Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x,y) = x^2 - 3y^2 + y^6.$$
(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, 1, -1)$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$ con
$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2.$$
(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, 1, f(1, 1))$.
(2) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $Q = (1, 1)$ nel punto Q.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$, dove
$$f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$
(1) Disegnare le curve di livello di $f(x,y)$ e le loro traiettorie ortogonali. Esibire un campo vettoriale piano costituito da vettori che in ogni punto sono perpendicolari alla curva di livello di $f(x,y)$ passante per quel punto.
(2) Scrivere un'equazione del piano π tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $(0, 1, 0)$.

Esercizio 4. Sia $z = f(x,y) = x^2 + y$.
(1) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x,y)$ nel punto $Q = (1, 2)$ e calcolare la rapidità di variazione di $f(x,y)$ in tale direzione nel punto Q.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$
(1) Sia $\mathcal{C}$ la curva di livello di $f(x,y)$ a livello 0. Scrivere un' equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (1, 1)$.
(2) Determinare la direzione nella quale la rapidità di variazione di $f(x,y)$ è nulla nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 6. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione
$$z = f(x,y) = x^2 + 4y^2.$$
(1) Disegnare la curva di livello di $f(x,y)$ a livello 1.
(2) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (1, -1, 5)$.
(3) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x,y)$ nel punto $Q = (1, 1)$ e calcolare la rapidità di variazione di $f(x,y)$ in tale direzione nel punto Q.

Esercizio 7. Sia
$$f(x,y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
(1) Determinare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(1, 2)$ nella direzione della retta $x+y = 0$.

Esercizio 8. Sia $f(x,y) = x^3 e^{x^2 - y^2} + y^2 e^x$. Sia $\mathcal{C}$ la curva di livello di $f(x,y)$ passante per il punto $P = (0, 1)$.
(1) Scrivere la derivata $y'(x)$ della funzione $y(x)$ definita implicitamente dall' equazione $f(x,y) = f(0, 1)$.
(2) Scrivere un' equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto (0,1).
(3) Scrivere un' equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto (0,-1,1).

Esercizio 9. Sia
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}.$$

(1) Disegnare la curva di di livello di $f(x,y)$ passante per il punto $P = (1,1)$.
(2) Determinare un'equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x,y)$ passante per il punto $P = (1,2)$ nel punto P.

Esercizio 10. Sia $f(x,y) = xy^2 - x^2y^4$ ed $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$.

(1) Per ogni punto $P = (a, 0, f(a,0))$, scrivere un' equazione del piano π tangente a $\mathcal{S}$ in P.
(2) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $Q = (1,1)$ nel punto Q.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = (x+1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

(1) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto P= (0, 1) nel punto P.
(2) Determinare i punti in cui il piano tangente a $\mathcal{S}$ è parallelo all'asse y.

Esercizio 12. La quota z di una collina espressa in Km è data da
$$z = \frac{1}{x^2+1}e^{-(x^2+y^2)}.$$

(1) Se ci si trova nel punto $(0,1)$ (coordinate (x,y) sulla carta della zona) in quale direzione (sulla carta) ci si deve muovere se si vuole percorrere un sentiero che abbia dislivello 0?
(2) Qual è la massima quota sulla collina se si considera la zona sulla carta corrispondente a valori $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$?

Esercizio 13. Sia
$$f(x,y) = (1 - (x^2+y^2))^2.$$

(1) Determinare il piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $P = (1,1,f(1,1))$. In quali punti della superficie il piano tangente è orizzontale?

Esercizio 14. Sia
$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - xy$$
e sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$.

(1) Scrivere un' equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x,y)$ passatante per il punto P=(1,0) nel punto P.
(2) Calcolare la massima rapidità di variazione della funzione $f(x,y)$ nel punto P.
(3) Sia π il piano di equazione $x - 1 = y$ e sia $\mathcal{C}$ la curva intersezione del piano π con la superficie $\mathcal{S}$. Determinare un'equazione della retta tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto (1,0,1).

Esercizio 15. Sia
$$f(x,y) = xy^2.$$

(1) Disegnare alcune curve di livello di $f(x,y)$.
(2) Determinare per ogni punto (x,y) del piano, la direzione della retta tangente alla curva di livello passante per quel punto.
(3) Sia $\mathcal{S}$ la famiglia delle curve che in ogni punto sono perpendicolari alle curve di livello di $f(x,y)$. Qual è la direzione della retta tangente alle curve di $\mathcal{S}$ nel punto (x,y)?
(4) Trovare un' equazione differenziale soddisfatta da tutte e sole le curve della famiglia $\mathcal{S}$ e risolverla. (Sugg: le risposte alle domande (2) e (3) indicano il ragionamento da seguire per rispondere a (4)).

Esercizio 16. La quota z di una collina espressa in Km è data da

$$z = (y^2 + 1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(1) Supponete di trovarvi nel punto di coordinate (1,0) (coordinate (x,y) sulla carta della zona) e di muovervi in direzione Nord-Ovest, cioè nella direzione della retta $x = -y$. Quanto vale la rapidità di variazione del dislivello?
(2) In quale direzione (sulla carta) si ha la massima variazione di dislivello?

Esercizio 17. Sia $\mathcal{S}_1$ la superficie di equazione $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ ed $\mathcal{S}_2$ la superficie di equazione $(y^2 + \sin x)\log z + 1 = 0$.
(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}_2$ nel punto $P = (0, 1, \frac{1}{e})$.
(2) Sia $\mathcal{C}$ la curva intersezione di $\mathcal{S}_1$ con $\mathcal{S}_2$. Determinare la direzione della retta tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto $P = (0, 1, \frac{1}{e})$.

Esercizio 18. Sia

$$f(x, y) = xye^{-y^2}$$

e $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$.
(1) Scrivere un' equazione del piano π tangente alla superficie $\mathcal{S}$, nel punto $(1, 0, 0)$.
(2) Determinare in quali punti di $\mathcal{S}$ il piano tangente a $\mathcal{S}$ è parallelo all' asse y.
(3) Trovare la direzione di massimo aumento di $f(x, y)$ nel punto $(1, 0)$.
(4) Calcolare l'equazione del percorso del piano x, y che parte dal punto $(1, 0)$ e che in ogni punto è tangente alla direzione di massima variazione di $f(x, y)$ in quel punto.

Esercizio 19. Sia

$$g(x, y, z) = e^{-(x^2+z^2)} + \sin y$$

e sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $g(x, y, z) = 1$.
(1) Scrivere un' equazione del piano tangente alla superficie $\mathcal{S}$ nel punto $(0, 0, 0,)$.
(2) Sia $\mathcal{C}$ la curva intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano xy.
Scrivere un' equazione della retta r tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(\sqrt{\log 2}, \frac{\pi}{6}, 0)$.

Esercizio 20. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione

$$z = f(x, y) = (x + y)e^{-x^2}.$$

(1) Scrivere un' equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $P = (0, 0, 0)$.
(2) Determinare i punti in cui il piano tangente alla superficie è parallelo all'asse x.
(3) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x, y)$ nel punto $Q = (1, 1)$ e calcolare la rapidità di variazione di $f(x, y)$ in tale direzione nel punto Q.

Esercizio 21. Sia

$$f(x, y) = \log(x^2 + 2y^2).$$

(1) Scrivere un'equazione del piano π tangente a $f(x, y)$ nel punto $(1, 0, 0)$
(2) Determinare la direzione di massima crescita di $f(x, y)$ nel punto (1,1).
(3) Determinare la derivata direzionale di $f(x, y)$ in (1,1) nella direzione di massima crescita.