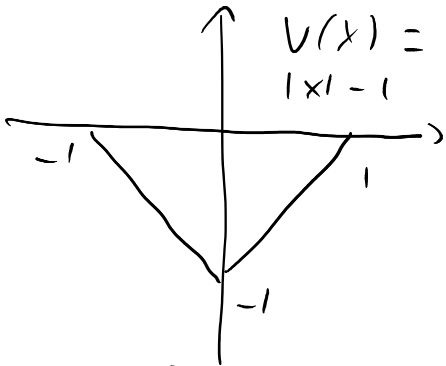
Lezione 3.4.14

giovedì 3 aprile 2014 09.21

$$(1)\quad \begin{cases} |u'| - 1 = 0 & \text{in }]-1,1[\\ u(-1) = 0 = u(1) \end{cases}$$



$u(x) = 1 - |x|$

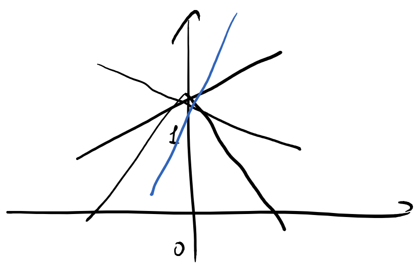


Q: sono sol visco di (1)?

Devo controllare $x = 0$. Cerco

$D^+u(0) = ?$ $\qquad D^-u(0) = ?$

$p \in D^+u(0)$ se $u(x) \le u(0) + px + o(x)$, $x \to 0$
$$\quad \overset{\shortparallel}{1}$$



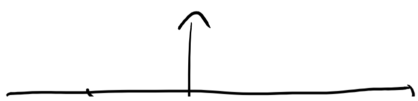
$D^+u(0) = [-1, 1]$

$D^-u(0) = \emptyset$

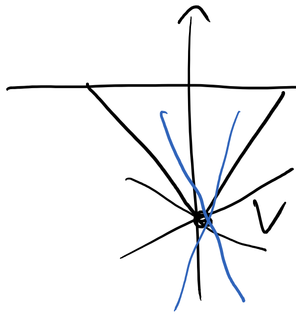
$\Rightarrow u$ è soprasol.

sottosol? $\quad |p| - 1 \overset{?}{\le} 0 \quad \forall p \in [-1, 1]$

Sì $\Rightarrow u = 1 - |x|$ è visco sol. di (1)



$D^+u(0) = \emptyset$



$V = |x| - 1$

$D^+ v(0) = \emptyset$

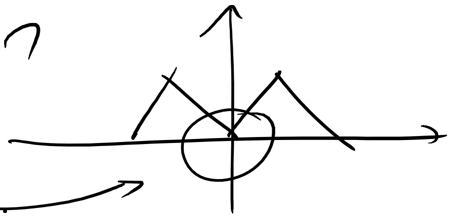
$D^- v(0) = [-1, 1]$

$\Rightarrow$ v sottosol.

soprasol.? $\quad |p| - 1 \overset{?}{\geq} 0 \quad \forall p \in [-1, 1]$

NO $\quad$ V **non** è sol. visco di (1)

Le altre sol q.o.?



non è soprasol.

Tra le sol esplicite mostrate solo

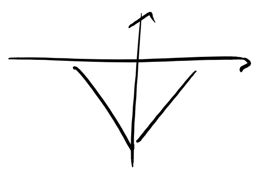
$u = 1 - |x|$ è sol. visco.

Vedremo che in effetti u è l'unica del probl. di Dirichlet.

OSS.1 $\quad u(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$

$\Omega =]-1, 1[$

OSS.2 $\quad v(x) = |x| - 1$



è visco sol di $\quad 1 - |v'| = 0$

sottosol. banale, $\quad$ soprasol.?

$D^-v(0)=[-1,1]$, $1-|p|\geq 0 \quad \forall p\in D^-v(0)$

N.B. $|u'|-1=0$ e $1-|u'|=0$

non hanno le stesse soluzioni!

OSS. 3 u sottosol. di $F(Du,u,x)=0$

$\Leftrightarrow$ $v=-u$ è soprasol. di

$$-F(-Dv,-v,x)=0$$

Dim Es. PC.

OSS 4. Ulteriore motivazione per la non equivalenza tra $F(\;)=0$ e $-F=0$

le sol. visc. sono "legate" al metodo della vanishing visco., che per eq. staz. è $F(Du^\varepsilon,u^\varepsilon,x)=\varepsilon\Delta u^\varepsilon$ (E^1_ε)

L'appross. visco di $-F(\;)=0$ è

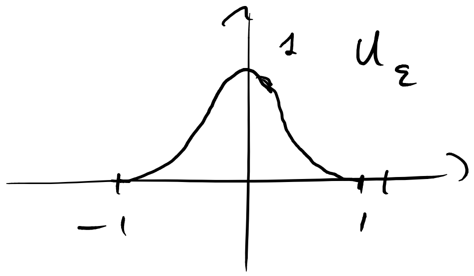
$$-F(Dv^\varepsilon,v^\varepsilon,x)=\varepsilon\Delta v^\varepsilon \quad (E^2_\varepsilon)$$

(E^1_ε) e (E^2_ε) non sono equivalenti!

Es. Risolvere $\begin{cases}|u_\varepsilon'|-1=\varepsilon u_\varepsilon'' & \text{in }]-1,1[\\ u_\varepsilon(-1)=0=u_\varepsilon(1)\end{cases}$

e mostrare che $u_\varepsilon \to u(x) = 1-|x|$

per $\varepsilon \to 0$



Risolvere anche $\begin{cases} 1-|v_\varepsilon'| = \varepsilon v_\varepsilon'' \\ \text{B.C.} \end{cases}$

e vedere che $v_\varepsilon \to |x|-1$ per $\varepsilon \to 0$

—— o ——

Principi di confronto

PRIMO PROBLEMA (modello)

(SE) $\quad u + H(Du, x) = 0 \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ap. limitato.

Voglio u sottosol., v soprasol. di (SE) e $u \le v$ su $\partial\Omega \Rightarrow u \le v$ in Ω.

Se u e v sono $\in C^1(\Omega)$ e $C(\bar\Omega)$ la dim. è:

$\Phi(x) = u(x) - v(x)$ ha max in $\bar x$

Caso 1 $\quad \bar x \in \partial\Omega \Rightarrow \Phi(\bar x) \le 0$

$\Rightarrow \max(u-v) \le 0$

Caso 2 $\bar{x} \in \Omega \Rightarrow Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x}) =: \bar{p}$

$$u(\bar{x}) + \cancel{H(\bar{p}, \bar{x})} \leq 0 \leq v(\bar{x}) + \cancel{H(\bar{p}, \bar{x})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u(\bar{x}) - v(\bar{x})}_{= \max(u-v)} \leq 0 \qquad \blacksquare$$

Teor (Princ. del confronto per (SE), Crandall - Lions - Evans ~1983)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $u, v \in C(\bar{\Omega})$

u visco. sottosol. di (SE)

v " soprasol. (SE)

$u \leq v$ su $\partial\Omega$. $H: \mathbb{R}^n \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ CONT.

e

(RH) $|H(p,x) - H(p,y)| \leq \omega\big(|x-y|(1+|p|)\big)$

con $\omega: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, cont. in 0, e $\omega(0)=0$

Allora $u \leq v$ in $\bar{\Omega}$.

OSS (RH) è condiz. di UNIF. CONT.TA' di H in x "unif. in p". Esempi:

- $H(p,x) = H_1(p) + f(x)$, $H_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\bar{\Omega})$

OSS Modulo di cont.tà delle f. unif.

$\overline{\text{co}}$A. : $f \in UC(K) \iff \exists\ \omega_f : [0,+\infty[\to [0,+\infty)$

$\omega_f(r) \to 0$ as $r \to 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x-y|) \quad \forall x, y \in K.$$

Es pc.

- $H(p,x) = g(x)|p| + f(x)$ $\quad f \in C(\bar\Omega)$, $g \in Lip(\bar\Omega)$

$$|H(p,x) - H(p,y)| \leq |g(x) - g(y)||p| + |f(x) - f(y)|$$

$$\leq L|x-y||p| + \omega_f(|x-y|)$$

Cor (Unicità per Probl. di Dir.) (Idee in DT.) Esiste al più una sol. visco $\in C(\bar\Omega)$ di

$$(DP) \quad \begin{cases} u + H(Du, x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dim. Cor. u, v soluz. $\Rightarrow u = v$ su $\partial\Omega$

Princ. confr. $\begin{cases} u \leq v & \text{in } \Omega. \\ v \leq u \end{cases} \Rightarrow u = v.$ ∎

Dim. Teor Idea (Kružkov): RADDOPPIO le variabili: $\varepsilon > 0$

$$\Phi(x,y) := u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}$$

ha max in $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \bar\Omega \times \bar\Omega$

$$\max_{\bar\Omega}(u-v) = \max_{\bar\Omega}\Phi(x,x) \le \max_{\bar\Omega\times\bar\Omega}\Phi(x,y)$$

$$= \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \le u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$$

Tesi $\liminf_{\varepsilon\to 0+} (u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)) \le 0$.

$$\Phi(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \le \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$$

$$\cancel{u(x_\varepsilon)} - v(x_\varepsilon) \le \cancel{u(x_\varepsilon)} - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \le v(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \quad (D1)$$

$$\Rightarrow |x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 \le 4\varepsilon \sup_{\bar\Omega}|v|$$

$$\Rightarrow |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \to 0 \text{ per } \varepsilon \to 0 \quad (D2)$$

(D1) e $v \in C(\bar\Omega) \Rightarrow$

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \to 0 \text{ per } \varepsilon \to 0 \quad (D3)$$

<u>Caso 1</u> $\exists (x_{\varepsilon_n}, y_{\varepsilon_n}) \in \partial(\bar\Omega \times \bar\Omega)$, $\varepsilon_n \to 0$

<u>Caso 2</u> $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega \times \Omega \quad \forall \varepsilon \in]0, \bar\varepsilon]$

<u>Caso 1</u> o $x_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$ o $y_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$

Se $x_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$

BC

Se $x_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$

B.C.

$$u(x_{\varepsilon_n}) - v(y_{\varepsilon_n}) \le v(x_{\varepsilon_n}) - v(y_{\varepsilon_n}) \longrightarrow 0$$

perché $v \in C(\bar\Omega)$ e per (D2).

Se $y_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$

$$u(x_{\varepsilon_n}) - v(y_{\varepsilon_n}) \le u(x_{\varepsilon_n}) - u(y_{\varepsilon_n}) \longrightarrow 0$$

perché $u \in C(\bar\Omega)$. $\square$ C.1.

<u>Caso 2</u> $\quad \varphi(x) := v(y_\varepsilon) + \frac{|x-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \in C^\infty$

e $u(x) - \varphi(x)$ ha max in $x = x_\varepsilon$

$$\psi(y) := u(x_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{2\varepsilon} \in C^\infty$$

$-v + \psi$ ha max in $y = y_\varepsilon$

$\Rightarrow v - \psi$ ha min in $y = y_\varepsilon$

$$D\varphi(x_\varepsilon) = \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} = D\psi(y_\varepsilon)$$

u v-sottosol., v soprasol viscos. $\Rightarrow$

$$u(x_\varepsilon) + H\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, x_\varepsilon\right) \le 0 \le v(y_\varepsilon) + H\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, y_\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \le H\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, y_\varepsilon\right) - H\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, x_\varepsilon\right)$$

$$\le \omega\left(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|\left(1+\left|\frac{x_\varepsilon-y_\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)\right)$$

$$= \omega\Big(\underbrace{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon}}_{\downarrow\, 0}\Big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 . \quad \blacksquare$$

Applicazione all'equazione ICONALE.

Teor. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato $\Rightarrow$ $u(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ è l'unica sol. visc. di:

$$(DP)\quad \begin{cases} |Du| - 1 = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega . \end{cases}$$

Dim: domani. Ci serve:

Prop. $u \in C(\Omega)$ v. sol. di $F(Du, u, x) = 0$ in Ω. $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi'(t) > 0$ $\forall t$. Allora $v = \Phi(u)$ è v. sol. di

$$F(\Psi'(v)Dv, \Psi(v), x) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

per $\Psi = \Phi^{-1}$

Oss. $u \in C^1$: $u = \Psi(v)$, $Du = \Psi'(v)Dv$

Dim. solo "$\le$" Fisso $x \in \Omega$, $p \in D^+v(x)$

Tesi: $F(\Psi'(v)p, \Psi(v), x) \le 0$

e basta mostrare che $\psi'(v(x))p \in D^+u(x)$.

Def. di $D^+v(x) \Rightarrow v(y) \le v(x) + p\cdot(y-x) + \underset{y\to x}{o(|y-x|)}$

$\psi(v(y)) \le \psi(\qquad)$

$\overset{\shortparallel}{u(y)} \quad = \psi(v(x)) + \psi'(v(x))\left[p\cdot(y-x) + o(y-x)\right]$

$\qquad + o(|p\cdot(y-x) + o(y-x)|)$

$= u(x) + \psi'(u(x))p\cdot(y-\cancel{x}) + \underset{y\to x}{o(|y-x|)}$

$\Rightarrow \psi'(v(x))p \in D^+u(x)$. ∎

Lezione 4.4.14

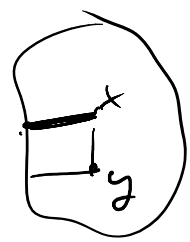
Dim. Teo. ($\exists!$ sol (DP)) $u(x) = dist(x, \partial\Omega)$

$:= \overset{\min}{\cancel{\inf}}\{|y-x| : y \in \partial\Omega\}$

Passo 1 u è sottosol. : $\varphi \in C^1$, $x \in \Omega$.

$(u-\varphi)(x) \ge (u-\varphi)(y) \quad \forall y \in \Omega$

$u(x) - u(y) \ge \varphi(x) - \varphi(y)$



$u(x) \le |x-y| + u(y)$

$|x-y| \ge u(x) - u(y) \ge \varphi(x) - \varphi(y)$

$$= D\varphi(x)\cdot(x-y) + o(|x-y|), \quad y\to x$$

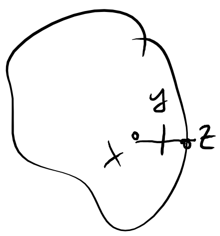
$$q = \frac{x-y}{|x-y|} \qquad \Rightarrow \quad 1 \geq D\varphi(x)\cdot q + o(1) \quad y\to x$$

$$1 \geq D\varphi(x)\cdot q \qquad \forall q \in \mathbb{R}^N, \ |q|=1$$

$$\sup_{|q|=1} \qquad 1 \geq |D\varphi(x)| \quad \Rightarrow u \text{ visco subsol.}$$

Passo 2 $\quad u$ SUPER SOL. $x\in\Omega$, $\varphi\in C^1$

$u-\varphi$ min in x $\Rightarrow$ $u(x)-u(y) \leq \varphi(x)-\varphi(y)$ $\forall y$



Prendo $z\in\partial\Omega$: $|x-z| = u(x)$

$$y = x + t\,\frac{z-x}{|z-x|} \qquad 0\leq t\leq |z-x|$$

$$u(x) = |x-y| + |y-z| \geq |x-y| + u(y)$$

$$|x-y| \leq u(x)-u(y) \leq \varphi(x)-\varphi(y)$$

$$= \nabla\varphi(x)\cdot(x-y) + o(|x-y|) \quad y\to x$$

$$1 \leq \nabla\varphi(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|} + o(1) \qquad y\to x$$

$$1 \leq |D\varphi(x)| \qquad \Rightarrow u \text{ è SUPERSOL.}$$

$\square$ P2.

P. 3 $\quad u(x) = dist(x,\partial\Omega) = 0 \quad$ se $x\in\partial\Omega$.

Es. Pc $u(x) \in C(\bar\Omega)$, è Lip. con cost. 1.

$\Rightarrow u \in C(\bar\Omega)$ visc sol. di (DP).

P.G Kružkov transform. $\Phi(r) = 1 - e^{-r}$ < 1

$\Phi \in C^\infty$, $\Psi := \Phi^{-1} :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$

$1 - e^{-r} = y \qquad e^{-r} = 1 - y \qquad r = -\log(1-y)$

$\Psi(t) = -\log(1-t)$, $\Psi'(t) = \dfrac{1}{1-t} > 0$.

Supp. v, w cont. e, risp., sub e supers. di $|Du| - 1 = 0$, $v \le w$ $\partial\Omega$

$V = \Phi(v)$, $W = \Phi(w)$ $\Rightarrow V \le 0 \le W$, $\partial\Omega$

Prop. di ieri: V, W sono sotto e supers.

$$\left|\frac{DV}{1-V}\right| - 1 = 0 \underset{V<1}{\Longleftrightarrow} \frac{|DV|}{1-V} - 1 = 0$$

$$\underset{1-V>0}{\Longleftrightarrow} \quad |DV| + V - 1 = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

termine di ord 0: BUONO per il Princ. Conf.

$\Rightarrow V \le W$ in $\bar\Omega$ $\Rightarrow$ $v \le w$ in $\bar\Omega$

$\Rightarrow$ Il Princ. del confronto vale anche per il probl. di Dir. (DP) $\Rightarrow$ la viscosol. di (DP) è UNICA. ∎

OSS. Stessa dim. dà il Princ. di Confr.

per $|Du| - n(x) = 0$ se $n(x) > 0$ in Ω.

Se $n(x_0) = 0$, $x_0 \in \Omega$, $n(x) > 0$ $\forall x \neq x_0$

ci sono es. di NON-UNICITÀ anche di sol. classiche (v. p. es. [BCD]).

Principio del Confronto x Probl. di Cauchy.

Teor. $u, v : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ Lip e limitate, risp. sub- e supersol. (v.) di $u_t + H(D_x u) = 0$ in $\mathbb{R}^n \times]0,T[$, $H \in C(\mathbb{R}^n)$, $u(x,0) \leq v(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $u \leq v$ $\forall x, t$.

Cor. H conv. e superl., $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip. e limitata, $u(x,t) := \begin{cases} \min_y \left\{ tH^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\} & t > 0 \\ g(x) & t = 0 \end{cases}$

(la form. di Hopf-Lax). Allora u è l'unica sol. visco di (CP) $\begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 & \mathbb{R}^n \times]0,T[\end{cases}$

$u = g \quad t = 0$

tra le f. Lip. e limitate in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, ($\forall\ T > 0$).

<u>Dim.</u> di una variante del Teor.:

u, v Lip. e limitate in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, sub. e supersol. in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \Rightarrow u \le v$.

<u>OSS.</u> perché le f di H-L sia limitata in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ (e non solo in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$) occorrono ipotesi in più ....

<u>Passo 0</u> $\cdot\ f(x) := \log(1 + |x|^2) \qquad f_{x_i} = \dfrac{2x_i}{1 + |x|^2}$

$|Df| \le 2$; $\varepsilon > 0$, $\beta, \eta > 0$:

$$\Phi(x, y, t, s) := u(x,t) - v(y,s) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} - \frac{|t-s|^2}{2\varepsilon}$$

$$- \beta\left(f(x) + f(y)\right) - \eta\,(t+s)$$

$\Phi \to -\infty$ per $|x|$ o $|y|$ o t o $s \to +\infty$

<u>P.1</u> Per ass. $\exists\ (x_0, t_0)$, $\delta > 0$:

$$(u - v)(x_0, t_0) = \delta > 0$$

$$\Phi(x_0, x_0, t_0, t_0) = \delta - 2\beta f(x_0) - 2\eta t_0 > \frac{\delta}{2}$$

per $\beta, \eta \le \bar{\beta}$ $\quad (\bar{\beta} > 0)$

P.2 $\exists\ (\bar x, \bar y, \bar t, \bar s)$ che dip. da ε, β, η

p.to di max di Φ, $\Phi(\bar x, \bar y, \bar t, \bar s) > \frac{\delta}{2} > 0$ $\otimes$

P.3 $\otimes \Rightarrow \dfrac{|\bar x - \bar y|^2}{2\varepsilon} + \dfrac{|\bar t - \bar s|^2}{2\varepsilon} + \beta(f(\bar x) + f(\bar y)) + \eta(\bar t + \bar s)$

$$\leq \sup u + \sup(-v) =: C$$

$\Rightarrow |\bar x - \bar y| \leq \sqrt{2\varepsilon C}$, $|\bar t - \bar s| \leq \sqrt{2\varepsilon C}$

P.4 $\Phi(\bar x, \bar x, \bar t, \bar t) + \Phi(\bar y, \bar y, \bar s, \bar s) \leq 2\,\Phi(\bar x, \bar y, \bar t, \bar s)$

$$\cancel{u(\bar x, \bar t)} - v(\bar x, \bar t) - \cancel{2\beta f(\bar x)} - \cancel{2\eta \bar t} + u(\bar y, \bar s) - \cancel{v(\bar y, \bar s)}$$

$$- \cancel{2\beta(f(\bar y))} - \cancel{2\eta \bar s} \leq \cancel{2}u(\bar x, \bar t) - \cancel{2}v(\bar y, \bar s)$$

$$- \frac{|\bar x - \bar y|^2}{\varepsilon} - \frac{|\bar t - \bar s|^2}{\varepsilon} - \cancel{2\beta(f(\bar x) + f(\bar y))}$$

$$\cancel{-2\eta(\bar t + \bar s)}$$

$$\Rightarrow \frac{|\bar x - \bar y|^2}{\varepsilon} + \frac{|\bar t - \bar s|^2}{\varepsilon} \leq u(\bar x, \bar t) - u(\bar y, \bar s)$$

$$+ v(\bar x, \bar t) - v(\bar y, \bar s)$$

$$\leq 2L(|\bar x - \bar y| + |\bar t - \bar s|) \quad \begin{pmatrix} u, v \\ \text{Lip. !} \end{pmatrix}$$

Uso $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$\frac{(|\bar x - \bar y| + |\bar t - \bar s|)^2}{2\varepsilon} \leq$$

$$\frac{|\bar x - \bar y| + |\bar t - \bar s|}{2\varepsilon} \leq 2L \Rightarrow \frac{|\bar x - \bar y|}{\varepsilon} \leq 4L \quad (5)$$

P.5 Sup. $\bar{t}=0$

$$\underbrace{u(\bar{x},0)-v(\bar{y},\bar{s})}_{} \geq \Phi(\bar{x},\bar{y},0,\bar{s}) \geq \frac{\delta}{2}>0$$

Cond. In. $\leq v(\bar{x},0)-v(\bar{y},\bar{s}) \longrightarrow 0$
$\varepsilon \to 0$ $\otimes$

Caso $\bar{s}=0$: analogo (scrivetelo!)

P.6 $\bar{t},\bar{s}>0$: uso l'equazione!

$$\varphi(x,t) := \frac{|x-\bar{y}|^2}{2\varepsilon}+\frac{|t-\bar{s}|^2}{2\varepsilon}+\beta f(x)+\eta t \quad \in C^\infty$$

e $u-\varphi$ ha max in $(\bar{x},\bar{t})$

$$D_x\varphi(\bar{x},\bar{t}) = \underbrace{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\varepsilon}}_{=p_\varepsilon}+\beta Df(\bar{x}) \qquad \varphi_t(\bar{x},\bar{t})=\frac{\bar{t}-\bar{s}}{\varepsilon}+\eta$$

$$\psi(y,s) = -\frac{|\bar{x}-y|^2}{2\varepsilon}-\frac{|\bar{t}-s|^2}{2\varepsilon}-\beta f(y)-\eta s$$

$-v+\psi$ ha max in $(\bar{y},\bar{s})$

$\Rightarrow$ $v-\psi$ ha min in $(\bar{y},\bar{s})$

$$D_y\psi(\bar{y},\bar{s}) = \underbrace{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\varepsilon}}_{=p_\varepsilon}-\beta Df(\bar{y}), \quad \psi_s(\bar{y},\bar{s}) = \frac{\bar{t}-\bar{s}}{\varepsilon}-\eta$$

P.7 Uso le def di visco sub e supersol.

$$\varphi_t+H(D_x\varphi)\Big|_{(\bar{x},\bar{t})} \leq 0 \leq \psi_t+H(D\psi)\Big|_{(\bar{y},\bar{s})}$$

$\quad t \qquad (\bar{x},\bar{t}) \qquad t \qquad (\bar{y},\bar{s})$

$$\eta + \cancel{\frac{\bar{t}-\bar{s}}{\varepsilon}} + H\big(p_\varepsilon + \beta Df(\bar{x})\big) \le 0 \le \cancel{\frac{\bar{t}-\bar{s}}{\varepsilon}} - \eta + H\big(p_\varepsilon - \beta Df(\bar{y})\big)$$

$$0 < 2\eta \le H\big(p_\varepsilon - \beta Df(\bar{y})\big) - H\big(p_\varepsilon + \beta Df(\bar{x})\big)$$

$$|Df(\bar{y})|, |Df(\bar{x})| \le 2,$$

$$(S) \Rightarrow |p_\varepsilon| \le 4L$$

Sia ω_H il mod. di continuità di $H|_{\bar{B}(0,4L+2)}$

$$0 < 2\eta \le \omega_H\big(\beta\,|Df(\bar{x}) - Df(\bar{y})|\big) < \eta$$

per β abs. piccolo

$\otimes$ e fine $\blacksquare$