Esercizio 1 Sia $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$.

1. Determinare massimi e minimi relativi di $f(x,y)$.

2. Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y)$ nell'insieme

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 3; \ y \leq x\}.$$

Esercizio 2 Sia D il solido:

$$D = \{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}; \quad x^2+y^2-4x \leq 0\}.$$

Disegnare D e trovarne il volume.

Esercizio 3 Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1+y^2}\mathbf{i} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\mathbf{j}.$$

1. Verificare che $\mathbf{F}$ è conservativo e trovarne un potenziale.

2. Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo l'arco di circonferenza $x^2+y^2 \leq 4$ con $x \geq 0$, percorso in verso antiorario.

Esercizio 4 Si consideri il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \leq 4\}.$$

1. Descriverne la frontiera e calcolarne il volume.
2. Servendosi del teorema della divergenza calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$ uscente da ogni superficie che delimita V.

Esercizio 5 Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (x^2y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Utiltizzando il teorema di Green calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove $\mathcal{C}$ è il contorno (orientato positivamente) della regione

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$