Esercizi su campi vettoriali

Esercizio 1. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = -\frac{2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}\mathbf{i} - \frac{2y}{((x-1)^2+y^2)^2}\mathbf{j}.$$
(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva
$$r(t) : \begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$
percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 2. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = \frac{x}{4(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \frac{y}{4(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}.$$
(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva
$$r(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \pi \le t \le 2\pi$$
percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = \frac{4x}{(4x^2+y^2)^2}\mathbf{i} + \frac{y}{(4x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$$
(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva
$$r(t) : \begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$
percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 4. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = (6x + \frac{y}{x})\mathbf{i} + (\ln x - 2)\mathbf{j}$$
(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva
$$r(t) : \begin{cases} x = e^t \\ y = t^3 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$
percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 5. Si consideri il campo vettoriale:
$$\mathbf{F} = \frac{1-x^2+y^2}{x(1+x^2+y^2)}\mathbf{i} + \frac{-2y}{1+x^2+y^2}\mathbf{j}\ ; \qquad x > 0$$
(1) Stabilire se il campo è conservativo.
(2) Determinare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la semicirconferenza di equazione $(x-1)^2+y^2 = 1,\ \ x \ge 1$, percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{y^2}{x^2}\mathbf{i} - \frac{2y}{x}\mathbf{j}.$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo il segmento che congiunge il punto $P = (1,1)$ con il punto $Q = (4,-2)$.

Esercizio 7. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (\frac{x}{(x^2+4y^2)^2}\mathbf{i} + \frac{4y}{(x^2+4y^2)^2}\mathbf{j}.$$

(1) Stabilire che il campo è conservativo e determinarne un potenziale.
(2) Determinare le linee di campo e le curve equipotenziali.

Esercizio 8. Esercizio 5 Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + x)\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}.$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = e^{2t}\cos t \\ y = e^{2t}\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.
(Sugg: Si verifichi se il campo è conservativo.)

Esercizio 9. Nel piano cartesiano Oxy è presente un campo di forze centrali dirette verso l'origine O. L'intensità della forza in ogni punto è inversamente proporzionale alla distanza dall'origine con costante di proporzionlità 4, cioè $\mathbf{F} = -\frac{4\mathbf{r}}{r^2}$ dove $\mathbf{r}$ è il raggio vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{3}{4}\pi$$

percorso in verso antiorario.

Esercizio 10. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\mathbf{j}.$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = \text{arcsen} t \\ y = \text{arccos} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 11. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

e sia $\mathcal{C}$ la curva intersezione del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con il piano di equazione $z = 1 - x - y$. Scrivere la curva $\mathcal{C}$ in equazioni parametriche e calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ percorsa in un verso fissato.

Esercizio 12. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{xy^2}{xy-1}\mathbf{i} + \frac{x^2y}{xy-1}\mathbf{j}.$$

(1) Stabilire se il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la semicirconferenza di equazione
$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 13. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (x^2 + y)\, dx + xy\, dy,$$

dove γ é il circolo di centro $(1, 0)$ e raggio 1, percorso nel verso antiorario. La forma differenziale sotto il segno di integrale é esatta?

Esercizio 14. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{xy}} - \frac{x}{y\sqrt{xy}}\mathbf{j}.$$

(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = t^3 + 1 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 15. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = \frac{2x + y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y - x}{x^2 + y^2}dy$$

(1) Verificare che ω è chiusa.
(2) Calcolare $\int_C \omega$ dove C è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, percorsa in verso antiorario.
(3) ω è esatta?

Esercizio 16. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (x + \log y)\mathbf{i} + (y + \frac{x}{y})\mathbf{j}$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = \tan t \\ y = e^t \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 17. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{y}{\sqrt{xy}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{xy}}\mathbf{j}$$

(1) Trovare il dominio di $\mathbf{F}$ e disegnare le linee di campo.
(2) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(3) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases} \qquad 1 \leq t \leq 4$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 18. Calcolare

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

lungo il quadrato di vertici (-1,-1), (-1,1), (1,1) e (1,-1) percorso in senso antiorario.

Esercizio 19. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x+y}})\mathbf{i} - (\frac{2y+x}{\sqrt{x+y}})\mathbf{j}.$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.
(Sugg: Si verifichi se il campo è conservativo.)

Esercizio 20. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y})\mathbf{i} - (\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2})\mathbf{j}$$

definito per $x > 0, y > 0$.

(1) Verificare se il campo è conservativo e in caso affermativo calcolarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo l'arco di iperbole di equazione:

$$x^2 - 3y^2 = 1, \quad 2 \leq x \leq 3$$

percorso per valori crescenti di x.

Esercizio 21. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}dy.$$

(1) Stabilire se ω è esatta e in caso affermativo trovarne una primitiva.
(2) Calcolare $\int_{\mathcal{C}} \omega$, dove $\mathcal{C}$ è la curva di equazione:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \pi \leq t \leq 2\pi$$

percorsa nel verso delle t crescenti.

Esercizio 22. Sia

$$\mathbf{F} = (\frac{1}{x+y})\mathbf{i} + (\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y})\mathbf{j}.$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = t \\ y = e^{-t^2} \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

percorso nel verso delle t crescenti.
(Sugg: Si verifichi se il campo è conservativo.)

Esercizio 23. Sia $\mathcal{C}$ la curva intersezione della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$ con il cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (z-y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

Calcolare:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

(Si scelga una orientazione qualsiaisi su $\mathcal{C}$.)

Esercizio 24. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 - z^2)\mathbf{k}.$$

(1) Determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo l'arco di elica circolare

$$r(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 25. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

(1) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.
(2) $\mathbf{F}$ è conservativo?
(3) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva definito in (1).

Esercizio 26. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(1 - (x^2 + y^2))^2}\mathbf{i} + \frac{y}{(1 - (x^2 + y^2))^2}\mathbf{j}.$$

(1) Determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{G} = \mathbf{F} + y\mathbf{i}$ lungo l' arco di curva di equazione

$$r(t) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 27. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = 2x\ln z\mathbf{i} + 3y^2 z\mathbf{j} + +(\frac{x^2}{z} + y^3)\mathbf{k}.$$

Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ intersezione delle due superfici $z = \ln(1 + x)$ e $y = x$ dal punto $(0, 0, 0)$ al punto $(1, 1, \ln 2)$.

Esercizio 28. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + (4 - x)\mathbf{j}.$$

(1) Determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{G} = \mathbf{F} + y^2\mathbf{i}$ lungo l' arco di curva di equazione

$$r(t) : \begin{cases} x = t^2 \\ y = \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 29. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + y(1+\frac{1}{x^2+y^2})\mathbf{j}.$$

Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e calcolare il lavoro compiuto lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.

Esercizio 30. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (ye^{xy})\mathbf{i} + (xe^{xy} + 2y)\mathbf{j}.$$

(1) Verificare che il campo è conservativo e trovarne un potenziale.

Sia $\mathbf{G} = \mathbf{F} + x\mathbf{j}$.

(2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{G}$ lungo l'arco di curva

$$r(t) : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

percorso nel verso delle t crescenti.

conservativo.)

Esercizio 31. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}.$$

(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la semicirconferenza del piano x, y di equazione $x^2+y^2 = 1, \quad x \ge 0$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 32. Si consideri il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + (z+1)e^z\mathbf{k}.$$

(1) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazione vettoriale: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}\ 0 \le t \le 1$, percorsa in senso antiorario.

Esercizio 33. Si considerino il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}.$$

(1) Determinare se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso affermativo trovarne un potenziale.
(2) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

percorsa nel verso delle t crescenti.

(3) Scrivere un' equazione differenziale soddisfatta dalle linee di campo del campo $\mathbf{F}$ e risolverla.