

Programma di Equazioni della Fisica Matematica – a.a. 2009-10

Docente: Martino Bardi

Scuola Galileiana di Studi Superiori

1. Generalità sulle equazioni a derivate parziali

- Multi-indici, PDE di ordine k lineari, semilineari, quasilineari, fully nonlinear, in forma di divergenza. Esempi di PDE notevoli.
- Classificazione delle PDE lineari del 2° ordine. Equazioni che cambiano tipo. Curve caratteristiche e singolarità. [DB]
- Richiami su: integrali su varietà, formula della coarea e coordinate sferiche in \mathbb{R}^n , teorema della divergenza in \mathbb{R}^n e sue varianti, formule di Green e integrazione per parti in \mathbb{R}^n .

2. Calcolo delle variazioni ed equazioni ellittiche [E]

- Problemi di Dirichlet e di Neumann per le equazioni Laplace e Poisson: unicità mediante le formule di Green (metodo dell'energia).
- Equazioni di Eulero-Lagrange nel calcolo delle variazioni in più variabili. Principio di Dirichlet.
- Minimizzazione senza vincoli e condizioni al bordo tipo Neumann nonlineare o obliquo.
- Superfici di area minima e equazione della curvatura media.

3. Derivazione di alcune equazioni della Fisica Matematica [DB]

- Equazioni di diffusione e moto Browniano.
- Equazione di continuità e suoi casi particolari: legge scalare di conservazione, equazioni del calore lineari e non, equazione dei mezzi porosi. Problemi ai valori iniziali e al contorno.
- Dinamica dei fluidi: equazioni di Navier-Stokes, trasmissione di onde acustiche (modello linearizzato), equazioni di Eulero e casi particolari (gas isentropici, eq. di Bernoulli,...).
- L'equazione delle onde come modello delle vibrazioni di un corpo elastico.

4. Equazioni del trasporto e delle onde [E]

- Soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del trasporto omogenea associata a un campo C^1 e nonomogenea per campo costante.
- Soluzione dell'equazione delle onde lineare omogenea in dimensione 1: formula di D'Alembert. Proprietà della soluzione: regolarità, velocità finita di propagazione.
- Metodo delle medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux.
- Soluzione dell'equazione delle onde in dimensione 3: formula di Kirchoff.
- Metodo della discesa e soluzione in dimensione 2: formula di Poisson.
- Conservazione dell'energia nell'equazione delle onde, unicità della soluzione e cono di dipendenza dai dati.

5. Equazioni del calore [E]

- Soluzioni autosimili dell'equazione del calore lineare e non: soluzione fondamentale Φ (nucleo di Gauss) per il caso lineare e soluzione di Barenblatt per l'equazione dei mezzi porosi.
- La convoluzione $\Phi * g$ risolve il problema di Cauchy con dato iniziale g . Proprietà della soluzione: propagazione istantanea del supporto, regolarizzazione istantanea dei dati iniziali.

- Metodo di Duhamel per l'equazione non omogenea.
- Metodo dell'energia: unicità della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet in aperti limitati e in \mathbb{R} per soluzioni limitate con derivata spaziale limitata.
- Soluzioni deboli dell'equazione dei mezzi porosi e loro unicità.

6. Principi del massimo

- Principi del massimo per operatori parabolici degeneri, unicità della soluzione e dipendenza continua dai dati al bordo per il problema di Cauchy-Dirichlet in aperti limitati. [E]
- Principi di confronto per operatori parabolici semilineari. Estinzione asintotica della specie nel modello di Fisher. [OH]
- Principio del massimo forte: dimostrazione con il Lemma di Hopf nel caso di operatori uniformemente ellittici. Unicità della soluzione dei problemi di Dirichlet e Neumann. [B]

Bibliografia

- [B] M. Bardi: Appunti sulle equazioni ellittiche, 2010, scaricabile dal sito <http://www.math.unipd.it/~bardi/didattica/>
- [DB] E. Di Benedetto: Partial differential equations, 2nd ed., Birkhäuser 2010.
- [E] L.C. Evans: Partial differential equations, A.M.S., Providence, 1998.
- [OH] J. Ockendon, S. Howison, A. Lacey, A. Movchan: Applied Partial Differential Equations, Oxford Univ. Press 2003

Per l'orario di ricevimento dopo la fine del corso gli studenti possono contattare M. Bardi al numero di telefono 049-8271468, o all'indirizzo di e-mail bardi@math.unipd.it, o nel suo studio al 5° piano di Torre Archimede, corridoio A-B.