

## Programma di Matematica E – a.a. 2007-08

Docenti: M. Bardi e A. Marson

### Corsi di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni e dell'Automazione

#### 1. Probabilità elementare.

- Fenomeni casuali, eventi e loro identificazione con insiemi. Assiomi della probabilità e prime proprietà. Spazi di probabilità uniforme.
- Calcolo combinatorio: principio base, permutazioni, disposizioni con e senza ripetizione, numero dei sottoinsiemi (combinazioni semplici); coefficienti binomiali e loro proprietà. Applicazioni a calcoli di probabilità.
- Continuità della probabilità come funzione di insieme: unioni crescenti (c.d.) e intersezioni decrescenti di successioni di eventi.
- Probabilità condizionale e sue proprietà. Formula della probabilità totale e formula di Bayes (c.d.).
- Eventi indipendenti (2 o più) e loro proprietà. Prove di Bernoulli.

#### 2. Variabili aleatorie discrete.

- Variabile aleatorie e funzioni di distribuzione; variabili aleatorie discrete, densità discreta,
- Valore atteso di una v.a. discreta e di una sua funzione (c.d.).
- Momenti, varianza e sue proprietà (c.d.), deviazione standard.
- V.a. di Bernoulli e binomiale, calcolo di  $E$  e  $Var$ .
- V.a. di Poisson: legame con le leggi binomiali (c.d.), calcolo di  $E$  e  $Var$ , uso nei processi di arrivi (c.d.).
- V.a. geometrica: calcolo di  $E$  e  $Var$ , proprietà di mancanza di memoria. Binomiale negativa.
- V.a. ipergeometrica: legami con le binomiali (c.d. solo per  $n = 2$ ), calcolo di  $E$ .
- Proprietà della funzione di distribuzione di v.a. generali (c.d.).

#### 3. Variabili aleatorie continue.

- V.a. continue: densità, funzione di distribuzione, loro legame.
- Valore atteso di una v.a. continua e di una sua funzione. Varianza e sue proprietà.
- V.a. uniforme,  $E$  e  $Var$ .
- Densità di funzioni di v.a. (ad es. di  $aX + b$  e di  $X^2$ , nota la densità di  $X$ ).
- V.a. normali (Gaussiane): calcolo di  $E$  e  $Var$ , trasformazioni affini di normali sono normali (c.d.), calcolo della probabilità di eventi descritti da  $N(\mu, \sigma^2)$  mediante la tabella della funzione di distribuzione  $\Phi$  di  $N(0, 1)$ .
- Approssimazione normale a variabili binomiali: teorema limite di DeMoivre-Laplace.
- V.a. esponenziale: calcolo di  $E$  e  $Var$ , mancanza di memoria (c.d.), uso nei processi di arrivi (c.d.).
- V.a. Gamma: funzione gamma, casi particolari (esponenziale, Erlang, chi-quadrato), legame con i processi di arrivi, calcolo di  $E$  e  $Var$ .
- Distribuzione di Cauchy.

#### 4. Complementi sulle funzioni di più variabili.

- Richiami di topologia in  $\mathbb{R}^n$ : norma e distanza euclidea, punti interni e di frontiera, intorno, insiemi aperti, chiusi, limitati; chiusura di un insieme; proprietà ed esempi.
- Insiemi compatti e teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue.
- Insiemi connessi e convessi, teorema dei valori intermedi.
- Ellissoidi, iperboloidi a una e due falde, coni.

#### 5. Integrali multipli.

- Definizione di integrale doppio (secondo Riemann) di funzioni definite su rettangoli, interpretazione geometrica e proprietà, formule di riduzione.
- Integrale doppio di funzioni definite su insiemi limitati, definizione di insieme misurabile e criteri di misurabilità, esempi.
- Integrabilità delle funzioni generalmente continue. Formule di riduzione per domini semplici rispetto a un asse. Baricentri di insiemi piani.
- Variazione delle aree per trasformazioni lineari, teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi, calcolo di integrali mediante coordinate polari.
- Integrali generalizzati su domini non limitati o per funzioni non limitate: successioni invadenti e funzioni assolutamente integrabili.
- Calcolo dell'integrale della Gaussiana.
- Integrali tripli: formule di riduzione per fili e per strati in domini semplici rispetto a un asse. Volumi e baricentri di solidi.
- Teorema di cambiamento di variabili, coordinate sferiche e cilindriche; volume dei solidi di rotazione (c.d.).

#### 6. Variabili aleatorie vettoriali

- Funzioni di distribuzione congiunte e marginali di due v.a.; densità discreta congiunta; variabili congiuntamente continue e densità congiunta. Distribuzione uniforme sul cerchio.
- Indipendenza di v.a., densità congiunta (discreta e non) di v.a. indipendenti (c.d.).
- Densità condizionale di  $X$  dato  $Y = y$ : caso discreto e caso continuo.
- Somma di variabili indipendenti: calcolo della densità mediante convoluzione (c.d.), somma di variabili normali, somma di variabili gamma (c.d. solo per le esponenziali); esempi di somme di v.a. discrete.
- Valore atteso di funzioni di più v.a. e di somme di v.a., esempi.
- Valore atteso del prodotto di v.a. indipendenti (c.d.).
- Covarianza e sue proprietà, legame con l'indipendenza (c.d.); varianza della somma di due v.a. (c.d.); coefficiente di correlazione e sue proprietà.
- Valore atteso condizionale di  $X$  dato  $Y = y$ .
- Valore atteso di  $X$  condizionato da  $Y$  ( $E[X|Y]$ ), calcolo del suo valore atteso (c.d.), proprietà di migliore predizione di  $X$  noto  $Y$ .

## 7. Teoremi limite.

- Disuguaglianze di Markov e di Chebyshev (c.d.).
- Legge debole dei grandi numeri (c.d.). Cenni alla convergenza in probabilità e alla convergenza quasi certa di successioni di v.a. Legge forte dei grandi numeri.
- Teorema Limite Centrale, sua interpretazione e alcune applicazioni (calcolo approssimato di probabilità, stima dello scarto dalla media nella legge dei grandi numeri). Cenni alla convergenza in legge.

## 8. Campi vettoriali e integrali curvilinei e superficiali.

- Curve parametriche, vettori e rette tangenti; curve in coordinate polari.
- Lunghezza di una curva, ascissa curvilinea.
- Integrali curvilinei di 1<sup>a</sup> specie, interpretazione geometrica e proprietà di invarianza per cambi di parametrizzazione (c.d.). Baricentro di una curva.
- Forme differenziali e integrali curvilinei di 2<sup>a</sup> specie, lavoro del campo vettoriale associato a una forma; cambiamenti di parametrizzazione e di orientamento.
- Forme differenziali esatte e campi conservativi, potenziali. Proprietà degli integrali delle forme esatte (c.d.).
- Rotore di un campo vettoriale. Forme differenziali chiuse e campi irrotazionali, legami con l'esattezza (c.d.).
- Insiemi semplicemente connessi (definizione mediante l'omotopia e sua interpretazione intuitiva), esattezza delle forme chiuse.
- Superfici parametrizzate regolari, linee coordinate, piano tangente e versore normale; esempi.
- Area di una superficie regolare e integrali superficiali; formula semplificata per superfici cartesiane.
- Area delle superfici di rotazione (c.d.). Baricentro di una superficie.
- Flusso di un campo vettoriale, superfici chiuse e flusso uscente.
- Divergenza di un campo vettoriale, legame col rotore (c.d.).
- Teorema della divergenza di Gauss.
- Formule di Gauss-Green nel piano (c.d.), teoremi della divergenza (c.d.) e del rotore (c.d.) nel piano; applicazioni al calcolo di aree.
- Superfici con bordo, orientamento del bordo, circuitazione di un campo. Teorema del rotore di Stokes per superfici con bordo e per superfici chiuse (c.d.).

## 9. Introduzione all'ottimizzazione con vincoli.

- Curve piane definite da un vincolo  $g(x, y) = 0$ , equazione della retta tangente; ortogonalità del gradiente alle curve di livello.
- Funzioni definite implicitamente da equazioni non lineari in 2 variabili: teorema di Dini, derivata della funzione implicita (c.d.), calcolo delle derivate successive e formula di Taylor.
- Estremi condizionati a un vincolo per funzioni di 2 variabili: punti stazionari condizionati e metodo del moltiplicatore di Lagrange (c.d.). Applicazioni allo studio di funzioni nella chiusura di un aperto.

Legenda: **c.d.** = **con dimostrazione.**

## AVVERTENZE

Il 97% degli argomenti in programma si può trovare sui testi consigliati

S. Ross: Calcolo delle probabilità, 2a ed., Apogeo, 2007;

M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi Matematica, McGraw-Hill, 2007;

M. Bardi: Complementi di Matematica E e Matematica C, dispensa reperibile alla Libreria Progetto.

Ciò che non si trova lì può essere considerato facoltativo dallo studente che sia mancato alla lezione nella quale è stato trattato l'argomento. Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione o assegnati per casa.

Per l'orario di ricevimento nei mesi estivi gli studenti possono contattare M. Bardi al numero di telefono 049-8271468 o all'indirizzo di e-mail [bardi@math.unipd.it](mailto:bardi@math.unipd.it) .