EQUAZIONI DIFFERENZIALI

6.3.2014

1° ora: Generalità sul corso, def di PDE, eq. del trasporto, legge di conservazione scalare.

V. L.C. EVANS PDE Chpt. 2.

---

3. HAMILTON-JACOBI

(HJ) $u_t + H(D_x u, x) = 0$ in $V \times]0,T[$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ $H : \mathbb{R}^n \times V \to \mathbb{R}$

FULLY NONLINEAR.

Si presentano in:

- meccanica analitica e

Calcolo delle variazioni

P. es. $H(p,x) = \frac{|p|^2}{2} + V(x)$

N.B. $p \mapsto H(p,x)$ è CONVESSA

- CONTROLLO OTTIMO

$$\dot{x}(t) = f(x(t), a(t))$$

$$u_t + \sup_{a \in A} \{ -D_x u \cdot f(x,a) - \ell(x,a) \} = 0$$

Eq. di H-J-Bellman

$H(p,x)$ convesse in p.

- GIOCHI DIFFERENZIALI a

2 persone a somma 0

$$\dot{x} = f(x, a, b)$$

1° gioc. 2° gioc.

$$u_t + H(D_x u, x) = 0$$

$$H(p,x) = \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} \{-f(x,a,b)\cdot p - \ell(x,a,b)\}$$

N.B. NON È CONVESSA in p.

4. Eq. di H-J stazionarie.

(SHJ) $\quad H(Du, x) = 0$

Eq. iconale dell'ottica geometrica

$$|Du| = n(x) \quad = \text{indice di rifrazione}$$

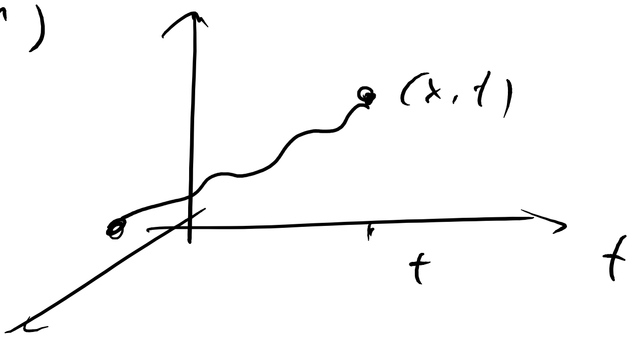
METODO delle CARATTERISTICHE

Motivazione: Eq. lineare del trasporto:

$$\begin{cases} u_t + b(x)\cdot D_x u = 0 & t>0 \\ u(x,0) = g(x) & \forall x\in\mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (CP)$$

$U = \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ $\qquad$ $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$b \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$



$u(x(t), t) = \text{cost}$

$\dot{x} = b(x)$ $\qquad$ Supp. $\exists$ globalmente traiettoria $x(t)$.

$$u(x(0), 0) \overset{(\otimes)}{=} u(x(t), t)$$
$$\shortparallel$$
$$g(x(0))$$

Def. $\Phi_t(x_0) = x(t; x_0)$ $\qquad$ $x(0, x_0) = x_0$

Flusso dell'ODE $\dot{x} = b(x)$.

$\exists\ \Phi_t^{-1}(x)$: $(\otimes) \Leftrightarrow g(\Phi_t^{-1}(x)) = u(x, t)$

FATTO di ODE $\quad x \mapsto \Phi_t(x)$ è C^1 ed è DIFFEOM.

$\Rightarrow \Phi_t^{-1} \in C^1$

<u>Definisco</u> $u(x, t) := g(\Phi_t^{-1}(x))$

$u \in C^1$ è cost. su $(x(t), t)$

$\Rightarrow$ risolve (CP)

Es. $b(x) \equiv b$ $\quad \Phi_t(x_0) = x + tb$

$\Phi_t^{-1}(x) = x - tb \qquad u(x,t) = g(x - tb)$

Il metodo delle caratteristiche nel caso generale

$$(1) \quad F(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U \subseteq \mathbb{R}^N$$
$$u = g \quad \text{su } \Gamma \subseteq \partial U$$

Supp. $\exists\, u \in C^2$ sol.

Cerco curve $\underline{X}(s)$ con cui calcolare

$$u(\underline{X}(s)) =: z(s)$$

$$Du(\underline{X}(s)) =: p(s)$$

Cerco sistema di ODE soddisfatto da $(p(s), z(s), \underline{X}(s))$

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(\underline{X}(s))\, \dot{\underline{X}}^j(s)$$

Derivo (1) risp. a x_i

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j} u_{x_i x_j} + F_z u_{x_i} + F_{x_i} = 0 \qquad (2)$$

<u>Supp.</u> $(\star)$ $\quad \dot{\underline{X}}^j(s) = F_{p_j}\big(p(s), z(s), \underline{X}(s)\big)$

cioè $\quad \dot{\underline{X}} = F_p(p, z, \underline{X})$

Valuto (2) su $\underline{X}(s)$ & uso $(\star)$

$$\dot{p}^i = -F_z(p, z, \underline{X})\,p^i - F_{x_i}(p, z, \underline{X})$$

$$\dot{z}(s) = Du(\underline{X}(s)) \cdot \dot{\underline{X}}(s) = p(s) \cdot F_p(p, z, \underline{X})$$

SISTEMA delle ODE CARATTERISTICHE.

$$\begin{cases} \dot{p} = -F_z(p, z, \underline{X})\,p - F_x(p, z, \underline{X}) & N \text{ eq.} \quad (a) \\ \dot{z} = F_p(p, z, \underline{X}) \cdot p & 1 \text{ eq.} \quad (b) \\ \dot{\underline{X}} = F_p(p, z, \underline{X}) & N \text{ eq.} \quad (c) \end{cases}$$

Sol. di (a)(b)(c) si dicono curve

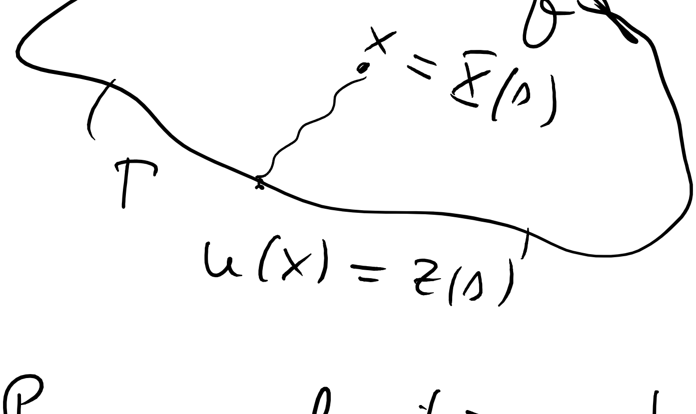
caratteristiche, le $\underline{X}(\cdot)$ sono le CARATT. PROIETTATE

Ho provato

<u>Teor.</u> $F \in C^1$, $u \in C^2$ sol. di (1), se $\underline{X}(\cdot)$ risolve il sist. (c) con $z(s) = u(\underline{X}(s))$ e $p(s) = Du(\underline{X}(s))$ $\Rightarrow$ $p(\cdot)$ risolve (a) e $z(\cdot)$ risolve (b). $\forall s: \underline{X}(s) \in V$.

Lezione 6.3.14 (1 ora)

Idea del metodo delle caratteristiche:



risolvo a) b) c) con opportune condizioni iniziali, poi ricostruisco $u(x) = z(s)$ se $\underline{X}(s) = x$

Per semplicità e brevità mi

restringo a

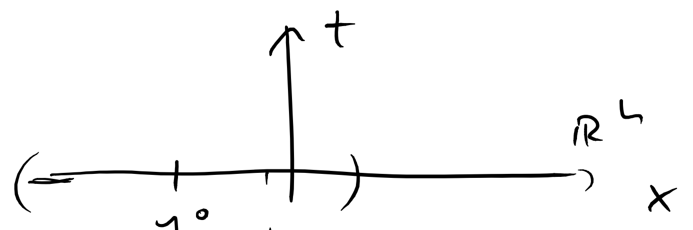
$U = \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$, o $U = \mathbb{R}^n \times]0, T[$

$\Gamma = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ $\quad (x, t) \qquad p = (\bar{p}, p_{n+1})$

$$F(p, u, x, t) = p_{n+1} + G(\bar{p}, u, x, t)$$

$$\begin{cases} u_t + G(D_x u, u, x, t) = 0 & \text{in } U \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Fisso y^0



$y \in B(y^0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$

Condizioni iniziali

(c) $\quad \underline{X}_i(0) = y \qquad i = 1, \dots, n$

$\quad \underline{X}_{n+1}(0) = 0$

(b) $\quad z(0) = g(y)$

Cond. iniz. per (a) $\quad p_i(0) = g_{x_i}(y) \qquad i = 1, \dots, n$

$$\left. \bar{p}(0) = \nabla g(y) \right\} =: q(y)$$

$$p_{n+1}(0) = -G(Dg(y), g(y), y, 0) \quad \Big\} \; y = q(y)$$

Considero il P.d.Cauchy per ODE

$$\begin{cases} a)\ b)\ c) \\ p(0) = q(y) \\ z(0) = g(y) \\ \underline{X}(0) = (y, 0) \end{cases}$$

Supp. $G \in C^3$

$g \in C^3$

$\Rightarrow q \in C^2$

T. ∃ e ! per P.d.C. x ODE ⇒ ∃ ! sol.

loc. $\big(p(y,s), z(y,s), \underline{X}(y,s)\big)$

def. $J \times B(y^0, r)$, $J = (c, d) \ni 0$

e $p(\cdot,\cdot), z(\cdot,\cdot), \underline{X}(\cdot,\cdot) \in C^2$

x Teor. di dip. diff. le dai parametri

x ODE.

<u>OSS.</u> $F_{p_{n+1}} = 1 \qquad \dot{\underline{X}}_{n+1}(s) = 1, \; X_{n+1}(0) = 0$

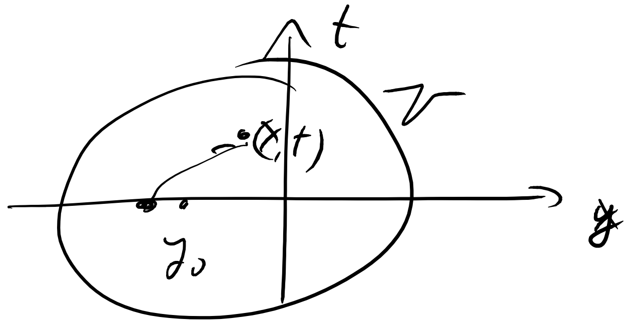
$$X_{n+1}(y,s) = s \qquad \forall y$$
$$= t(y,s)$$

Lemma $\exists\ I =]a,b[\ni 0$, V int. di $(y^0, 0)$ e $W = B(y^0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$: $\forall (x,t) \in V$

$\exists !\ s \in I, y \in W : (x,t) = \underline{X}(y,s)$

i.e. $\underline{X}$ è loc. invertibile, e

l'inversa $(x,t) \longmapsto (y,s)$ è C^2.



Pf. Teo. f. inversa: basta verificare

che $D\underline{X}(y^0, 0)$ ha det $\neq 0$
Jacobiana

$$\underline{X}(y,0) = (y,0) \Rightarrow D_y \underline{X}(y^0, 0) = \begin{pmatrix} I_{n\times n} \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial s}(y^0, 0) = F_p(p(0), z(0), y^0, 0)$$

$$F_{p_{n+1}} = 1 \qquad D\underline{X}(y^0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} & & F_{p_1} \\ & I_n & \vdots \\ & & F_{p_n} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\cdot n+1$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\det D\underline{X}(y^0, 0) = 1$ $\blacksquare$

Def. Chiamo $(\underline{Y}, S)$ l'inversa loc. di $\underline{X}$: $(x,t) = \underline{X}(y,s) \iff y = \underline{Y}(x,t)$

$s = S(x,t)\ (= t)$

e def.:

$$u(x,t) := z\big(\underline{Y}(x,t), S(x,t)\big)$$
$$(D) \qquad = z\big(\underline{Y}(x,t), t\big)$$

N.B. $u \in C^2$ perché $z, \underline{Y}$ lo sono.

Teor. La fn. u def. in (D) risolve

$$\begin{cases} u_t + G(D_x u, u, x, t) = 0 & \text{in } V \\ u(x,0) = g(x) & V \cap \{t=0\} \end{cases}$$

Dim: v. e.g. Evans p. 107-110.

FARÒ 3 casi particolari:

–

Es. 1 $\quad u_t + b\cdot\nabla u + cu = \ell$

dove c ed ℓ dip. da x e t, b costante.

$$(c)\begin{cases} \dot{X}_i = b_i \quad i=1,\dots,n & X_i(0) = y \\ \dot{X}_{n+1} = 1 & X_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

$$X(y,s) = (y+sb,\, s) = (x,t)$$

$$Y(x,t): \; x - sb = x - tb$$
$$s = t$$

uso l'eq: $(b,1)\cdot(\nabla u, u_t) = \ell - cu$

$$\begin{cases} \dot{z} = (\ell - cz)(y+sb,\, s) \\ z(0) = g(y) \end{cases}$$

è ODE scalare, lineare 1° ordine

$$z(y,s) = g(y) + \int_0^s \ell(y+b\tau,\tau)\, e^{-\int_\tau^s c(y+br,r)\,dr}\, d\tau$$

$$u(x,t) = z(x-bt,\, t) =$$

$$= g(x-bt) + \int_0^t \ell(x+b(\tau-t),\tau)\, e^{-\int_\tau^t c(y+b(r-t),r)\,dr}\, d\tau$$

N.B ~~Sol.~~ $\exists$ loc. solo loc. uno

$\forall t$! sicuro def. ℓ e c

<u>Ex</u> controllare che u risolve l'equazione.