**Programma di Fondamenti di Analisi Matematica e Probabilità – a.a. 2009-10**
**Docente: M. Bardi**
**Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica**

### 1. Funzioni di più variabili.

- Richiami di topologia in $\mathbb{R}^n$, prodotto scalare, norma e distanza euclidea, intorni di $\infty$. Esempi di funzioni scalari e vettoriali.
- Limiti di funzioni scalari e vettoriali di $n$ variabili, loro proprietà. Uso di restrizioni e delle coordinate polari per il calcolo di limiti (c.d.).
- Derivate direzionali e parziali, gradiente. Funzioni differenziabili e loro proprietà (c.d.). Piano tangente a un grafico. Direzione di massima pendenza (c.d.).
- Derivate successive, matrice Hessiana, teorema di Schwarz.
- Insiemi convessi e funzioni convesse, caratterizzazione mediante l'Hessiana.
- Insiemi compatti e teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue.
- Massimi e minimi liberi di funzioni di più variabili: condizioni necessarie (c.d.) e condizioni sufficienti. Estremi vincolati a insiemi la cui frontiera è una curva parametrica.

### 2. Curve e integrali curvilinei

- Curve parametriche, vettori e rette tangenti; curve in coordinate polari.
- Lunghezza di una curva, invarianza per cambi di parametrizzazione (c.d.), ascissa curvilinea.
- Integrali curvilinei di $1^a$ specie, interpretazione geometrica e proprietà. Baricentro di una curva.
- Forme differenziali e integrali curvilinei di $2^a$ specie, lavoro del campo vettoriale associato a una forma; cambiamenti di parametrizzazione e di orientamento.
- Forme differenziali esatte e campi conservativi. Insiemi connessi e potenziali. Proprietà degli integrali delle forme esatte (c.d.).
- Rotore di un campo vettoriale. Forme differenziali chiuse e campi irrotazionali, legami con l'esattezza (c.d.).
- Insiemi semplicemente connessi (definizione mediante l'omotopia e sua interpretazione intuitiva), esattezza delle forme chiuse.

### 3. Integrali multipli.

- Definizione di integrale doppio (secondo Riemann) di funzioni definite su rettangoli, interpretazione geometrica e proprietà, formule di riduzione.
- Integrale doppio di funzioni definite su insiemi limitati: insiemi misurabili e integrabilità su di essi delle funzioni continue.
- Formule di riduzione per domini semplici rispetto a un asse. Baricentri di insiemi piani.
- Variazione delle aree per trasformazioni lineari, teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi, calcolo di integrali mediante coordinate polari.
- Integrali generalizzati su domini non limitati: successioni invadenti e funzioni assolutamente integrabili.
- Calcolo dell'integrale della Gaussiana.
- Integrali tripli: formule di riduzione per fili in domini semplici rispetto a un asse e per strati nei parallelepipedi. Volumi e baricentri di solidi.
- Teorema di cambiamento di variabili, coordinate sferiche e cilindriche; volume dei solidi di rotazione (c.d.).

### 4. Superfici e integrali superficiali.

- Superfici parametrizzate regolari, linee coordinate, piano tangente e versore normale.
- Area di una superficie regolare e integrali superficiali; formula semplificata per superfici cartesiane. Baricentro di una superficie.
- Flusso di un campo vettoriale, superfici chiuse e flusso uscente.
- Teorema della divergenza di Gauss in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$; formule di Gauss-Green e teorema del rotore di Stokes nel piano.

### 5. Equazioni differenziali.

- Integrale generale dell' equazione lineare del prim'ordine.

- Sistemi lineari del $1^o$ ordine: proprietà dell'integrale generale nel caso omogeneo e principio di sovrapposizione. Relazioni tra equazioni del $2^o$ ordine e sistemi del $1^o$.
- Soluzioni esplicite di equazioni lineari del $2^o$ ordine a coefficienti costanti (c.d.) e con termini noti speciali.
- Equazioni non lineari a variabili separabili, fenomeni di esplosione e di non unicità.

**6. Probabilità elementare.**
- Fenomeni casuali, eventi e loro identificazione con insiemi. Assiomi della probabilità e prime proprietà. Spazi di probabilità uniforme.
- Calcolo combinatorio: principio base, permutazioni, disposizioni con e senza ripetizione, numero dei sottoinsiemi (combinazioni semplici); coefficienti binomiali e loro proprietà. Applicazioni a calcoli di probabilità.
- Probabilità condizionale e sue proprietà. Formula della probabilità totale e formula di Bayes (c.d.).
- Eventi indipendenti (2 o più) e loro proprietà. Prove di Bernoulli.

**7. Variabili aleatorie discrete.**
- Variabili aleatorie e funzioni di distribuzione; variabili aleatorie discrete, densità discreta.
- Valore atteso di una v.a. discreta e di una sua funzione.
- Momenti, varianza e sue proprietà (c.d.), deviazione standard.
- V.a. di Bernoulli e binomiale, calcolo di $E$ e Var.
- V.a. di Poisson: legame con le leggi binomiali, calcolo di $E$ e Var.
- V.a. geometrica: calcolo di $E$ e Var, proprietà di mancanza di memoria (c.d.).

**8. Variabili aleatorie continue.**
- V.a. continue: densità, funzione di distribuzione, loro legame.
- Valore atteso di una v.a. continua e di una sua funzione. Varianza e sue proprietà.
- V.a. esponenziale: calcolo di $E$ e Var, mancanza di memoria (c.d.),
- V.a. uniforme, $E$ e Var. Densità di trasformazioni affini di v.a. (c.d).
- V.a. normali (Gaussiane): calcolo di $E$ e Var, trasformazioni affini di normali sono normali (c.d.), calcolo della probabilità di eventi descritti da $N(\mu, \sigma^2)$ mediante la tabella della funzione di distribuzione $\Phi$ di $N(0, 1)$.
- Approssimazione normale a variabili binomiali: teorema limite di DeMoivre-Laplace.

**9. Variabili aleatorie vettoriali**
- Funzioni di distribuzione congiunte e marginali di due v.a.; densità discreta congiunta; variabili congiuntamente continue e densità congiunta. Distribuzione uniforme sul cerchio.
- Indipendenza di v.a., densità congiunta (discreta e non) di v.a. indipendenti (c.d.).
- Densità condizionale e valore atteso condizionale di $X$ dato $Y = y$ per v.a. discrete. Calcolo di valori attesi mediante condizionamento.
- Valore atteso di funzioni di più v.a. e di somme di v.a., esempi.
- Valore atteso del prodotto di v.a. indipendenti (c.d.).
- Covarianza e sue proprietà, legame con l'indipendenza (c.d.); varianza della somma di due v.a. (c.d.).
- Legge debole dei grandi numeri.
- Teorema Limite Centrale e suo uso nel calcolo approssimato di probabilità.

Legenda: **c.d. = con dimostrazione**.

AVVERTENZE

Il 99% degli argomenti in programma si può trovare sui testi consigliati

S. Ross: Calcolo delle probabilità, 2a ed., Apogeo, 2007;

M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi Matematica, McGraw-Hill, 2007;

M. Bardi: dispense "Complementi di Matematica E e Matematica C" e "Integrali su domini illimitati", reperibili al sito web del C.I.S.-Seminario Matematico
http://www.cissm.unipd.it/dispense/bardi/

Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione o assegnati per casa.

Per l'orario di ricevimento dopo la fine del corso gli studenti possono contattare M. Bardi al numero di telefono 049-8271468 o all'indirizzo di e-mail bardi@math.unipd.it .