Programma di Equazioni Differenziali, Docente: M. Bardi Laurea Magistrale in Matematica, a.a. 2016/2017

1. Introduzione (riferimenti [E], sez 1.1, 1.2, 1.3, 2.1)

Generalità sulle equazioni alle derivate parziali del prim'ordine, operatori lineari e nonlineari. Esempi e motivazioni: equazione del trasporto, legge di conservazione, equazioni di Hamilton-Jacobi (HJ).

2. Il metodo delle caratteristiche (riferimenti [E], sez. 3.2, [L] capitolo 1, sez. 1.2)

Derivazione delle equazioni caratteristiche per l'equazione $F(x, u, Du) = 0$ e inversione del flusso caratteristico. Caratteristiche per la legge di conservazione e esempi di shock. Caratteristiche per l'equazione di HJ $u_t + H(x, D_x u) = 0$. Teorema di esistenza locale delle soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione $u_t + H(D_x u) = 0$. Esempi di esistenza e di non esistenza globale.

3. Collegamenti tra equazioni di HJ e calcolo delle variazioni, introduzione all'analisi convessa (riferimenti [E], sez 3.3 e appendice B.)

Condizioni necessarie di minimalità per funzionali azione: equazioni di Eulero-Lagrange e sistemi Hamiltoniani. Definizione e principali proprietà delle funzioni convesse. Sottogradiente delle funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen. Convessa coniugata (trasformata di Legendre). Teorema di dualità per funzioni convesse e superlineari. Funzione valore dei problemi di calcolo delle variazioni e teorema di verifica per soluzioni classiche di HJ.

5. La formula di Hopf-Lax (riferimenti [E], capitolo 3, sez 3.3)

La formula di Hopf-Lax come funzione valore di un problema di calcolo delle variazioni. La funzione di Hopf-Lax è Lipschitz e risolve il problema di Cauchy per l'equazione di HJ q.o. Non unicità di soluzioni q.o. e unicità di soluzioni classiche. Funzioni semiconcave e loro uso per l'equazione di H-J.

6. Soluzioni di viscosità di equazioni di Hamilton-Jacobi (riferimenti [BCD], capitolo II, sezioni 1, 2, 3, [E], capitolo 10)

Metodo della viscosità evanescente e definizione di soluzione di viscosità per equazioni di Hamilton-Jacobi. La funzione di Hopf-Lax è soluzione di viscosità. Coerenza con le soluzioni classiche, equivalenza della definizione con le funzioni test e con i sotto e sopradifferenziali. Stabilità delle soluzioni di viscosità rispetto alla convergenza uniforme. Principio del confronto per soluzioni di viscosità del problema di Dirichlet. La funzione distanza dal bordo di Ω è soluzione di viscosità dell'equazione iconale in Ω; unicità per il problema di Dirichlet. Principio del confronto per equazioni evolutive in $\mathbb{R}^n$, uncità per il problema di Cauchy.

7. Introduzione al controllo ottimo mediante programmazione dinamica (riferimenti [BCD], capitolo III, sez. 1 e 3 e appendice 5, [E], capitolo 10)

Esistenza e unicità per soluzioni generalizzate di equazioni differenziali ordinarie con controlli misurabili. Funzione valore di un problema di controllo ottimo a orizzonte finito, sue proprietà. Principio di programmazione dinamica. La funzione valore è l'unica soluzione di viscosità di un problema di Cauchy con dato terminale.

8. Introduzione al controllo Lineare-Quadratico (riferimenti [FR] cap. IV, sez. 4 e 5, [B])

Controlli feedback. Teorema di verifica e sintesi del feedback ottimale per problemi a orizzonte finito. Regolatore lineare-quadratico a orizzonte finito e equazione differenziale di Riccati, risolubilità di quest'ultima.

9. Introduzione alla teoria dei giochi (riferimenti [Bar] cap. 1 e 3, [Bre], [B])

Giochi a somma nulla: valore e punti sella, esempi di giochi matriciali. Teorema di min-max di Von Neumann. Strategie miste ed esistenza del valore nei giochi matriciali, metodi elementari di calcolo ed esempi. Esistenza del valore in strategie miste per giochi a somma nulla generali.

Giochi a due persone a somma non nulla: equilibri di Nash ed esempi (dilemma del prigioniero,...). Esistenza di equilibri sotto ipotesi di convessità usando il teorema di punto fisso di Brouwer; equilibri in strategie miste.

10. Introduzione ai giochi differenziali (riferimenti [Bre], [ES], [BCD] cap. VIII, [B])

Giochi differenziali a due persone: equilibri di Nash in forma feedback e teorema di verifica. Giochi differenziali L-Q a somma non nulla ed equazioni di Riccati. Giochi L-Q a somma nulla: equazione di Isaacs e risolubilità in grande dell'equazione di Riccati. Un modello di pubblicità in regime di duopolio con soluzione esplicita.

Giochi differenziali a somma nulla: strategie non-anticipanti e definizione di valore inferiore e superiore, esempi. Principio della programmazione dinamica e continuità delle funzioni valore. Caratterizzazione delle funzioni valore come soluzioni delle equazioni di Isaacs, esistenza del valore. Controlli rilassati e strategie miste nei giochi differenziali, esempi.

N.B.: Sono in programma le dimostrazioni svolte a lezione, si vedano i file messi in rete al sito `http://www.math.unipd.it/ bardi/didattica/Equazioni Differenziali 2016` nella cartella "Materiale".

Bibliografia

Gli articoli contrassegnati con asterisco * sono disponibili alla pagina web suindicata.

[B] M. Bardi, *Appunti del corso di Equazioni Differenziali*, dispensa 2016.*

[BCD] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, **Optimal control and Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations**, Birkhäuser, Boston, 1997; 2nd printing, Modern Birkhäuser Classics, 2008.

[Bar] N. Barron, **Game Theory**, Wiley, 2008.

[Bre] A. Bressan, *Noncooperative differential games,* , Milan J. Math. 79 (2011), 357–427.*

[E] L. C. Evans, **Partial Differential Equations**, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010.

[E] L. C. Evans, P. Souganidis *Differential Games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 773–797.*

[FR] W. Fleming, R. Rishel, **Deterministic and stochastic optimal control**, Springer, New York, 1975.

[L] P.-L. Lions, **Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations**, Pitman, Boston, 1982.