Esercizi di integrazione superficiale

Esercizio 1. Determinare l'area di quella parte della superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ che è interna alla superficie cilindrica $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Risultato: $2\sqrt{2}\pi a^3$.

Esercizio 2. Una cupola semisferica $\mathcal{S}$ ha equazione $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
La sua densità ρ diminuisce con l'altezza secondo la legge

$$\rho(z) = k(a - z)$$

con k costante positiva.
Trovare la massa della cupola $\mathcal{S}$, calcolare cioè

$$\iint_{\mathcal{S}} k(a-z)dS.$$

Fatto in classe.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{S}$ lo spicchio della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ soddisfacente alle limitazioni

$$x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad |y| \leq x$$

Calcolare la coordinata z del baricentro di $\mathcal{S}$, cioé

$$\frac{\iint_{\mathcal{S}} z dS}{\text{area } \mathcal{S}}.$$

Risultato: $\frac{a}{2}$.

Esercizio 4. Calcolare l'area della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ contenuta nel paraboloide $x^2 + y^2 = z$.

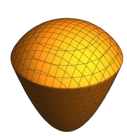

Figura 1. Parte della palla di centro $(0, 0, 2)$ e raggio 2 contenuta nella regione sopra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$; è richiesta l'area della calotta superiore, che sta fra le quote $z = 3$ e $z = 4$.

Risultato: 4π.

Esercizio 5. Una cupola $\mathcal{S}$ ha equazione $z = 1 - (x^2 + y^2)$, con $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; la densità superficiale della cupola varia con la legge $\rho(z) = 1 - z$. Trovare la massa totale della cupola, calcolare cioè

$$\iint_{\mathcal{S}} (1 - z)dS.$$

Risultato: $\frac{\pi}{60}(1 + 25\sqrt{5}$.

Esercizio 6. Calcolare l'area della porzione di cilindro $x^2 - 2x + y^2 = 0$ al di sopra del piano xy e sotto la superficie di equazione $z^2 = x^2 + y^2$.

Risoluzione. La superficie è un cono, la cui falda superiore è $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Usando coordinate cilindriche il cilindro (che ha l'asse z come una sua direttrice) diventa $r^2 - 2r\cos\vartheta = 0 \iff r = 2\cos\vartheta$, mentre il semicono è $z = r$. Le equazioni parametriche sono quindi

$$x = (2\cos\vartheta)\cos\vartheta;\ y = (2\cos\vartheta)\sin\vartheta;\ z = z \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2],\ 0 \le z \le 2\cos\vartheta.$$

La matrice jacobiana della parametrizzazione è

$$\begin{pmatrix} -4\cos\vartheta\sin\vartheta & 0 \\ -2\sin^2\vartheta + 2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(2\vartheta) & 0 \\ 2\cos(2\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'elemento d'area è

$$dA = \sqrt{4\sin^2(2\vartheta) + 4\cos^2(2\vartheta)}\, d\vartheta dz = 2d\vartheta dz,$$

da integrare sull'insieme $E = \{(\vartheta, z) : -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2,\ 0 \le z \le 2\cos\vartheta$; l'area richiesta è quindi

$$\int_E 2d\vartheta dz = 2\mathrm{Area}(E) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = 4.$$

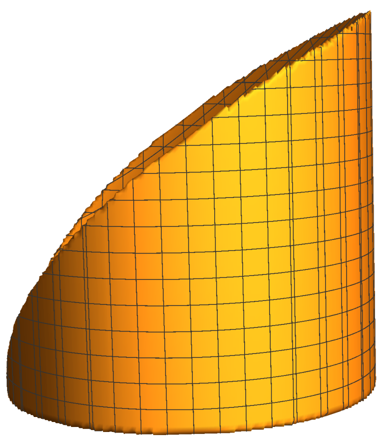

Figura 2. La porzione di cilindro sopra il piano xy e sotto il cono

□

Esercizio 7. Calcolare l'area della porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ che giace sotto il piano $z = 9$.

Risultato: $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$.

Esercizio 8. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di equazione

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Calcolare:

$$\iint_{\mathcal{S}} (1 + z) dS.$$

Risultato: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$.

Esercizio 9. Calcolare l'area della superficie $\mathcal{S}$ di equazione

$$z = 1 - (x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Risultato: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

Esercizio 10. Sia $\mathcal{S}$ la porzione di superficie sferica definita da:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; \quad z \geq 2\}.$$

Calcolare l'area di $\mathcal{S}$.

Risultato: 6π.

Esercizio 11. Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_{\mathcal{S}} x dS$$

dove $\mathcal{S}$ è la superficie di equazione

$$z = x^2 + y; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Risultato: $\frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3} - 1)$.