ESERCIZI su flussi di campi vettoriali

Esercizio 1. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}.$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da ogni faccia del tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano $x + 2y + 3z = 6$.

Esercizio 2. Sia V il "cono gelato" definito da:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

(1) Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F}$ uscente da V.
(2) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da ciascuna delle due superfici che delimitano V.

Esercizio 3. Siano

$$\mathbf{G} = e^{-x^2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad e \quad \mathbf{F} = -y\mathbf{i} + \mathbf{G}.$$

(1) Verificare che $\mathbf{G}$ è conservativo e calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

dove $\mathcal{C}$ ha equazione

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

percorso in verso antiorario.
(2) Verificare il risultato ottenuto in (1) usando la formula di Stokes.

Esercizio 4. Sia

$$V = \{xyz \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

.

(1) Fare un disegno di V, verificando che la sua frontiera si divide in una porzione superiore A, una laterale B, e una base C.
Siano

$$\mathbf{F} = z\mathbf{k} \quad e \quad \mathbf{G} = x\mathbf{i}.$$

(2) Usando il teorema della divergenza, e le formule elementari per volumi, calcolare i flussi di $\mathbf{F}$ e di $\mathbf{G}$ uscenti da ciascuna delle tre porzioni di frontiera di V. (Senza calcolare nessun integrale!)

Esercizio 5. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (xy - y + \frac{y^2}{2})\mathbf{i}$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 1$, percorsa in verso antiorario.
(2) Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{G} = (1 - (x + y))\mathbf{k}$$

uscente dalla cupola di cui al precedente esercizio e dal disco di base della cupola. (Usare il teorema della divergenza applicato al solido $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$)
(3) C'è un legame tra il flusso di $\mathbf{G}$ uscente dal disco di base della cupola e il risultato ottenuto nel punto (1)?

Esercizio 6. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (2y + z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva $r(t)$ di equazioni parametriche
$$r(t) = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$
(2) Calcolare il flusso di $\nabla \times \mathbf{F}$ uscente dal disco $S = \{(x, y, 4) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, orientato con la normale $\mathbf{k}$, e controllare il risultato precedente.

Esercizio 7. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$
(1) Calcolare il volume di V.
(2) Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = \nabla f(x, y, z)$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che delimita V.
(3) (*) Servirsi del risultato precedente per calcolare l'area di quella porzione di superficie sferica che fa parte della frontiera di V.

Esercizio 8. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = -zy\mathbf{i} + xz\mathbf{j}.$$
Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione;
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad .$$
Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $\mathcal{C}$ in due modi: applicando la definizione e usando il Teorema di Stokes.

Esercizio 9. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 2\}.$$
Calcolare il flusso di $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - 2x^2\mathbf{k}$ uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 10. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z \geq 0 \quad z \leq a - y\}.$$
Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = -yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$
(1) Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F}$ uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 11. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2, \quad 0 \leq z \leq 2a\}.$$
Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 12. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, \quad x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \geq 4, \quad 0 \leq z \leq 2\}.$$
Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = (x^2 + z)\mathbf{k}$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 13. Calcolare
$$\int_{\mathcal{C}} (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$$
dove $\mathcal{C}$ è il bordo della corona circolare contenuta tra i cerchi $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 = 1$.
(Sugg: applicare il Teorema di Green.)

Esercizio 14. Calcolare
$$\int_{\mathcal{C}} xydx + x^2dy + z^2dz,$$
dove $\mathcal{C}$ è la curva intersezione delle superfici di equazioni $z = x^2 + y^2$ e $z = y$ orientata in senso antiorario vista dall'alto.
Verificare il risultato ottenuto usando il Teorema di Stokes.

Esercizio 15. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$
e il solido
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}.$$
(1) Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ uscente da D.
(2) Usando il Teorema di Stokes, trasformare l'integrale doppio in un integrale curvilineo.

Esercizio 16. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$
(1) Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che delimita V.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva intersezione della superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie di equazione $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, percorsa in verso antiorario se vista dall'alto.
(3) Verificare il risultato ottenuto in (2) usando la formula di Stokes.

Esercizio 17. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$
Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$
(1) Disegnare V e verificare che la frontiera di V e' costituita da una corona circolare nel piano $z = 0$, una porzione $\mathcal{S}$ della superficie di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ e di una porzione di superficie cilindrica.
(2) Calcolare il flusso di $\nabla \times \mathbf{F}$ uscente da ogni superfice che delimita V.
Quanto vale il flusso uscente da $\mathcal{S}$?
(3) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazione
$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 3$$
percorsa in verso antiorario.
(4) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazione
$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$$
percorsa in verso orario. Che legame c'e' tra il flusso di $\nabla \times \mathbf{F}$ uscente da $\mathcal{S}$, il risultato in (3) e quello ora trovato? Perche'?

Esercizio 18. Calcolare
$$\int_{\mathcal{C}} x^4dx + xydy$$
dove $\mathcal{C}$ è la curva di contorno del semidisco $x^2 + y^2 \leq 9;\ y \geq 0$ percorsa in senso antiorario. (Suggg; applicare il Teorema di Green.)

Esercizio 19. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$
Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
(1) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 20. Calcolare
$$\int_{\mathcal{C}} xzdx + ydy + zdz,$$
dove $\mathcal{C}$ è la curva intersezione delle superfici di equazioni $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$ orientata in senso antiorario vista dall'alto.
Verificare il risultato ottenuto usando il Teorema di Stokes.

Esercizio 21. Usare il Teorema di Green per calcolare il lavoro compiuto dal campo
$$\mathbf{F} = y^6\mathbf{i} + xy^5\mathbf{j}$$
lungo l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 1$, orientata in verso antiorario.

Esercizio 22. Calcolare il flusso del campo
$$\mathbf{F} = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$
uscente dalla porzione di superficie del paraboloide di equazione
$$z = 2(x^2 + y^2); \quad 0 \le z \le 1.$$

Esercizio 23. Sia $\mathcal{S}$ la superficie definita da:
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad z \ge 2\}.$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto dal campo
$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$
lungo la curva di contorno di $\mathcal{S}$ orientata in verso antiorario se vista dall'alto.
(2) Verificare il risultato ottenuto in (1) usando la formula di Stokes.

Esercizio 24. Sia V il solido definito da:
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1; \quad 0 \le z \le 1 - x\}.$$
Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = (x + 2y)\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che delimita V.

Esercizio 25. Sia
$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}.$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva intersezione del piano $z = 4$ con la superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 2x$, percorsa in verso antiorario se vista dall'alto.
(2) Verificare il risultato ottenuto in (1) usando la formula di Stokes.

Esercizio 26. Sia
$$\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + x^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva intersezione del piano $z = 2x + 4$ con la superficie di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$, percorsa in verso antiorario se vista dall'alto.
(2) Verificare il risultato ottenuto in (1) usando la formula di Stokes.

Esercizio 27. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$
Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione;
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} .$$
Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $\mathcal{C}$ in due modi: applicando la definizione e usando il Teorema di Stokes.