

Una passeggiata tra i Sistemi Dinamici

Giancarlo Benettin

Scuola Galileiana, a.a. 2011–2012

I *Sistemi Dinamici* costituiscono un ramo della Fisica Matematica, fortemente connesso ad altre discipline (Analisi Matematica, Meccanica Celeste e Meccanica Statistica soprattutto, ma anche Fluidodinamica, Ecologia, Economia, Chimica...), tra quelli che hanno avuto maggiore espansione negli ultimi tre o quattro decenni. Le basi della teoria vengono da lontano e si possono ricercare, principalmente, nell'opera di Poincaré (ma anche di Boltzmann) a fine '800. Il termine *Dynamical Systems* appare, forse per la prima volta, a titolo di un'opera di Birkhoff, nel 1927. La teoria dei Sistemi Dinamici decolla, con risultati fondamentali, grosso modo negli anni '50 del '900 (Smale, Kolmogorov...), e nel decennio successivo riceve il potente innesto degli studi condotti, principalmente da Fisici e astronomi, con metodi numerici: quello che Poincaré e pochi altri avevano compreso, si "vede" all'opera sullo schermo di un calcolatore; la fenomenologia appare a volte stupefacente, e un numero crescente di studiosi ne è interessato. Oggi i libri sui sistemi dinamici non si contano e molte sedi universitarie hanno corsi dedicati.

Queste note, non sistematiche e basate soprattutto su esempi, mirano a comunicare nel modo più semplice possibile alcune delle idee principali della teoria. Sono limitate, per necessità, a quello che è comprensibile a un bravo studente di una laurea triennale in una facoltà scientifica. Si parlerà di cose semplici, ma non banali, soprattutto nella parte dedicata ai cosiddetti "moti caotici". Anche per le cose più semplici si cercherà di introdurre un punto di vista nuovo, un nuovo linguaggio, e nuove domande, sempre più importanti delle risposte. Gli studenti interessati avranno sicuramente la possibilità di approfondire lo studio in corsi successivi.

INDICE

1. **Introduzione**
 - 1.1 *Sistemi a tempo continuo*
 - 1.2 *Sistemi a tempo discreto*
 - 1.3 *Determinismo?*
 - 1.4 *La nozione formale di Sistema Dinamico*
 - 1.5 *Queste note*
2. **Equazioni differenziali in \mathbb{R} e biforcazioni**
 - 2.1 *Punti di equilibrio e stabilità*
 - 2.2 *Biforcazioni*
 - 2.3 *Altri esempi*
3. **Flussi in due dimensioni**
 - 3.1 *Il flusso lineare sul toro*
 - 3.3 *Dinamica delle popolazioni e sistema di Lotka–Volterra*
 - 3.4 *Classificazione dei punti critici in \mathbb{R}^2 e biforcazioni*
 - 3.5 *Il fenomeno del ciclo limite: equazioni di Lienard e di Van der Pol, la biforcazione di Hopf*
 - 3.6 *Insiemi asintotici e teorema di Poincaré–Bendixon*
4. **Flussi in dimensione tre, mappe bidimensionali, moti caotici**
 - 4.1 *Il pendolo forzato*
 - 4.2 *La “trasformazione del panettiere”*
 - 4.3 *Il “gatto di Arnol’d”*
 - 4.4 *Punti iperbolici; varietà stabile e instabile*
 - 4.5 *Intersezioni omocline*
 - 4.6 *La “catena di transizione” nel pendolo forzato*
 - 4.7 *Il metodo di Poincaré–Melnikov per la ricerca dei punti omoclini*

Appendici

- A. **Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie**
- B. **La mappa logistica**
- C. **Equazioni differenziali che preservano il volume**
- D. **La classificazione in \mathbb{R}^2 , per autovalori nulli o coincidenti.**
- E. **Il ciclo limite nell’orologio meccanico**
- F. **Il ciclo limite nell’equazione di Van der Pol per $\varepsilon > 0$ arbitrario.**
- G. **Un circuito amplificato con biforcazione di Hopf**
- H. **Dimostrazione del teorema di Poincaré–Bendixon**
- I. **Il modello di Hénon e Heiles**
- J. **Dimostrazione del teorema della varietà stabile**

*Il fine della rete è il pesce: preso il pesce metti da parte la rete.
Il fine del laccio è la lepre: presa la lepre metti da parte il laccio.
Il fine delle parole è l'idea: afferrata l'idea metti da parte le parole.*

Lao-tse

*Se chiudete la porta a tutti gli errori,
anche la verità ne resterà fuori*

R. Tagore

1 Introduzione

Con il termine *Sistemi Dinamici* ci si riferisce (in termini per il momento vaghi) a studi di carattere generale su sistemi in cui “qualche cosa evolve nel tempo” con legge deterministica.¹

Occorre dunque innanzitutto un luogo, uno *spazio* M in cui avviene il moto; ogni punto di M ha il significato di stato possibile per il sistema. La struttura minima su M , per poter imbastire una teoria interessante, è quella di spazio metrico: su M dovrà essere definita una distanza, e con essa una topologia. Ma di regola chiederemo di più, tipicamente che M sia un aperto contenuto in \mathbb{R}^n o più in generale una varietà differenziale² di dimensione finita n . Ma la familiarità con la nozione di varietà non sarà veramente necessaria; useremo il termine, ma pensare che si tratti di un aperto di \mathbb{R}^n sarà (quasi) sempre sufficiente.

Su M serve poi una dinamica, e dunque una variabile “tempo” t ; questa può essere continua, precisamente $t \in \mathbb{R}$ o $t \in \mathbb{R}^+$, come avviene quando si ha un’equazione differenziale ordinaria

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M,$$

oppure anche discreta, $t \in \mathbb{Z}$ o $t \in \mathbb{N}$; comunque sia, per ogni t , a ogni stato $x \in M$ dovrà corrispondere, deterministicamente, uno e un solo stato $\Phi^t(x) \in M$.

L’interesse della teoria dei sistemi dinamici non è tanto per i singoli moti — per esempio dove si troverà il sistema a un determinato istante di tempo, se messo in movimento con una certa condizione iniziale, come nel problema di Cauchy — ma per il comportamento d’insieme.

- Innanzitutto, saranno rilevanti proprietà che riguardano non singoli dati iniziali, ma insiemi aperti di dati iniziali. Si rifletta: ogni volta in cui si discute di stabilità di un punto di equilibrio, si afferma qualche cosa a proposito di un aperto di dati iniziali che circonda il punto di equilibrio.
- L’attenzione poi non sarà rivolta al comportamento del sistema per tempi finiti — quello che fa $\Phi^t(x)$ tra $t = 0$ e un qualche t finale — ma solo al comportamento asintotico di $\Phi^t(x)$ per $t \rightarrow \infty$. Le comuni nozioni di punto di equilibrio, traiettoria periodica, stabilità eventualmente asintotica, traiettoria densa in una regione... sono tutte nozioni asintotiche. Per tempi finiti viceversa ogni moto è un arco di curva (un insieme finito di punti, nel caso discreto), e poco altro c’è da dire (a meno che non ci interessi un moto particolare, ad esempio per centrare un bersaglio).
- Infine, interessa molto la possibile “robustezza” delle affermazioni che faremo, per piccoli cambiamenti alla dinamica; nel caso dell’equazione differenziale, se si passa da f a una f' in qualche senso vicina a f . E’ un problema molto difficile da affrontare nella sua generalità, ma è invece accessibile lo studio, ad esempio, di famiglie a un parametro di equazioni differenziali $\dot{x} = f_\mu(x)$; di ogni proprietà qualitativa, per esempio avere un punto di equilibrio stabile, ci si potrà chiedere se la proprietà persiste al variare di μ , e si distingueranno valori ordinari del parametro, in cui nulla succede, e valori critici, attraversando i quali le cose cambiano.

¹Ma esiste anche una teoria dei Sistemi Dinamici Stocastici, della quale non ci occuperemo, nella quale la probabilità entra in modo essenziale già nella legge di evoluzione.

²La nozione di varietà differenziale è il contesto naturale per la definizione di sistema dinamico (nel caso regolare, “smooth dynamical systems”), per questo vi facciamo riferimento a beneficio di chi ha già un minimo di familiarità. “Varietà” è la formalizzazione appropriata di “superficie n -dimensionale”; sono varietà, per $n = 2$, il piano, il cilindro, la sfera, il toro, tutto \mathbb{R}^2 o un qualunque suo sottoinsieme aperto. E’ una varietà n -dimensionale il toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. E’ una varietà tridimensionale l’insieme di tutte le matrici di rotazione (le matrici ortogonali 3×3 con determinante uno), che costituisce lo spazio delle configurazioni del corpo rigido.

1.1 Sistemi a tempo continuo

Consideriamo allora in caso di sistemi retti da (sistemi di) equazioni differenziali in \mathbb{R}^n , che scriviamo con la notazione

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M, \quad (1.1)$$

ove M è un aperto contenuto in \mathbb{R}^n o più in generale una varietà n -dimensionale. La funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, che supporremo sempre regolare,³ è detta *campo vettoriale* su M ; se M è una varietà, $f(x)$ sta nel piano tangente a M in x . Si osservi che abbiamo preso in considerazione solo il caso in cui f non dipende esplicitamente dal tempo (sistemi *autonomi*). Alcune nozioni di base sulle equazioni differenziali sono richiamate nell'appendice A. La soluzione al tempo t , corrispondente al dato iniziale x , sarà denotata $\Phi^t(x)$. Supporremo sempre che la soluzione sia prolungabile per $t \in \mathbb{R}$, o almeno per $t \in \mathbb{R}^+$; è un requisito importante proprio perché, come già si è detto, è cruciale poter guardare al comportamento asintotico del sistema a tempi lunghi. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, oppure $t \in \mathbb{R}^+$, si ha così una mappa

$$\Phi^t: M \rightarrow M$$

regolare ($\Phi^t(x)$ dipende in modo regolare dal dato iniziale x , nella stessa classe di regolarità di f); se $t \in \mathbb{R}$ la mappa è anche invertibile con inversa regolare, ovvero è un *diffeomorfismo*: $M \rightarrow M$. L'insieme di tutte le mappe

$$\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\} \quad (1.2)$$

è detto *flusso* del sistema, o *semiflusso* nel caso $t \in \mathbb{R}^+$. Si verifica con facilità che, per il flusso,

$$\Phi^0 = \text{Identità}, \quad (\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}, \quad \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}, \quad (1.3)$$

ovvero Φ è un gruppo. Per il semiflusso non esiste in generale l'inversa, e si ha un semigrupp.

I punti x^* nei quali il campo f si annulla sono detti *punti critici*, o anche *punti singolari* del campo; i punti critici sono anche *punti di equilibrio*, ovvero soluzioni costanti: $\Phi^t(x^*) = x^*$ per ogni t . Lo studio dei punti di equilibrio è sempre interessante, ed è quello da cui in genere si comincia per capire il comportamento di un sistema.

◦ ESEMPIO 1 Un esempio più che elementare in dimensione $n = 1$ è dato dall'equazione lineare

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

risolta dall'esponenziale

$$\Phi^t(x) = x e^{\alpha t}. \quad (1.5)$$

Per $\alpha < 0$ il modello descrive il decadimento radioattivo, o la decrescita di una popolazione in cui la natalità sia inferiore alla mortalità; per $\alpha > 0$ descrive invece una popolazione in crescita: la natalità prevale e il ritmo di crescita è semplicemente proporzionale al numero di individui esistenti. Può trattarsi di una popolazione nel senso comune della parola — purché viva in un ambiente dotato di risorse illimitate⁴ — oppure una rendita o un debito

³Qui e nel seguito: “regolare quanto basta”. Non indagheremo mai sui requisiti minimi di regolarità delle funzioni in gioco. Salvo avviso esplicito, tutto si può pensare di classe C^∞ (eventualmente a tratti), anche se di regola basta di meno.

⁴Famoso è il caso dei conigli in Australia. Nel 1859 furono importate e lasciate libere (per la caccia) dodici coppie di conigli selvatici, che prive di nemici naturali cominciarono a moltiplicarsi esponenzialmente. Nel 1900 erano diffusi in tutto il continente, con dani incalcolabili alle coltivazioni. Nel 1950 la popolazione stimata era di 600 milioni, e per contenerne il numero fu importata di proposito una micidiale malattia (la Mixomatosi). La popolazione scese a circa 100 milioni, ma successivamente, grazie all'elaborazione di resistenza specifica all'infezione, riprese a salire; nel 1991 era stimata tra i 200 e i 300 milioni di individui.

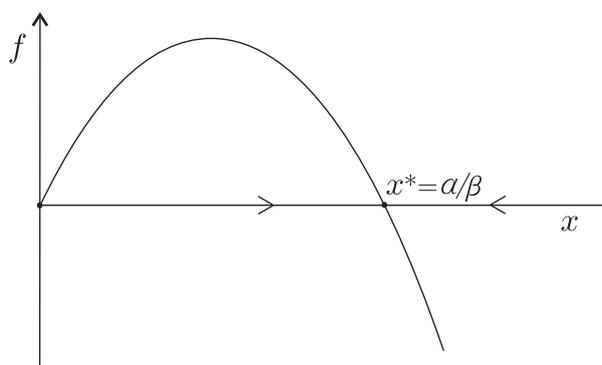


Figura 1: L'equazione logistica.

a interesse fisso, o il “PIL” di una nazione a sviluppo costante. La legge esponenziale (1.5) è detta *crescita malthusiana*, dal nome dell'economista inglese Thomas Malthus che nel suo trattato *Essay on Population* (1798) per primo ne sottolineò l'importanza (e i pericoli). Alla linearità della (1.4) corrisponde un'invarianza di scala del problema: se poniamo $x' = cx$, con $c \neq 0$ qualsiasi, x' soddisfa la medesima equazione.

- ESEMPIO 2 Un modello più realistico, in cui si tiene conto della competizione per le risorse all'interno della popolazione, è la cosiddetta *equazione logistica*, ovvero

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.6)$$

(figura 1). E' immediato verificare che l'origine e $x^* = \alpha/\beta$ sono punti di equilibrio (infatti, $f(0) = f(x^*) = 0$), che il primo è instabile e il secondo stabile, e che per ogni $x > 0$ si ha $\Phi^t(x) \rightarrow x^*$ per $t \rightarrow \infty$. Queste proprietà qualitative sono “robuste”, ovvero permangono anche se a secondo membro della (1.6) sostituiamo la parabola con una curva non troppo diversa, ad esempio con un tratto di senoide; per questo non interessa molto la soluzione esatta, che pure nel caso della parabola sarebbe facile da ricavare,⁵ mentre le proprietà qualitative della soluzione sono molto più interessanti.

Per $\alpha, \beta \neq 0$ l'equazione differenziale (1.6) si può vantaggiosamente portare nella forma

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x),$$

risparmiando una costante senza per questo perdere di generalità: basta con evidenza eseguire il riscalamento $x = \frac{\alpha}{\beta} x'$ e rimuovere poi gli apici. E' una operazione di normalizzazione, che porta il punto di equilibrio x^* — la scala del problema — a uno. Modificando poi anche la scala di tempo, precisamente passando da t al tempo riscalato $t' = \alpha t$ (adimensionale, si osservi), anche la costante α sparisce e si ha l'equazione

$$\dot{x} = x(1 - x). \quad (1.7)$$

La (1.7), in generale un'equazione scritta con il minimo numero di costanti necessarie (qui nessuna costante), o comunque scritta nella forma più semplice possibile ma equivalente all'equazione di partenza tramite un cambiamento di variabili (qui il semplice riscalamento) è detta *forma normale* dell'equazione.

⁵Separando le variabili si trova $dt = dx/(\alpha x - \beta x^2)$; segue $t = c + \alpha^{-1} \log \frac{x}{\alpha - \beta x}$ e infine $x(t) = \alpha/(\beta + C e^{-\alpha t})$, con C costante arbitraria.

- ESEMPIO 3 Si consideri l'equazione differenziale in \mathbb{R}

$$\dot{x} = -x^2 .$$

L'equazione (separazione di variabili) è risolta da $\Phi^t(x) = x/(1 + xt)$, perciò abbiamo un semiflusso (ma non un flusso, per la singolarità a $t = -1/x$) definito su $M = \mathbb{R}^+$.

1.2 Sistemi a tempo discreto

Veniamo ora ai sistemi a tempo discreto. Questi possono essere sistemi in cui per natura sua il tempo è una variabile discreta: ad esempio posso studiare popolazioni, come è tipico di molte specie di insetti, che hanno carattere stagionale, e pensare che la quantità x di farfalle, o di api, che osserverò l'anno prossimo (sempre che l'ambiente si possa considerare costante) sia una funzione della quantità che osservo quest'anno:

$$x_{t+1} = \Phi(x_t) , \tag{1.8}$$

e dunque, iterando,

$$x_t = \Phi^t(x_0) ,$$

con Φ^t potenza (o iterata) t -esima di Φ .

- ESEMPIO 4 L'analogo discreto della crescita malthusiana è dato dalla mappa

$$x_{t+1} = ax_t , \quad a > 0 ,$$

con soluzione esponenziale $\Phi^t(x) = a^t x$. Per $a > 1$ (analogo a $\alpha > 0$ del caso continuo) la mappa rappresenta una popolazione che cresce a ritmo costante in un ambiente a risorse illimitate;⁶ per $a < 1$ la popolazione si estingue.

Se la competizione diviene importante si può inserire nel modello un effetto di saturazione, tale da produrre convergenza verso una situazione di equilibrio.

- ESEMPIO 5 Si consideri la legge di crescita (1.8), con Φ monotona della forma qualitativa riportata in figura 2, ad esempio

$$\Phi(x) = \frac{ax}{1 + bx} , \quad a > 1 , b > 0$$

(la semiretta in figura è la bisettrice). L'intersezione x^* della curva con la bisettrice è un punto fisso della mappa, ovvero $\Phi(x^*) = x^*$ (nell'esempio, $x^* = (a - 1)/b$). Non è difficile convincersi⁷ che per ogni dato iniziale $x > 0$ si ha $\Phi^t(x) \rightarrow x^*$ per $t \rightarrow \infty$ (si veda la costruzione grafica in figura; la bisettrice serve a riportare sull'asse x i valori di $\Phi(x)$).

⁶Un batterio ha misure tipiche di $1 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$, ovvero occupa una superficie di circa $4 \times 10^{-12} \text{m}^2$. Ogni mezz'ora circa i batteri si dividono in due e il loro numero raddoppia. Se la crescita fosse malthusiana, quanto impiegherebbero a ricoprire la superficie della Terra? ($R \simeq 6400 \text{Km}$).

⁷Una dimostrazione formale si ottiene osservando che la successione $\Phi^t(x)$ è monotona limitata, crescente per $x < x^*$ e decrescente per $x > x^*$; il limite è necessariamente un punto fisso e pertanto coincide con x^* .

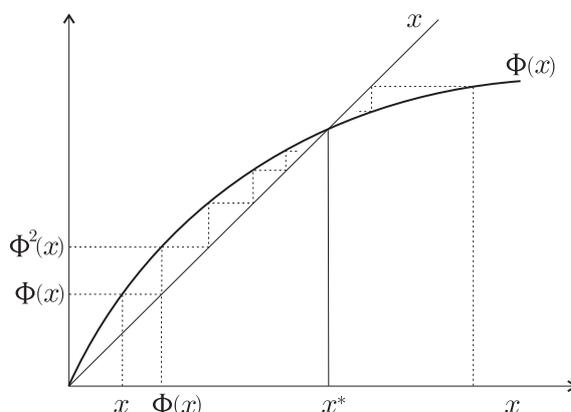


Figura 2: *Crescita malthusiana corretta da una moderata competizione.*

Se poi la competizione diviene importante al punto che Φ non è più funzione monotona di x , il comportamento può essere *molto* complicato; un esempio interessante, la *mappa logistica*, è riportato nell'appendice B.

L'iterazione di mappe interviene in moltissimi problemi che nulla hanno a che vedere con la dinamica di popolazioni, compresi semplici problemi di carattere matematico.

- ESEMPIO 6 Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$, con $\det A \neq 0$; per x nella sfera unitaria

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \quad \|\cdot\| = \text{norma euclidea},$$

poniamo

$$\Phi(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}, \quad \Phi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1},$$

e mettiamoci nel caso semplice $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, ove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ denotano gli autovalori di A . Si vede facilmente (si ragioni nella base in cui A è diagonale) che per quasi ogni x si ha

$$\Phi^t(x) \rightarrow x^{(1)}$$

ove $x^{(1)}$ è un autovettore di A corrispondente al massimo autovalore di A ; questa idea è alla base dei metodi numerici di diagonalizzazione di matrici simmetriche.⁸

- ESEMPIO 7 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di cui vogliamo cercare numericamente gli zeri. Un algoritmo interessante è il cosiddetto *metodo di Newton*, o *della tangente* (figura 3), che è iterativo e si scrive

$$\Phi(x) = x - f(x)/f'(x),$$

ove f' denota la derivata di f . Se il valore iniziale x approssima abbastanza bene uno zero x^* — il punto x , si dice, è nel *bacino di attrazione* di x^* — allora $\Phi^t(x)$ converge molto

⁸La convergenza è esponenziale:

$$\|\Phi^t(x) - x^{(1)}\| < \text{cost} (\lambda_1/|\lambda_2|)^t.$$

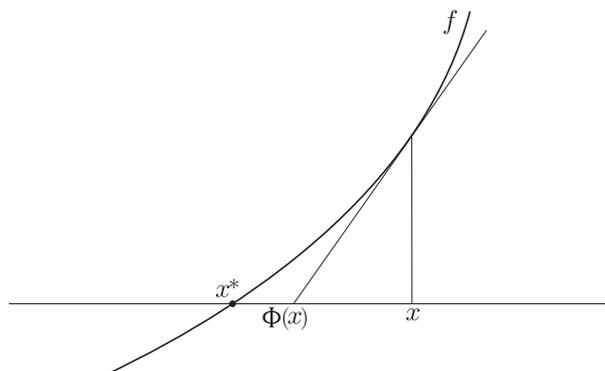


Figura 3: Il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione.

rapidamente⁹ a x^* . A volte il bacino dello zero è grande: per esercizio, si calcoli $\sqrt{2}$ come zero di $f(x) = x^2 - 2$, prendendo come prima approssimazione $x = 1000$. Altre volte il bacino è piccolo, e se il primo punto x non è scelto oculatamente, $\Phi^t(x)$ può convergere a un diverso zero, o divergere all'infinito, o oscillare. L'algoritmo si generalizza a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, nella forma

$$\Phi(x) = x - J^{-1}(x)f(x) ,$$

ove J è la matrice jacobiana di f .

I sistemi a tempo discreto intervengono anche in connessione a sistemi di per sé a tempo continuo, quando interessi registrarne lo stato a intervalli regolari di tempo (esempio: tutti i giorni alle 8 precise), oppure quando una particolare variabile assume un valore assegnato (*mappa di Poincaré*; esempio: tutti i giorni al sorgere del sole). Avremo modo di fare esempi.

Se Φ è una mappa invertibile $M \rightarrow M$, l'insieme delle sue iterate

$$\Phi = \{\Phi^t : t \in \mathbb{Z}\}$$

(con innocua improprietà di linguaggio abbiamo denotato con Φ sia la mappa sia l'insieme), costituisce l'analogo del flusso definito nella (1.2); la proprietà gruppale è del tutto ovvia. Per le mappe non invertibili Φ^t esiste solo per $t \geq 0$, e corrispondentemente

$$\Phi = \{\Phi^t : t \in \mathbb{N}\}$$

è un semigruppato.

1.3 Determinismo?

Come abbiamo visto, per ogni fissato t , sia nel caso continuo che in quello discreto, si ha una mappa regolare $\Phi^t : M \rightarrow M$; così, se accanto al dato iniziale x prendiamo un secondo dato iniziale y prossimo a x , e lo facciamo tendere a x , per ogni t fissato anche $\Phi^t(y)$ tende a $\Phi^t(x)$. Precisamente (figura 4) posto

$$d_0 = \text{dist}(x, y) , \quad d_t = \text{dist}(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) ,$$

⁹La convergenza è superesponenziale: se $\varepsilon = |x - x^*|$ è piccolo, allora $|\Phi(x) - x^*| \sim \varepsilon^2$, perciò iterando lo scarto da x^* cala con la progressione $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \dots$

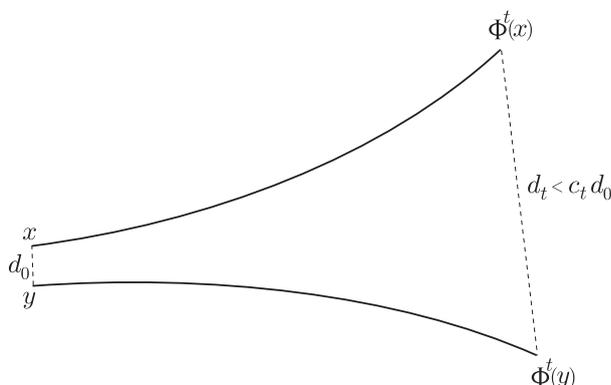


Figura 4: La continuità (non uniforme in t) di Φ^t

con opportuna c_t , grazie alla sola differenziabilità di $\Phi^t(x)$ in x , si ha

$$d_t < c_t d_0 . \quad (1.9)$$

Se interpretiamo d_0 come incertezza sul dato iniziale, e d_t come incertezza sullo stato al tempo t , è spontaneo vedere nella (1.9) il fondamento del *determinismo* dei fenomeni retti da equazioni differenziali (in particolare di tutta la meccanica): per ogni t fissato, un'osservazione iniziale sufficientemente precisa consente di conoscere, con precisione in linea di principio arbitraria, lo stato del sistema all'istante t . Laplace in particolare (1810 circa) enfatizzò molto questo punto di vista, osservando che passato e futuro di un sistema sono già racchiusi nel dato iniziale: un *eccellente* matematico, che avesse una conoscenza *perfetta* dello stato iniziale del sistema, in linea di principio potrebbe prevedere con esattezza tutto il suo passato e il suo futuro. E' un punto di vista significativo, che ha dominato la meccanica (in particolare la Meccanica Celeste) per quasi un secolo divenendo un vero e proprio paradigma per tutta la scienza, ma che verso fine '800, soprattutto a seguito dell'opera di Poincaré, si è rivelato debole e anzi, in un certo senso, perfino ingannevole. Il punto è che *la costante c_t nella (1.9) in genere dipende davvero da t , e in modo molto forte*: l'unica affermazione di carattere generale che si può fare (Appendice A) è che la (1.9) vale con $c_t = C e^{\lambda|t|}$, ove C, λ sono opportune costanti positive, ovvero la dipendenza di d_t da d_0 non è peggio che esponenziale,

$$d_t < C e^{\lambda|t|} d_0 . \quad (1.10)$$

Ma una capacità di previsione come quella espressa dalla 1.10 è davvero povera, e quasi inutile, come mostra un esempio elementare, precisamente un comune pendolo in prossimità del suo punto di equilibrio instabile (*pendolo rivoltato*).

Consideriamo infatti un pendolo ideale, denotiamo con (ϑ, v) le sue variabili nel piano di fase, e per comodità prendiamo il punto di equilibrio instabile, anziché quello stabile come è abitudine, come origine (figura 5). Le equazioni del moto si scrivono allora

$$\dot{\vartheta} = v , \quad \dot{v} = +\omega^2 \sin \vartheta , \quad \text{ove } \omega^2 = \frac{g}{l} .$$

Per procedere spediti approssimiamo la seconda equazione con la linearizzata

$$\dot{v} = \omega^2 \vartheta$$

(nulla cambierebbe in realtà considerando l'equazione esatta); la soluzione corrispondente al dato iniziale $x_0 = (\vartheta_0, v_0)$ si scrive allora immediatamente:

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= \frac{1}{2}(\vartheta_0 + v_0/\omega) e^{\omega t} + \frac{1}{2}(\vartheta_0 - v_0/\omega) e^{-\omega t} \\ v(t) &= \frac{1}{2}(\omega\vartheta_0 + v_0) e^{\omega t} - \frac{1}{2}(\omega\vartheta_0 - v_0) e^{-\omega t} .\end{aligned}$$

Riferiamoci per concretezza a un pendolo lungo 10 cm, cosicché $\omega \simeq 10 \text{ sec}^{-1}$; supponiamo di essere in grado di lasciarlo con velocità v_0 esattamente nulla in posizione ϑ_0 , e chiediamoci quanto tempo impiega a cadere fino a un prefissato angolo Θ . La soluzione corrispondente ai dati iniziali $(\vartheta_0, 0)$ si scrive, limitatamente a ϑ ,

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\vartheta_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) .$$

Se (per tempi positivi) trascuriamo $e^{-\omega t}$ rispetto a $e^{\omega t}$, troviamo che si raggiunge l'angolo Θ nel tempo

$$t \simeq \frac{1}{\omega} \log \frac{2\Theta}{\vartheta_0} .$$

Prendiamo per esempio $\Theta = 0.5 \text{ rad}$. Per $\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$ (equilibrio centrato a meno di 0.1 mm) si trova $t \simeq 0.7 \text{ sec}$, piuttosto piccolo. Per farlo crescere si può pensare di ridurre ϑ_0 , ad esempio fino a 10^{-6} rad . Ma *grazie alla legge logaritmica, ovvero agli esponenziali nella soluzione*, t si limita a raddoppiare. Se anche pensassimo di ridurre ϑ_0 al valore surreale 10^{-12} rad — la distanza dal punto di equilibrio è di ordini di grandezza inferiore al diametro di un atomo — il valore di t non cresce molto, $t \simeq 3 \text{ sec}$. E' dunque corretto affermare che il sistema è deterministico e in particolare, ad esempio, che per ϑ_0 (oltre a v_0) nullo sarebbe $\vartheta(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma basta un'incertezza minuscola sul dato iniziale — 10^{-12} radianti! — perché già dopo pochi secondi (più esattamente: dopo qualche decina di “tempi propri” ω^{-1}) non si sappia ormai più niente: cade a destra? A sinistra? Resta fermo?

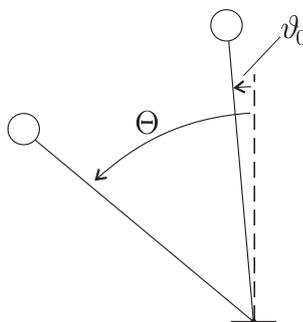
E' avendo in mente esempi di questo genere — sistemi semplici, ma con gli esponenziali nella dinamica che per inversione danno i logaritmi — che abbiamo detto sopra che l'attenzione ai singoli moti, e la visuale radiosamente deterministica alla Laplace, pur essendo corretta, non è sempre la più profonda e la più interessante. Possiamo anche ridire le cose a questo modo: il determinismo richiede che innanzitutto si faccia, per ogni t fissato, il limite $d_0 \rightarrow 0$, e che solo poi si muova t . Ma questa è solo una parte dell'informazione. Più in generale, fissata in modo qualsiasi una tolleranza massima ($\Theta = 0.5 \text{ rad}$ nell'esempio), possiamo chiederci come possiamo mandare a zero d_0 e contemporaneamente all'infinito t , senza uscire dalla tolleranza. L'esempio mostra che non appena vi siano gli esponenziali nella soluzione, t cresce solo col logaritmo di d_0 , e corrispondentemente la capacità di previsione, a meno di valori di d_0 assurdamente piccoli, è limitata.¹⁰

Ritorniamo più avanti su sistemi in cui tutta la dinamica, o comunque una parte rilevante di essa (cioè non solo l'intorno di un punto di equilibrio instabile) è caratterizzata dalla presenza degli esponenziali, e dunque da una sostanziale imprevedibilità, come nell'esempio del pendolo rivoltato.

1.4 La nozione formale di Sistema Dinamico

Possiamo concludere con una definizione formale di Sistema Dinamico, che alla luce delle considerazioni precedenti dovrebbe apparire naturale:

¹⁰Il logaritmo, come è noto, è una funzione illimitata: $\log x$ diverge per $x \rightarrow \infty$. Ma in situazioni fisiche sensate è impossibile trovare un logaritmo veramente grande. Se x è il rapporto tra il diametro stimato dell'Universo (circa 10^{10} anni luce) e il diametro di un protone (10^{-15} m), il logaritmo naturale di x non arriva a 100.

Figura 5: *Determinismo?*

DEFINIZIONE 1 Sia M è una varietà differenziale di dimensione finita n e

$$\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R} \text{ oppure } \mathbb{R}^+ \text{ oppure } \mathbb{Z} \text{ oppure } \mathbb{N}\}$$

un gruppo ($t \in \mathbb{R}$ o $t \in \mathbb{Z}$) ovvero un semigruppato ($t \in \mathbb{R}^+$ o $t \in \mathbb{N}$) a un parametro di mappe regolari $\Phi^t : M \rightarrow M$, invertibili con inversa regolare se $t \in \mathbb{R}$ o $t \in \mathbb{Z}$. La coppia (M, Φ) è detta sistema dinamico regolare, continuo ovvero discreto a seconda che sia $t \in \mathbb{R}$ ovvero $t \in \mathbb{Z}$ o \mathbb{N} , invertibile se $t \in \mathbb{R}$ o \mathbb{Z} .

Sia M uno spazio metrico e $\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{Z} \text{ oppure } t \in \mathbb{N}\}$ un gruppo ovvero un semigruppato di mappe continue $\Phi^t : M \rightarrow M$, invertibili con inversa continua se $t \in \mathbb{Z}$. La coppia (M, Φ) è detta sistema dinamico topologico, invertibile se $t \in \mathbb{Z}$.

1.5 Queste note

La teoria dei Sistemi Dinamici è ampia e complessa. Noi ci limiteremo, in pratica, a una serie cucita il meglio possibile di esempi significativi, organizzatati per complessità crescente: una sorta di passeggiata tra i Sistemi Dinamici, una tra le tante possibili. Così la prossima sezione 2 riguarda le equazioni differenziali in \mathbb{R} , con enfasi sull'unico fenomeno interessante, le biforcazioni, di cui esamineremo i principali esempi. La successiva sezione 3 riguarda le equazioni differenziali in dimensione due, e mira alla comprensione del fenomeno più significativo in quest'ambito, il *ciclo limite*. La sezione 4 infine mostra come, passando a equazioni differenziali in dimensione tre, oppure a mappe in dimensione due, vi sia uno stacco significativo: il comportamento di sistemi apparentemente semplici può essere altamente complesso, e fa la sua apparizione un nuovo genere di moti, detti *caotici*, che (sempre attraverso esempi) cercheremo di descrivere, illustrando in dettaglio il principale meccanismo che li genera. Le appendici contengono materiale a carattere complementare, o dimostrazioni un po' tecniche che si è preferito scorporare dal testo.

2 Equazioni differenziali in \mathbb{R} e biforcazioni

2.1 Punti di equilibrio e stabilità

I sistemi dinamici più semplici sono le equazioni differenziali in una sola variabile, definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (eventualmente illimitato a destra e/o a sinistra):

$$\dot{x} = f(x), \quad f : I \rightarrow \mathbb{R};$$

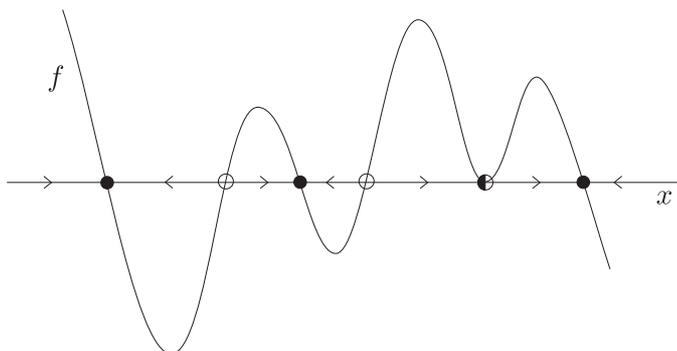


Figura 6: *Punti di equilibrio stabili • e instabili ◦ per $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

f è una ordinaria funzione $I \rightarrow \mathbb{R}$, ma è bene pensarla come campo vettoriale su I . Come funzione di x , $\Phi^t(x)$ è ovunque monotona crescente: banalmente, poiché i moti non si possono incrociare, si ha sempre $\Phi^t(x') > \Phi^t(x)$ se $x' > x$. I punti critici ovvero gli zeri di f sono punti di equilibrio, e non possono essere scavalcati. Tra due zeri diversi, aggiungendovi anche $\pm\infty$ se I è illimitato, la soluzione $\Phi^t(x)$, come funzione di t , è monotona: il movimento è verso destra se f è positiva, verso sinistra se negativa, restando esclusa qualunque oscillazione (figura 6). Se I è l'intervallo tra due zeri, allora la soluzione Φ^t è sicuramente definita per $t \in \mathbb{R}$, ovvero (I, Φ) è un sistema dinamico continuo invertibile secondo la definizione 1. Se I è illimitato, supporremo comunque che Φ^t sia definito almeno per $t \in \mathbb{R}^+$. Allora il limite di $\Phi^t(x)$ per $t \rightarrow \pm\infty$ in ogni caso esiste ed è uno degli zeri di f o $\pm\infty$.

- ESERCIZIO 1 Che ipotesi bisogna fare su f perchè $\Phi^t(x)$ esista per ogni $x \in I$ illimitato e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$?

Con evidenza gli zeri trasversi di f , cioè con derivata $f'(x^*) \neq 0$, sono asintoticamente stabili se $f'(x^*) < 0$, instabili (più precisamente, asintoticamente stabili nel passato) nel caso contrario. Gli zeri trasversi, si osservi, sono isolati (la funzione infatti è monotona stretta in un loro intorno). Se $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) \neq 0$ (una coppia di zeri coincidenti) si ha instabilità; più precisamente, se $f''(x^*) > 0$ si ha, con ovvio significato, *instabilità destra*, nel caso opposto si ha *instabilità sinistra*. La condizione di tangenza è evidentemente eccezionale.

2.2 Biforcazioni

Consideriamo ora un'equazione dipendente (in modo regolare) da un parametro reale μ ,

$$\dot{x} = f_\mu(x),$$

e supponiamo che per un certo valore $\bar{\mu}$ del parametro la funzione $f_{\bar{\mu}}$ abbia uno zero trasverso \bar{x} . Allora, per il teorema della funzione implicita,

esiste unica una funzione regolare $x^(\mu)$, definita per μ in un qualche intorno di $\bar{\mu}$, tale che $x^*(\bar{\mu}) = \bar{x}$ e $f_\mu(x^*(\mu)) = 0$ identicamente in μ .*

Ciò vuol dire che *gli zeri trasversi sono persistenti*, cioè permangono per piccole variazioni del parametro, restando evidentemente trasversi e in particolare mantenendo il segno di $f'_\mu(x^*(\mu))$. Questi valori di μ si dicono *ordinari*. Mutamenti qualitativi — comparsa o scomparsa di punti

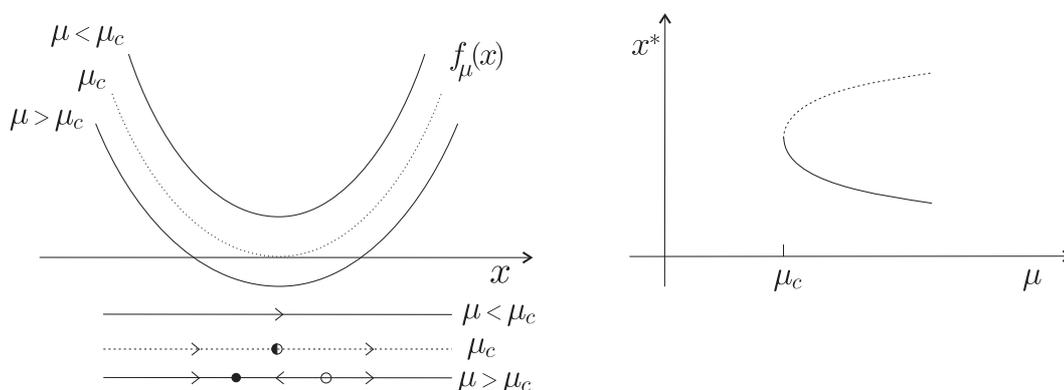


Figura 7: La biforcazione tangente (esempio 8)

di equilibrio, mutamento di stabilità di uno di essi — possono invece avvenire, ed è un fenomeno molto interessante, in corrispondenza a valori particolari del parametro, detti *critici*, in cui f_μ e la derivata f'_μ si annullano insieme. Il fenomeno è detto *biforcazione*; quelli che seguono sono i tre scenari più tipici del caso unidimensionale che stiamo studiando.

A — *Biforcazione tangente*.

- ESEMPIO 8 Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = (x - \hat{x})^2 - \mu .$$

C'è un valore critico μ_c , precisamente $\mu_c = 0$, tale che per $\mu < \mu_c$ non vi sono punti di equilibrio mentre per $\mu > \mu_c$ c'è una coppia di punti di equilibrio di cui uno stabile e l'altro instabile; nella situazione critica $\mu = \mu_c$ la funzione è tangente all'asse x e c'è un unico punto di equilibrio. Si veda la figura 7, sinistra. Se rappresentiamo in un grafico la posizione dei punti di equilibrio $x^*(\mu)$ come funzione di μ , si ottiene il diagramma rappresentato in figura 7, destra, detto *grafico della biforcazione*; è consuetudine rappresentare i punti stabili con un tratto continuo e quelli instabili con una linea tratteggiata. Viceversa, per l'equazione $\dot{x} = -(x - \hat{x})^2 - \mu$ si ha una coppia di punti di equilibrio per $\mu < \mu_c = 0$ e nessun punto di equilibrio per $\mu > \mu_c$.

Con ovvia terminologia il fenomeno è detto *biforcazione tangente*. Ecco un altro esempio:

- ESEMPIO 9 Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x - 2\mu x^2 + x^3 .$$

L'origine è sempre uno zero trasverso di f , è instabile, ed è l'unico punto di equilibrio per $\mu < \mu_c = 1$. Per $\mu > \mu_c$ si forma una coppia di zeri $x_{1,2}^* = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$, e il grafico della biforcazione (nel quale è stata riportata anche l'origine, sempre instabile) è come in figura 8.

Si ha una biforcazione tangente quando, in corrispondenza a un particolare valore μ_c del parametro, la funzione f_μ ha uno zero x^* con derivata prima $f'_{\mu_c}(x^*) = 0$, ma le successive derivate dominanti sono diverse da zero:

$$f''_{\mu_c}(x^*) \neq 0 , \quad \frac{\partial}{\partial \mu} f_\mu(x^*)|_{\mu_c} \neq 0 . \quad (2.1)$$

Precisamente:

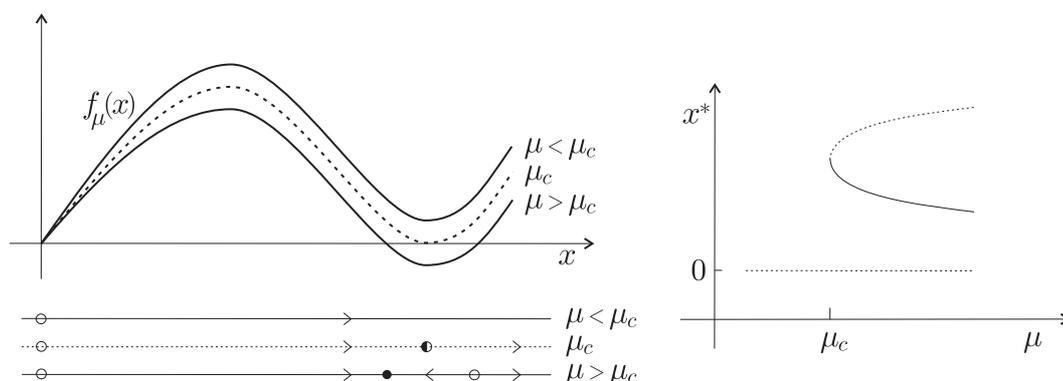


Figura 8: Un altro esempio di biforcazione tangente (esempio 9)

PROPOSIZIONE 1 Se $f_{\mu_c}(x^*) = f'_{\mu_c}(x^*) = 0$, e

$$f''_{\mu_c}(x^*) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} f_{\mu}(x^*)|_{\mu_c} < 0, \quad (2.2)$$

allora per μ attorno a μ_c si ha una biforcazione tangente, con assenza di punti critici per $\mu < \mu_c$ e presenza, per $\mu > \mu_c$, di due punti critici $x_{1,2}^*(\mu)$, $x_1^*(\mu) < x^* < x_2^*(\mu)$, nell'ordine stabile e instabile, a distanza $\mathcal{O}(\sqrt{\mu - \mu_c})$ da x^* .

Ovvie varianti dell'enunciato si ottengono invertendo una o entrambe le disuguaglianze nella (2.2).

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo qui la notazione, un po' più comoda, $f(\mu, x)$ al posto di $f_{\mu}(x)$. Non è evidentemente restrittivo supporre $\mu_c = 0$ e $x^* = 0$; lo sviluppo di Taylor di f si può allora scrivere

$$f(\mu, x) = -\alpha\mu + \beta x^2 + R(\mu, x),$$

con

$$\alpha = -\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0$$

e resto R contenente termini di ordine almeno μ^2 , μx e x^3 :

$$R(\mu, x) = a(\mu, x)\mu^2 + b(\mu, x)\mu x + c(\mu, x)x^3.$$

I valori di α e β non contano: un elementare riscalamento di x e del parametro, precisamente

$$x = \frac{x'}{\beta}, \quad \mu = \frac{\mu'}{\alpha\beta},$$

porta α e β a 1, mentre il resto mantiene la sua forma, con ovvia ridefinizione di a , b e c (la nuova equazione, si tenga presente, è $\dot{x}' = \beta f(\mu'/(\alpha\beta), x'/\beta)$). Togliendo gli apici, l'equazione differenziale ha ora la "forma normale"

$$\dot{x} = g(\mu, x) + R(\mu, x), \quad g(\mu, x) = x^2 - \mu.$$

Si conclude facilmente:

- per $\mu < 0$ piccolo e x prossimo all'origine, sicuramente \dot{x} è positivo e non vi sono zeri;

- per $\mu > 0$ piccolo, $g(\mu, \cdot)$ ha due zeri in $\pm\sqrt{\mu}$. Gli zeri si portano in ± 1 con il riscaldamento, non più banale perché dipendente da μ ,

$$x = \sqrt{\mu} \tilde{x} ,$$

che dà $R(\mu, \sqrt{\mu}\tilde{x}) = \mathcal{O}(\mu^{3/2})$, ovvero $R(\mu, \sqrt{\mu}\tilde{x}) = \mu^{3/2}r(\mu, \tilde{x})$, con r opportuna regolare in x e $\sqrt{\mu}$. Corrispondentemente l'equazione differenziale assume la forma

$$\dot{\tilde{x}} = \sqrt{\mu} \tilde{f}(\mu, \tilde{x}) , \quad \tilde{f}(\mu, \tilde{x}) = \tilde{x}^2 - 1 + \sqrt{\mu} r(\mu, \tilde{x}) .$$

Il fattore $\sqrt{\mu}$ di fronte a \tilde{f} è inessenziale: $\dot{\tilde{x}}$ si annulla se e solo se si annulla \tilde{f} . Ma per $\mu = 0$, \tilde{f} ha due zeri trasversi in ± 1 ; tali zeri sono persistenti e dunque esistono anche per $\mu > 0$ piccolo, restando prossimi a ± 1 . Corrispondentemente, tenendo conto del riscaldamento, f ha due zeri a cavallo dell'origine, a distanza $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ dall'origine, che sono nell'ordine stabile e instabile, come chiesto nell'enunciato. \square

L'unica idea da prendere nella dimostrazione è quella di portare f in “forma normale”, scrivendola come somma di una funzione g facile da trattare e di un resto piccolo, ininfluente; il passaggio delicato è il riscaldamento dipendente da μ , che determina la piccolezza del resto. Lo strumento matematico sottostante è chiaramente il teorema della funzione implicita, con la conseguente persistenza degli zeri trasversi. L'esempio 8 è già in forma normale, a meno della banale traslazione dell'origine su \hat{x} .

Se le (2.1) non sono soddisfatte, si possono avere biforcazioni di tipo diverso, come mostrano i prossimi esempi.

B – Biforcazione con scambio di stabilità.

- ESEMPIO 10 Consideriamo l'equazione logistica, riscritta nella forma

$$\dot{x} = \mu x - x^2 . \tag{2.3}$$

L'origine è sempre un punto di equilibrio; per μ diverso dal valore critico $\mu_c = 0$ si ha un secondo punto di equilibrio $x^* = \mu$, che transita attraverso l'origine quando μ attraversa μ_c . La funzione $f_\mu = \mu x - x^2$ e il grafico della biforcazione sono rappresentati in figura 9. Il fenomeno è detto, per ovvie ragioni, biforcazione con scambio di stabilità; si usa anche “biforcazione transcritica”.

Mentre la biforcazione tangente è generica per famiglie di funzioni dipendenti da un parametro — se si muta di poco (in modo regolare) una famiglia che ammette una biforcazione tangente, il fenomeno permane, perché permangono le (2.1) — invece la biforcazione con scambio di stabilità è in qualche modo eccezionale, e può scomparire modificando di poco la funzione f , come mostra l'esempio seguente.

- ESEMPIO 11 Se la (2.3) è sostituita da

$$\dot{x} = \mu x - x^2 + \varepsilon , \tag{2.4}$$

con $\varepsilon > 0$, allora si ha la situazione illustrata in figura 10.

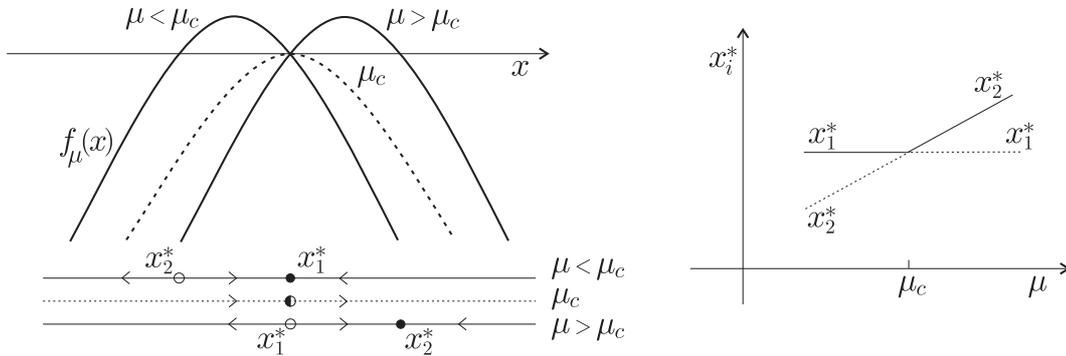


Figura 9: La biforcazione con scambio di stabilità (esempio 10)

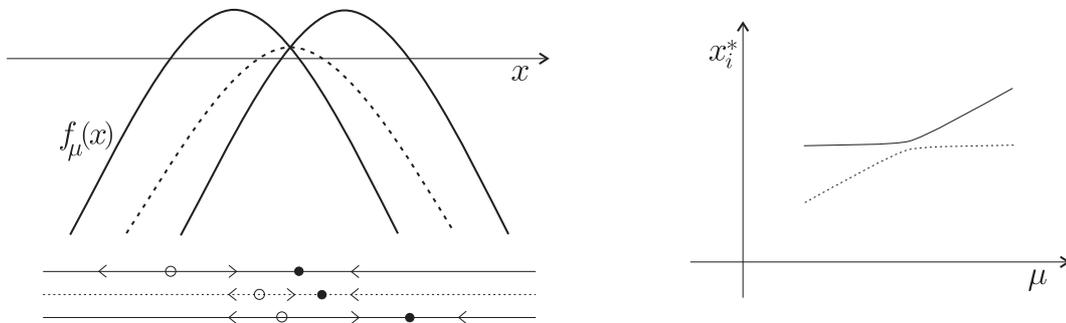


Figura 10: La biforcazione con scambio di stabilità “mancata” (esempio 11)

La situazione è detta (per ε piccolo) “biforcazione mancata”. La biforcazione ridiventa generica se c’è un secondo parametro aggiustabile (come ε nella (2.4)). Per avere una biforcazione con scambio di stabilità deve essere, come per la biforcazione tangente, $f_{\mu_c}(x^*) = 0$ con $f'_{\mu_c}(x^*) = 0$, ma (fatto non generico) la derivata di f_μ rispetto a μ in condizioni critiche deve anch’essa annullarsi.

- ESERCIZIO 2 Si studi la biforcazione mancata nell’equazione (2.4), per $\varepsilon < 0$.

C – Biforcazione a forchetta.

- ESEMPIO 12 Consideriamo l’equazione differenziale

$$\dot{x} = \mu x - x^3 . \tag{2.5}$$

Per ogni valore di μ , $x^* = 0$ è un punto di equilibrio. Con evidenza, quando μ attraversa il valore critico $\mu_c = 0$ l’origine da stabile diviene instabile — la pendenza $f'_\mu(0)$ cambia segno — e contemporaneamente si forma una coppia di punti di equilibrio stabili $x_{1,2}^*$ che fuoriescono dall’origine. Si veda la figura 11.

Il fenomeno è detto, per ovvie ragioni, *biforcazione a forchetta*.

- ESEMPIO 13 Una variante si ottiene cambiando il segno di x^3 nell’equazione (2.5), ovvero considerando l’equazione

$$\dot{x} = \mu x + x^3 ;$$

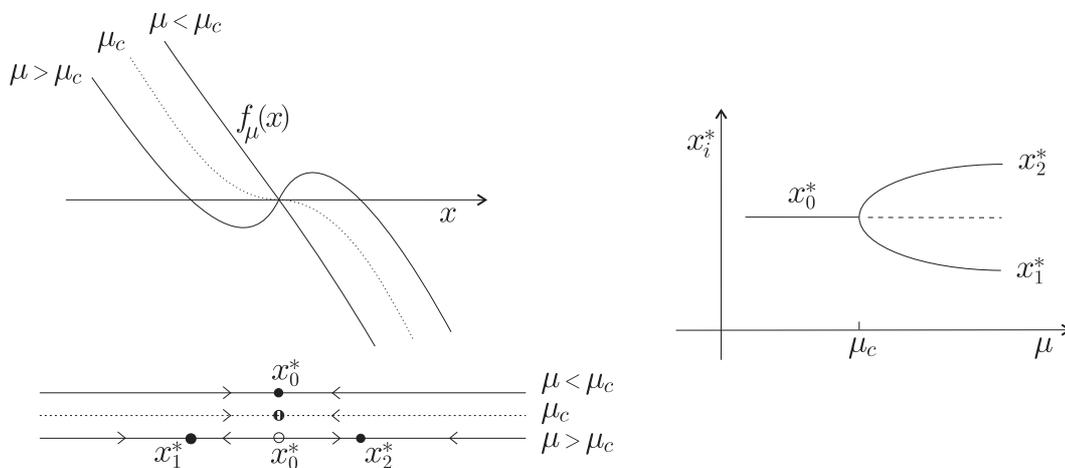


Figura 11: La biforcazione a forchetta (esempio 12)

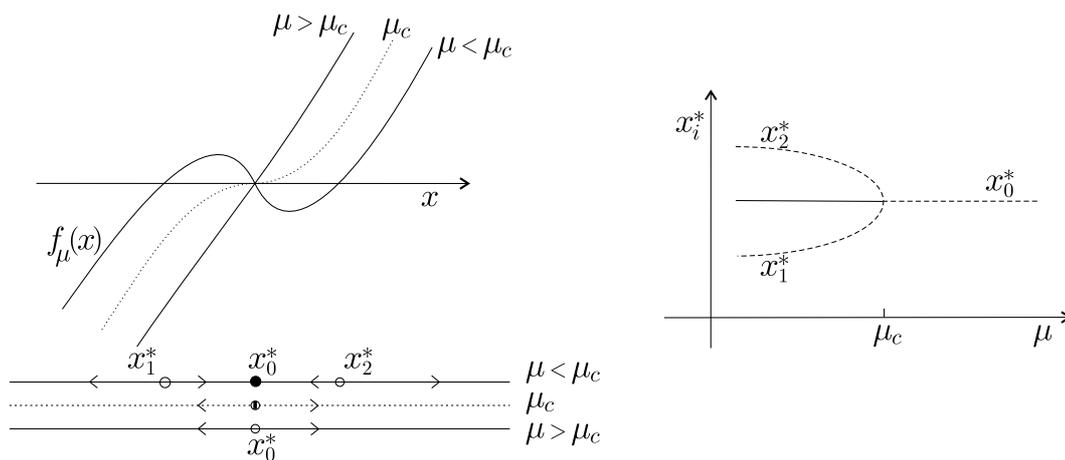


Figura 12: La biforcazione a forchetta inversa (esempio 13)

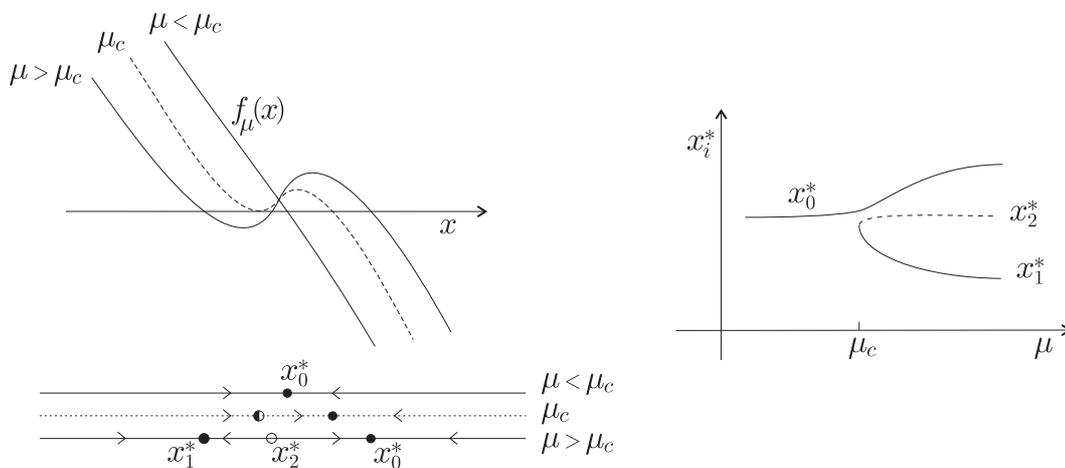


Figura 13: La biforcazione a forchetta "mancata" (esempio 14)

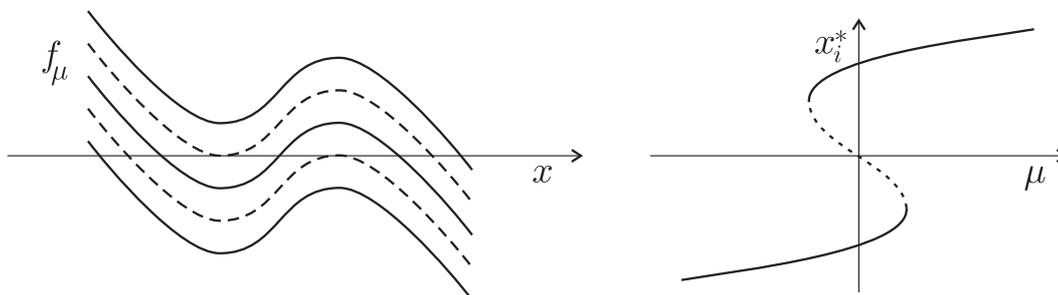


Figura 14: Due successive biforcazioni tangenti (esempio 15)

questa volta (figura 12) quando μ attraversa il valore critico $\mu_c = 0$ una coppia di punti di equilibrio instabili vanno a collassare su un punto di equilibrio stabile (l'origine), che biforca¹¹ diventando instabile.

Come nel caso della biforcazione con scambio di stabilità, il fenomeno non è generico, e scompare modificando di poco la famiglia f_μ .

- ESEMPIO 14 Se al posto della (2.5) si ha l'equazione

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + \varepsilon ,$$

per ε piccolo ma diverso da zero si ha la “biforcazione a forchetta mancata”, illustrata in figura 13.

- ESERCIZIO 3 Si cerchi una condizione sufficiente sulle derivate di f_μ , perché avvenga (a) una biforcazione con scambio di stabilità; (b) una biforcazione a forchetta. [*Suggerimento: procedendo come per la proposizione 1, si cerchi una forma normale, dividendo oculatamente i termini importanti dal resto. Per questo occorre sapere in anticipo, guardando agli zeri di f , che riscaldamento dipendente da μ si dovrà fare.*]

2.3 Altri esempi

Raccogliamo qui qualche altro esempio di sistema in cui avvengono biforcazioni.

- ESEMPIO 15 (Un modello di isteresi). Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f_\mu(x) , \quad f_\mu(x) = \mu + x - \frac{1}{3}x^3 .$$

L'andamento di f_μ per diversi valori di μ è illustrato in figura 14, ove è tracciato anche il grafico della biforcazione che consiste in due successive biforcazioni tangenti che avvengono per $\mu = \pm 2/3$: per $\mu < -2/3$ c'è un unico punto di equilibrio $x_1^*(\mu)$ stabile, per $-2/3 < \mu < 2/3$ ci sono tre punti di equilibrio $x_1^*(\mu) < x_2^*(\mu) < x_3^*(\mu)$ nell'ordine stabile, instabile e stabile, infine per $\mu > 2/3$ c'è solo $x_3^*(\mu)$ ed è stabile.

La connessione con l'isteresi sta nel fatto (del quale ci limitiamo qui a dare una trattazione euristica) che se il parametro μ viene fatto variare lentamente da un valore $\mu_0 < -2/3$ a un

¹¹Orribile italiano, ma si usa.

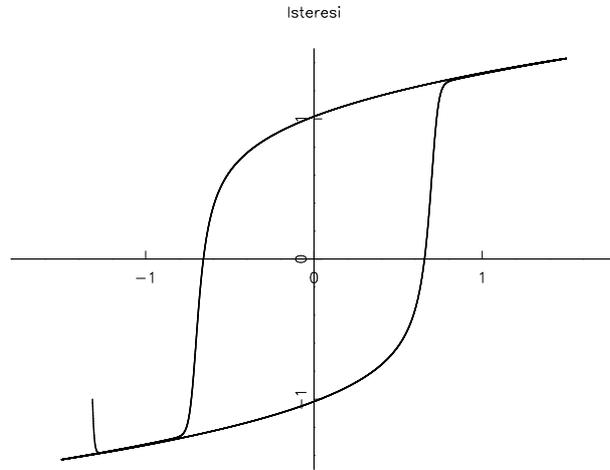


Figura 15: *Il fenomeno dell'isteresi per μ lentamente oscillante*

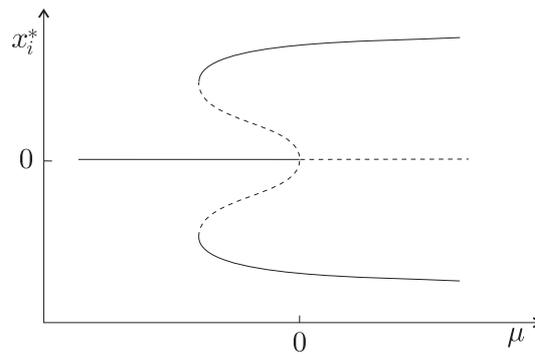


Figura 16: *Un problema più complesso con isteresi (esempio 16)*

valore $\mu_1 > 2/3$, allora la soluzione, che denotiamo brevemente $x(t)$, innanzitutto si porta in fretta praticamente a coincidere con il punto $x_1^*(\mu(t))$, poi lo segue nel suo lento movimento, infine quando $\mu(t)$ oltrepassa $2/3$ si porta in fretta su $x_3^*(t)$ e da quel momento in poi lo segue. Se poi μ viene lentamente riportato al valore di partenza — si pensi a un andamento oscillante, ad esempio $\mu(t) = -a \cos \varepsilon t$ con $a > 2/3$ e ε piccolo — la soluzione $x(t)$ esegue un ciclo di isteresi, si veda la figura 15.

- ESEMPIO 16 (un problema più complesso con isteresi). Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5. \quad (2.6)$$

Lo studio dettagliato è lasciato al lettore; il grafico della biforcazione (figura 16) comprende due biforcazioni tangenti e una biforcazione a forchetta. La presenza di una biforcazione a forchetta rende il sistema non generico (la biforcazione sparisce se il secondo membro della 2.6 si modifica in $\mu x + x^3 - x^5 + \varepsilon$, così da rompere la simmetria: restano tre biforcazioni tangenti). Anche con un sistema come questo si ha isteresi.

- ESEMPIO 17 (Equazione logistica con raccolto). Un sistema abbastanza interessante per la dinamica di una popolazione si ottiene prendendo l'equazione logistica (1.7) e correggendola

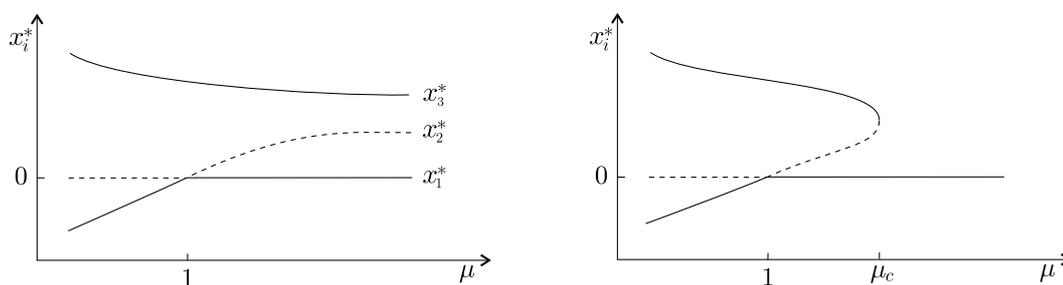


Figura 17: *Equazione logistica con raccolto: a sinistra $a < \frac{1}{4}$, a destra $\frac{1}{4} < a < 1$ (esempio 17)*

nel modo seguente:

$$\dot{x} = x(1 - x) - g_{\mu,a}(x), \quad g_{\mu,a}(x) = \frac{\mu x}{1 + \mu x/a};$$

il modello, si osservi, ha due parametri. Il termine correttivo $g_{\mu,a}(x)$ rappresenta il raccolto (se x è il numero di pesci, $g_{\mu,a}(x)$ rappresenta la sottrazione dovuta all'attività di pesca). Per x piccolo il raccolto è circa μx , dunque μ si può interpretare come efficienza nel raccogliere; per x grande il raccolto tende a a , dunque a si può pensare come valore di saturazione del mercato (la fame).

Non è difficile vedere che per $a < 1/4$ si ha la situazione descritta in figura 17a, con tre punti di equilibrio per ogni $\mu \neq 1$; per $\mu = 1$ si ha nell'origine una biforcazione con scambio di stabilità. Il punto di equilibrio indicato in figura come x_3^* è sempre stabile. E' una situazione abbastanza tranquilla: per $\mu < 1$ la soluzione si porta su x_3^* , dopodiché si può anche lasciar crescere μ senza rischio di estinzione.

Se invece $1/4 < a < 1$ si ha la situazione descritta in figura 17b, con una biforcazione tangente in corrispondenza a un valore critico $\mu_c(a)$. Per $\mu > \mu_c(a)$ l'unico punto di equilibrio è l'origine ed è stabile; l'interpretazione è che se il mercato chiede molto, e l'efficienza è abbastanza elevata, è inevitabile l'estinzione. Si potrebbe vedere che per $a = 1$ si ha, eccezionalmente, una biforcazione a forchetta nell'origine. Per $a \geq 1$ il valore critico di μ oltre il quale si ha l'estinzione è $\mu_c = 1$.

Vale la pena di osservare che la forma precisa del termine correttivo non è in alcun modo rilevante: quello che conta è avere una funzione crescente, con derivata nell'origine proporzionale al parametro μ , che per x grande satura al parametro a .

3 Flussi in due dimensioni

Come abbiamo visto, le equazioni differenziali in dimensione uno presentano una fenomenologia povera e gli unici fenomeni di interesse sono le biforcazioni. In dimensione due già sono presenti comportamenti più variati e interessanti, che qui andiamo ad esaminare cominciando dai più semplici.

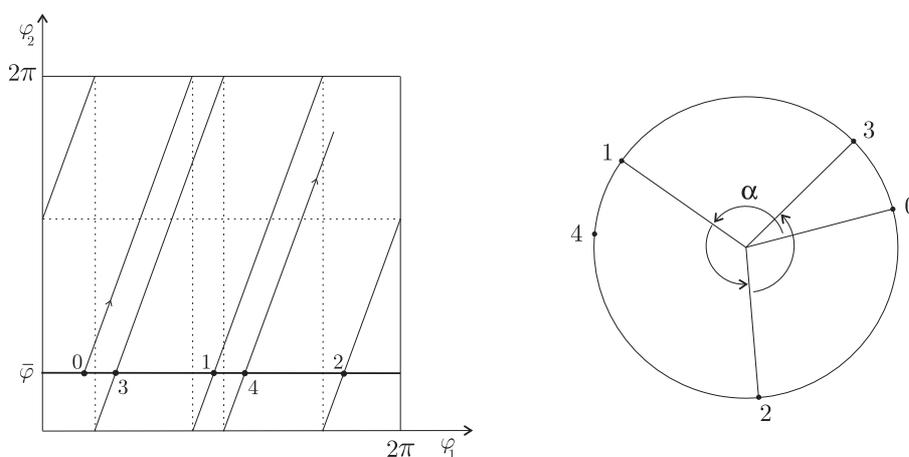


Figura 18: La traslazione su \mathbb{T}^2 e la sua sezione di Poincaré $\Phi : S^1 \rightarrow S^1$

3.1 Il flusso lineare sul toro

Un sistema molto semplice, con il quale cominciamo lo studio, è il flusso lineare sul toro¹² bidimensionale $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$. Denotando con φ_1, φ_2 le variabili sul toro, le equazioni del moto si scrivono

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e la soluzione è evidentemente

$$\Phi^t(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 + \omega_1 t, \varphi_2 + \omega_2 t) \pmod{2\pi};$$

l'operazione di modulo fa sì che le traiettorie si avvolgano a elica sul toro, si veda la figura 18. Il sistema descrive, ad esempio, il comportamento di due oscillatori armonici disaccoppiati: per ogni scelta delle ampiezze (delle *azioni*, in ambito hamiltoniano) le fasi avanzano uniformemente nel tempo. Si può pensare a un qualunque sistema lagrangiano a due gradi di libertà in un piccolo intorno di un punto di equilibrio stabile, nella consueta approssimazione lineare (teoria delle piccole oscillazioni).

Prendendo sul toro una sezione del tipo $\varphi_2 = \bar{\varphi}$, con $\bar{\varphi}$ fissato — un circolo S^1 con coordinata $\varphi = \varphi_1$ — si ottiene, si veda la figura, un sistema dinamico discreto, precisamente la mappa $\Psi : S^1 \rightarrow S^1$ che associa a ogni punto $(\varphi, \bar{\varphi})$ della sezione la prima intersezione della traiettoria uscente da $(\varphi, \bar{\varphi})$ con la sezione stessa. Con evidenza tale mappa altro non è che la traslazione su S^1 definita da

$$\Psi(\varphi) = \varphi + \alpha \pmod{2\pi}, \quad \alpha = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Il sistema dinamico discreto così ottenuto è detto *sezione di Poincaré* del corrispondente sistema continuo.

Se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è razionale, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$, allora ogni traiettoria si chiude, il moto su \mathbb{T}^2 è periodico di periodo

$$T = p \frac{2\pi}{\omega_1} = q \frac{2\pi}{\omega_2},$$

¹²Il toro bidimensionale \mathbb{T}^2 (con periodicità 2π) è definito, intuitivamente, come il quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ in cui i lati opposti si identificano; formalmente è il quoziente $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$: un punto del toro è la classe di equivalenza dei punti di \mathbb{R}^2 le cui coordinate differiscono per multipli interi di 2π . La metrica su \mathbb{R}^2 si trasporta in modo naturale al toro (la distanza tra due punti del toro è la minima tra le coppie di rappresentativi in \mathbb{R}^2). Il toro \mathbb{T}^2 è il prodotto cartesiano di due cerchi, e topologicamente è equivalente alla classica ciambella.

e corrispondentemente è periodica di periodo p la traiettoria discreta (Ψ^p è l'identità); viceversa, se una traiettoria si chiude dopo che φ_1 ha compiuto p giri e φ_2 ha compiuto q giri, allora $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$. Se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è irrazionale, non solo le traiettorie sono aperte, ma si dimostra facilmente che

PROPOSIZIONE 2 *Se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è irrazionale ogni traiettoria è densa nel toro; corrispondentemente, la traiettoria discreta $\{\Psi^t(\varphi), t \in \mathbb{Z}\}$ per ogni φ è densa in S^1 .*

DIMOSTRAZIONE. Basta chiaramente dimostrare che la traiettoria discreta è densa in S^1 , ovvero che comunque si prenda un intervallo $I \in S^1$ esiste t tale che $\Psi^t(\varphi) \in I$. Si procede così: detta ε l'ampiezza di I , prendiamo $t_0 > 2\pi/\varepsilon$. Necessariamente due almeno dei t_0 punti

$$\varphi, \Psi(\varphi), \Psi^2(\varphi), \dots, \Psi^{t_0-1}(\varphi)$$

(che per la supposta irrazionalità di $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sono tutti distinti) stanno a distanza minore di ε . Sia allora $\text{dist}(\Psi^k(\varphi), \Psi^l(\varphi)) < \varepsilon$, ovvero posto $\varphi_l = \Psi^l(\varphi)$

$$\text{dist}(\Psi^\tau(\varphi_l), \varphi_l) < \varepsilon, \quad \tau = k - l.$$

Ora la traslazione è un movimento rigido (preserva la distanza su S^1), perciò anche per il dato iniziale φ si ha

$$\text{dist}(\Psi^\tau(\varphi), \varphi) < \varepsilon.$$

Ciò vuol dire che $\Psi^\tau(\varphi), \Psi^{2\tau}(\varphi), \dots$ procedono con passo inferiore a ε , dunque entrano in tutti gli intervalli di ampiezza ε , compreso I .¹³ □

Si potrebbe in realtà affermare di più, cioè che la traiettoria discreta non solo è densa in S^1 , ma vi si addensa uniformemente, precisamente che (Jacobi, 1840 circa) se α è irrazionale, per ogni intervallo I (più in generale, per qualunque sottoinsieme $I \subset S^1$ misurabile secondo Lebesgue), posto $n(T, \varphi) =$ numero di punti $\Psi^t(\varphi)$ della traiettoria discreta che cadono in I per $0 \leq t < T$, si ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T, \varphi)}{T} = \frac{|I|}{2\pi},$$

ove $|I|$ denota la lunghezza di I (più in generale, la misura di Lebesgue di I).

L'esempio si trasporta in dimensione $n \geq 2$ qualsiasi, considerando il flusso

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t \pmod{2\pi}, \quad i = 1, \dots, n,$$

sul toro n - dimensionale \mathbb{T}^n . La condizione che generalizza l'irrazionalità del rapporto ω_1/ω_2 è la cosiddetta *condizione di non risonanza* di $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$:

$$k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0.$$

3.2 Punti di equilibrio e biforcazioni per sistemi meccanici conservativi a un grado di libertà

Consideriamo qui sistemi meccanici conservativi retti dall'equazione di Newton

$$\ddot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

¹³Quantitativamente, possiamo anche affermare che la traiettoria di un qualunque dato iniziale φ entra in tutti gli intervalli di ampiezza ε dopo al più $2\pi/\varepsilon$ iterate di Ψ^τ , corrispondenti ad al più $4\pi^2/\varepsilon^2$ iterate di Ψ .

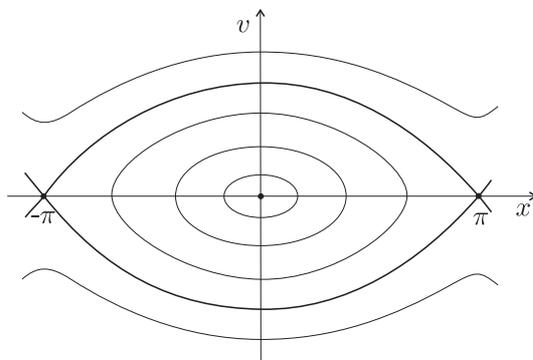


Figura 19: Il ritratto in fase del pendolo

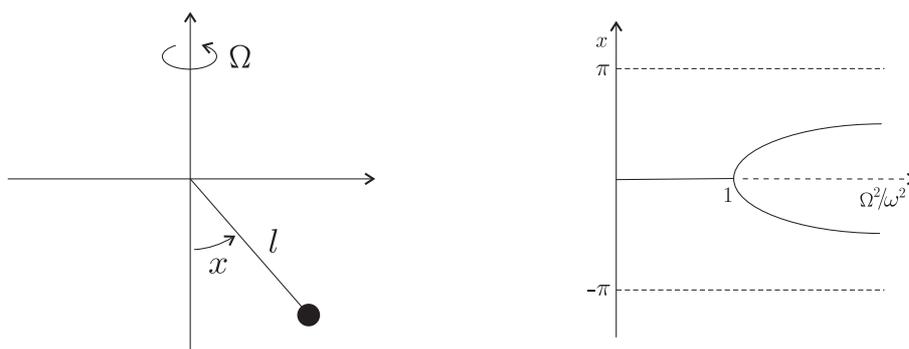


Figura 20: La biforcazione a forchetta per l'equazione (3.1).

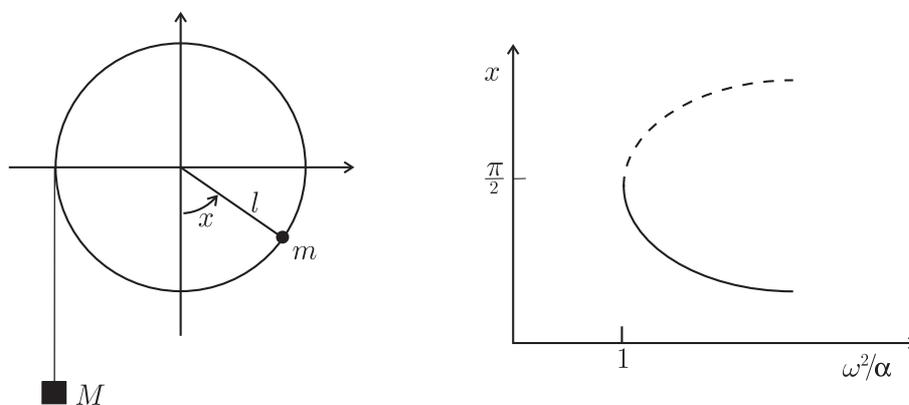


Figura 21: la biforcazione tangente per l'equazione (3.2).

ovvero sistemi del primo ordine in \mathbb{R}^2 della forma

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = F(x).$$

(Si faccia attenzione alla notazione, leggermente diversa da quella più generale della sezione 1: qui i punti di \mathbb{R}^2 sono denotati (x, v) , mentre il campo vettoriale è $f(x, v) = (v, F(x))$.) Il fatto che la forza (per unità di massa) $F(x)$ sia posizionale rende conservativo il sistema: precisamente si conserva l'energia (per unità di massa)

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x),$$

ove V è una primitiva di F cambiata di segno: $V'(x) = -F(x)$. Assieme all'energia si conservano le aree del piano di fase, come segue dal fatto che la divergenza ∇f del campo vettoriale $f(x, v) = (v, F(x))$ è nulla (si veda per i dettagli l'appendice C).

Nel piano di fase xv le curve di livello di E coincidono evidentemente con le traiettorie del sistema, che dunque si determinano analizzando la funzione $E(x, v)$, senza bisogno di risolvere le equazioni del moto. Le curve di livello di E vanno così a comporre il *ritratto in fase* del sistema; la figura 19 mostra il ben noto ritratto in fase del pendolo.

Per ogni zero x^* di F si ha nel piano di fase un punto di equilibrio $(x^*, 0)$, nel quale f si annulla. Se lo zero è trasverso e $F'(x^*) < 0$, allora $V''(x^*) > 0$, ovvero V ha un minimo in x^* e l'equilibrio è stabile; viceversa, se $F'(x^*) > 0$, V ha un massimo e l'equilibrio è instabile. *Stabilità e instabilità degli equilibri dipendono dunque solo dal segno di F' , esattamente come in dimensione uno.* Per quanto riguarda la classificazione dei punti in stabile e instabile, tutto quanto abbiamo visto in dimensione uno, *incluso lo studio delle biforcazioni*, si trasporta così ai sistemi conservativi a un grado di libertà senza variazioni.

Naturalmente, il comportamento nel piano di fase in prossimità del punto di equilibrio $(x^*, 0)$ — il modo di essere stabile o instabile — è ben diverso qui dal caso unidimensionale: infatti attorno ai minimi di V le traiettorie nel piano di fase hanno la forma di curve chiuse, percorrendo le quali il sistema oscilla e non converge, come nel caso unidimensionale, al punto di equilibrio; si ha cioè stabilità, ma non stabilità asintotica. Attorno ai massimi di V le curve di livello di E , e dunque le traiettorie, sono invece simili a iperboli, e in particolare vi sono due traiettorie entranti, che supportano moti che convergono al punto di equilibrio per $t \rightarrow \infty$, e due traiettorie uscenti, che supportano moti che vi convergono per $t \rightarrow -\infty$; nel caso unidimensionale vi erano solo traiettorie uscenti. Le curve asintotiche ai punti di equilibrio instabili sono dette *separatrici*; nella figura 19 relativa al pendolo le separatrici, asintotiche a $(\pm\pi, 0)$, sono disegnate a tratto più spesso.

- ESERCIZIO 4 Si studi il sistema illustrato in figura 20 (*pendolo centrifugo, o regolatore di Watt*); l'equazione del moto è

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x. \quad (3.1)$$

Si verifichi che per $\Omega^2 = \omega^2$ si ha nell'origine una biforcazione a forchetta.

- ESERCIZIO 5 Si studi il sistema illustrato in figura 21; l'equazione del moto è

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \mu, \quad (3.2)$$

con $\omega^2 = \frac{m}{m+M} \frac{g}{l}$ e $\mu = \frac{M}{m} \omega^2$. Si verifichi che per $\mu = \omega^2$ si ha una biforcazione tangente.

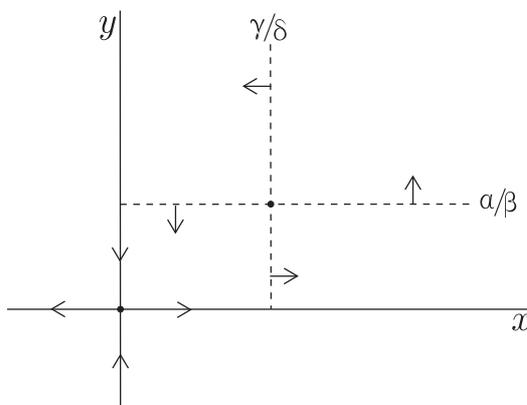


Figura 22: I punti di equilibrio e il campo vettoriale per il modello di Lotka–Volterra

3.3 Dinamica delle popolazioni e sistema di Lotka–Volterra

Consideriamo qui il modello preda–predatore proposto e studiato, negli anni '30 del '900, da Lotka e da Volterra. E' un sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 , che si scrive

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

L'interpretazione è semplice: in un ambiente chiuso vivono due specie x e y , rispettivamente preda e predatore. In assenza di predatori le prede avrebbero crescita malthusiana $x(t) = x(0)e^{\alpha t}$, e similmente i predatori si estinguerebbero con legge $y(t) = y(0)e^{-\gamma t}$. L'incontro di una preda con un predatore, che ha frequenza proporzionale al prodotto xy , produce una decrescita del numero di prede e una crescita del numero di predatori, con ritmo (efficacia dell'incontro nel far comparire o scomparire un nuovo individuo) regolato dalle costanti β e δ .¹⁴

Si vede immediatamente che \dot{x} si annulla sulle rette $x = 0$ e $y = \frac{\alpha}{\beta}$, e similmente \dot{y} si annulla sulle rette $y = 0$ e $x = \frac{\gamma}{\delta}$ (figura 25; le frecce danno l'orientazione del campo vettoriale). Vi sono pertanto due punti di equilibrio, l'origine e il punto non banale $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Fuori dei punti di equilibrio vi sono con evidenza soluzioni particolari sugli assi $y = 0$ (crescita malthusiana di x) e $x = 0$ (estinzione di y). Per un dato iniziale generico con x e y entrambi positivi, ci viene in aiuto un fatto un po' eccezionale: nel sistema esiste una costante del moto, precisamente la quantità

$$F(x, y) = \delta x - \gamma \log x + \beta y - \alpha \log y.$$

E' immediato verificare che $\dot{F} = 0$.¹⁵

Le traiettorie coincidono così con le curve di livello di F nel piano xy . Non è difficile verificare che le curve di livello di F costituiscono una famiglia di curve chiuse concentriche, che si stringono

¹⁴Ne è stata data anche una lettura come processo chimico: una reazione porta da una sostanza A a una sostanza B , attraverso due prodotti intermedi X e Y con concentrazioni x e y . Si svolgono tre reazioni (le prime due autocatalitiche):

- i) $A \rightarrow X$, più precisamente $A + X \rightarrow 2X$, cui corrisponde la velocità di reazione $\dot{x} = \alpha x$;
- ii) $X \rightarrow Y$, più precisamente $X + Y \rightarrow 2Y$, cui corrispondono le equazioni $\dot{x} = -\beta xy$ e $\dot{y} = \beta xy$; infine
- iii) $Y \rightarrow C$, con $\dot{y} = -\gamma y$.

La dinamica complessiva di x e y è data dalle equazioni di Lotka–Volterra, con $\delta = \beta$.

¹⁵Più interessante è ricavare le forma di F a partire dalle equazioni del moto, perché è un procedimento abbastanza tipico. Si procede così: dalle equazioni del moto segue subito $dx = (\alpha x - \beta xy)dt$, $dy = (-\gamma y + \delta xy)dt$, e dunque,

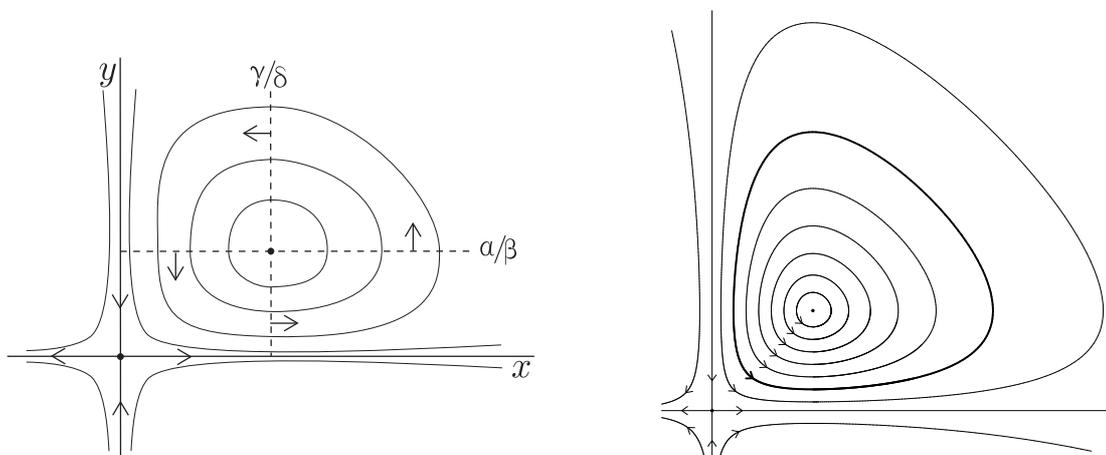


Figura 23: Il sistema di Lotka–Volterra: a destra, ritratto in fase tracciato a mano; a sinistra, figura realistica ottenuta numericamente

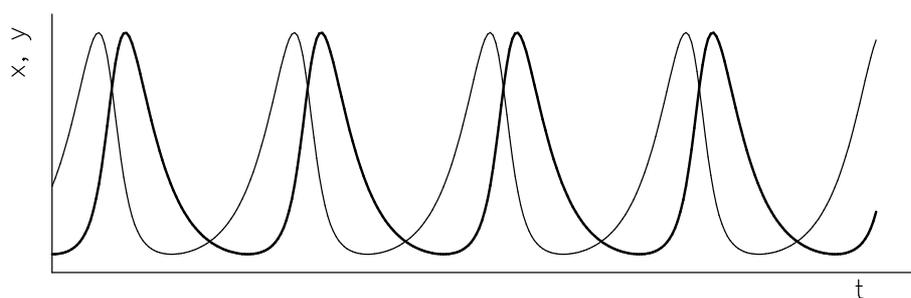


Figura 24: L'andamento di x e y nel tempo per il modello di Lotka–Volterra, in corrispondenza alla traiettoria tracciata in grassetto in figura 23

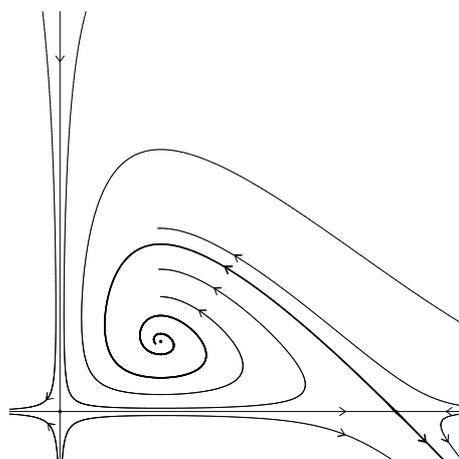


Figura 25: Il sistema di Lotka–Volterra modificato

attorno al punto di equilibrio non banale. Si osservi che F ha un massimo nel punto di equilibrio, coerentemente col fatto che attorno a tale punto le linee di livello sono cerchi concentrici. La figura 23 (a sinistra tracciata a mano in modo qualitativo; a destra realistica, ottenuta mediante simulazione numerica) mostra il ritratto in fase del sistema. La figura 24 mostra l'andamento nel tempo di x e y , con massimi e minimi sfasati. La presenza di oscillazioni si spiega bene intuitivamente: se vi sono molte prede, crescono i predatori, che allora le fanno calare; ma poi i predatori stessi privi di cibo diminuiscono, a quel punto le prede crescono di nuovo... Quello che non è ovvio è che il fenomeno sia esattamente periodico, e ciò è dovuto alla presenza, da ritenersi eccezionale, di una costante del moto.

- ESERCIZIO 6 Si verifichi che l'introduzione di nuove variabili $\xi = \log x$, $\eta = \log y$ nel quadrante $x, y > 0$ muta il sistema di Lotka–Volterra in un sistema che preserva l'area nel piano $\xi\eta$ (lo muta anzi in un sistema Hamiltoniano).
- ESERCIZIO 7 Si studi il sistema di Lotka–Volterra modificato mediante aggiunta una competizione tra le prede:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy.$$

Lo studio è interessante per ε piccolo; la costante del moto sparisce e le traiettorie spiraleggiano verso il punto di equilibrio $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\varepsilon\gamma}{\beta\delta})$, che diviene asintoticamente stabile; si veda la figura 25. Nelle coordinate ξ, η introdotte nell'esercizio precedente, l'area nel piano xy decresce monotonamente.

3.4 Classificazione dei punti critici in \mathbb{R}^2 e biforcazioni

Sia dato un sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^n ,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

e sia x^* un punto critico di f , ovvero $f(x^*) = 0$. Ci proponiamo di studiare il comportamento del sistema attorno a x^* tramite il procedimento di linearizzazione. Supponiamo, come non è restrittivo, $x^* = 0$; sviluppando f si ottiene

$$\dot{x} = Ax + \mathcal{O}(\|x\|^2),$$

con A matrice jacobiana di f nel punto di equilibrio, precisamente $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$. Il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax$$

è detto *sistema linearizzato* del sistema (3.3). Per i sistemi meccanici a un grado di libertà, A è una matrice 2×2 della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, 0) & \frac{\partial F}{\partial v}(x^*, 0) \end{pmatrix};$$

lungo una qualsiasi traiettoria,

$$(-\gamma y + \delta xy)dx = (\alpha x - \beta xy)dy.$$

Dividendo per xy le variabili si separano e si ottiene

$$(-\gamma/x + \delta)dx - (\alpha/y - \beta)dy = 0.$$

Al primo membro si riconosce immediatamente il differenziale della funzione F , che dunque è costante lungo le traiettorie.

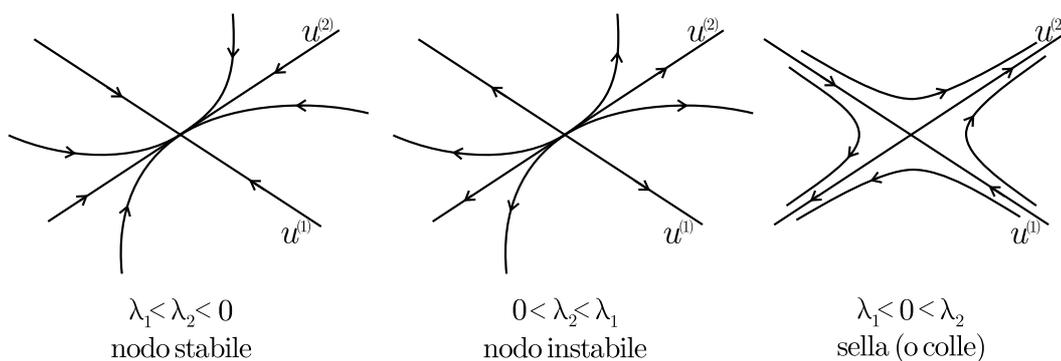


Figura 26: Il caso degli autovalori reali

nel caso conservativo F è posizionale e la diagonale è interamente nulla.

I sistemi lineari si sanno risolvere esattamente qualunque sia A , nel senso che la ricerca dell'integrale generale si riporta in ogni caso a un problema algebrico. Noi non ci addenteremo in questo studio, ma ci limiteremo al caso $n = 2$, per il quale si ottiene una classificazione completa dei punti critici; inoltre anche per $n = 2$ privilegeremo la situazione, generica e maggiormente interessante, in cui A ha due autovalori distinti non nulli,

$$0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0 ,$$

rinviano il caso di autovalori coincidenti o nulli all'appendice D.

Si verifica immediatamente che per ogni autovettore u di A , con autovalore λ , esiste la soluzione particolare

$$x(t) = Ce^{\lambda t}u , \quad C \in \mathbb{R} . \quad (3.4)$$

Avendo supposto $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ha che i corrispondenti autovettori $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ sono indipendenti, pertanto la (3.4) fornisce due soluzioni indipendenti, combinando le quali si ottiene l'integrale generale

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} u^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} u^{(2)} , \quad (3.5)$$

nel quale C_1, C_2 sono costanti arbitrarie.

La matrice A è reale, perciò λ_1 e λ_2 sono reali oppure complesso-coniugati. Se sono reali, anche gli autovettori $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ si possono prendere reali. Il comportamento qualitativo della soluzione dipende allora dai segni di λ_1 e λ_2 .

- (i) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, tutte le soluzioni tendono all'origine per $t \rightarrow \infty$. Si osservi che tutte tranne quella con $C_2 = 0$, che corre lungo la retta di $u^{(1)}$, sono tangenti a $u^{(2)}$: la componente parallela a $u^{(1)}$ infatti si annulla più in fretta. Si veda la figura 26, sinistra. Il punto singolare si dice *nodo stabile*.
- (ii) Se all'opposto $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, tutte le soluzioni convergono all'origine per $t \rightarrow -\infty$; si veda la figura 26, al centro. Il punto singolare si dice *nodo instabile*.
- (iii) Se infine $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, si hanno due soluzioni eccezionali, corrispondenti a $C_1 = 0$ e a $C_2 = 0$, che convergono all'origine, rispettivamente, lungo la retta di $u^{(2)}$ per $t \rightarrow -\infty$ e lungo la retta di $u^{(1)}$ per $t \rightarrow +\infty$; tutte le altre soluzioni divergono in entrambi i limiti, accostandosi asintoticamente all'una o all'altra retta. Si veda la figura 26, destra. Il punto singolare si dice *sella* o anche *colle*.

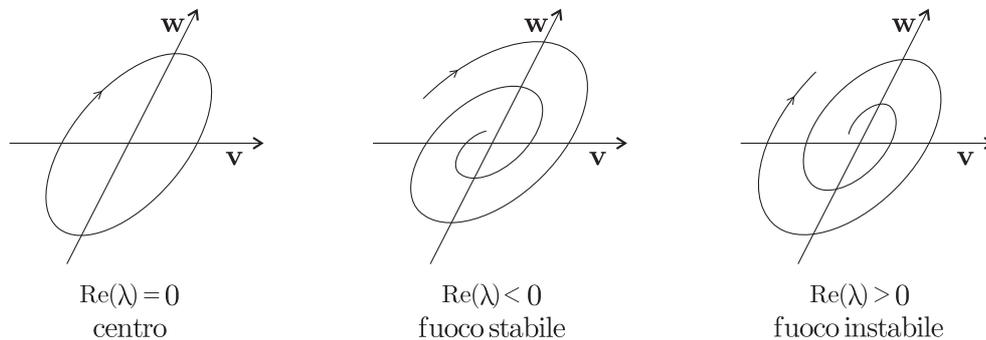


Figura 27: Il caso degli autovalori complesso-coniugati

Consideriamo ora il caso di autovalori complesso-coniugati:

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\omega.$$

In tal caso si possono sempre prendere autovettori complesso-coniugati:

$$u^{(1)} = v + iw, \quad u^{(2)} = v - iw.$$

La soluzione allora è reale se anche C_1 e C_2 sono complesso-coniugati,

$$C_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad C_2 = \rho e^{-i\varphi}.$$

Sostituendo nella (3.5) si ottiene subito l'espressione

$$x(t) = 2\rho e^{\alpha t} [\cos(\omega t + \varphi)v - \sin(\omega t + \varphi)w],$$

facilmente leggibile perché vi compaiono solo quantità reali. Abbiamo anche qui tre sottocasi (questa volta senza eccezioni):

- (iv) $\alpha = 0$: in tal caso il moto è periodico, le traiettorie sono ellissi. Si veda la figura 27, parte sinistra. Il punto singolare è detto *centro*.
- (v) $\alpha < 0$: in tal caso il moto converge a spirale verso l'origine per $t \rightarrow \infty$; si veda la figura 27, al centro. Il punto singolare è detto *fuoco stabile*.
- (vi) $\alpha > 0$: in tal caso il moto converge a spirale verso l'origine per $t \rightarrow -\infty$; si veda la figura 27, a destra. Il punto singolare è detto *fuoco instabile*.

E' molto facile distinguere tra tutti i sei casi sopra descritti, anche senza calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice A , semplicemente considerandone la traccia e il determinante. Infatti, come si verifica immediatamente, l'equazione per λ è

$$\lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0;$$

allora dalla formula risolutiva

$$2\lambda = \text{Tr } A \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4\det A,$$

si vede subito che si hanno i seguenti casi possibili:

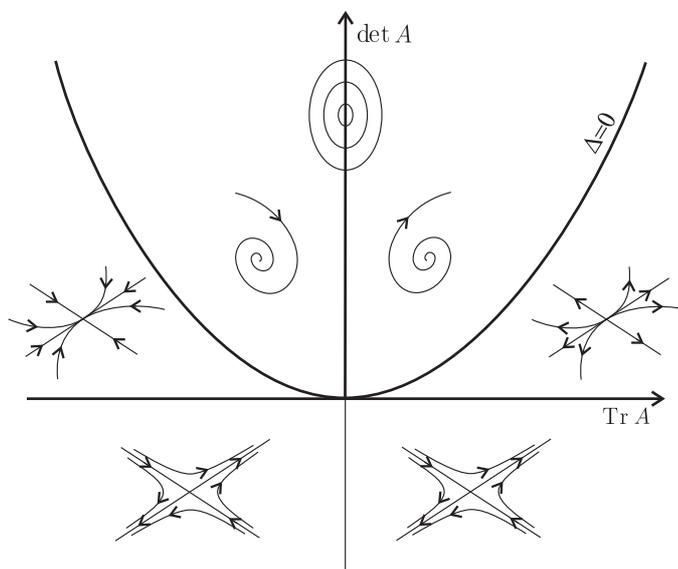


Figura 28: Il diagramma di biforcazione per i punti singolari nel piano

- autovalori reali di segno opposto, e dunque un punto di sella, se $\det A < 0$ (qualunque sia $\text{Tr } A$);
- autovalori reali concordi dello stesso segno di $\text{Tr } A$, e dunque un nodo stabile o un nodo instabile rispettivamente per $\text{Tr } A < 0$ e $\text{Tr } A > 0$, se $\det A > 0$ e $\Delta > 0$;
- autovalori complesso-coniugati con parte reale dello stesso segno di $\text{Tr } A$, e dunque nell'ordine un fuoco stabile, un fuoco instabile o un centro, per $\text{Tr } A$ minore, maggiore o uguale a zero, se $\Delta < 0$.

E' pertanto significativo fare riferimento al piano con coordinate $(\text{Tr } A, \det A)$, si veda la figura 28. Tale piano risulta naturalmente diviso in regioni aperte dalle tre curve messe sopra in evidenza, precisamente $\det A = 0$ (asse orizzontale); $\text{Tr } A = 0$ con $\det A > 0$ (semiasse verticale positivo); $\Delta = 0$ (la parabola riportata in figura), e ad ognuna di tali regioni aperte corrisponde un comportamento qualitativo ben preciso. Si osservi che i casi lasciati indietro e trattati in appendice sono quelli corrispondenti alla prima e alla terza di queste curve: precisamente i casi $\det A = 0$ (un autovalore nullo) oppure $\Delta = 0$ (autovalori coincidenti); quest'ultimo caso comprende anche la situazione in cui A ha un solo autovettore e dunque non è diagonalizzabile.

La classificazione che abbiamo fatto dei punti di equilibrio è invariante per cambiamenti di coordinate, ovvero diffeomorfismi locali. Precisamente, sia data l'equazione differenziale in \mathbb{R}^n (3.3), e sia x^* un punto critico di f ; introduciamo un cambiamento di coordinate $x = h(y)$, ove h è un diffeomorfismo che manda un aperto V in un aperto U che supponiamo contenere x^* . Con evidenza, all'equazione differenziale (3.3) in U resta associata l'equazione differenziale

$$\dot{y} = g(y) \quad (3.6)$$

in V , con

$$g(y) = J^{-1}(y)f(h(y)) , \quad (3.7)$$

avendo denotato con J la jacobiana di h (basta sostituire $x = h(y)$ nella for 3.4). Se $y^* = h^{-1}(x^*)$, con evidenza si ha $g(y^*) = 0$; più in generale, se denotiamo con $\Psi^t(y)$ la soluzione della (3.6), è

immediato verificare che h manda soluzioni in soluzioni. Sia ora B la jacobiana di g in y^* , in modo che $\dot{y} = By$ sia la linearizzata della (3.6) attorno a y^* . Dalla (3.7) segue subito

$$B = J^{-1}(y^*)AJ(y^*) .$$

Ne consegue che A e B hanno gli stessi autovalori. Tornando alla classificazione dei punti singolari in \mathbb{R}^2 , da cui eravamo partiti, si vede in particolare che la collocazione di un sistema linearizzato nel diagramma di biforcazione è invariante per diffeomorfismi.

Si pone ora in modo naturale il problema di capire fino a che punto le proprietà del sistema linearizzato si trasportano al sistema non lineare di partenza. In assenza di ulteriori ipotesi, si vede bene che i moti possono avere proprietà qualitative diverse, come mostra il semplice esempio

$$\dot{x} = v , \quad \dot{v} = -\omega^2 x - \mu x^2 v ; \quad (3.8)$$

si osservi che la dissipazione, interamente non lineare, scompare se si linearizza il sistema attorno all'origine. La dissipazione d'altra parte è rilevante: la potenza corrispondente $-\mu x^2 v^2$ ha segno definito, e si vede bene¹⁶ che la stabilità è mutata in stabilità asintotica (per tempi positivi) per $\mu > 0$, e in instabilità per $\mu < 0$.

Un teorema importante, valido in \mathbb{R}^n , che stabilisce la connessione tra autovalori della matrice jacobiana in un punto di equilibrio e stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare, è il seguente:

PROPOSIZIONE 3 (Primo teorema di Lyapunov) *Sia x^* un punto di equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$ in \mathbb{R}^n , e sia A la matrice jacobiana di f in x^* .*

- *Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora x^* è asintoticamente stabile.*
- *Se un autovalore almeno ha parte reale positiva, allora x^* è instabile.*

Resta indeciso il caso in cui nessun autovalore ha parte reale negativa e uno almeno ha parte reale nulla; nel problema in \mathbb{R}^2 che stiamo studiando è il caso dei centri. L'esempio (3.8) mostra che effettivamente in questo caso i termini non lineari sono decisivi.

Un legame più stretto tra il comportamento del sistema di partenza e quello linearizzato si ottiene se si escludono, nello spettro della jacobiana A di f , autovalori con parte reale nulla. Un teorema di riferimento è questo:

PROPOSIZIONE 4 (Teorema di Hartman-Grobman, 1960 circa) *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x)$ in \mathbb{R}^n , e sia $\dot{x} = Ax$ il corrispondente sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio. Se la matrice A non contiene autovalori con parte reale nulla, allora esiste un homeomorfismo, definito in un intorno del punto di equilibrio, che invia le soluzioni del sistema non lineare in quelle del sistema linearizzato.*

Esistono anche risultati di differenziabilità (coniugazione mediante *diffeomorfismi*), che tuttavia sono delicati e nei quali non ci addentreremo.

Consideriamo ora il caso in cui il campo vettoriale dipende da un parametro, ovvero consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = f_\mu(x) , \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

¹⁶Usando il *secondo teorema di Lyapunov*, che qui si suppone noto, e precisamente usando l'energia $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ come funzione di Lyapunov.

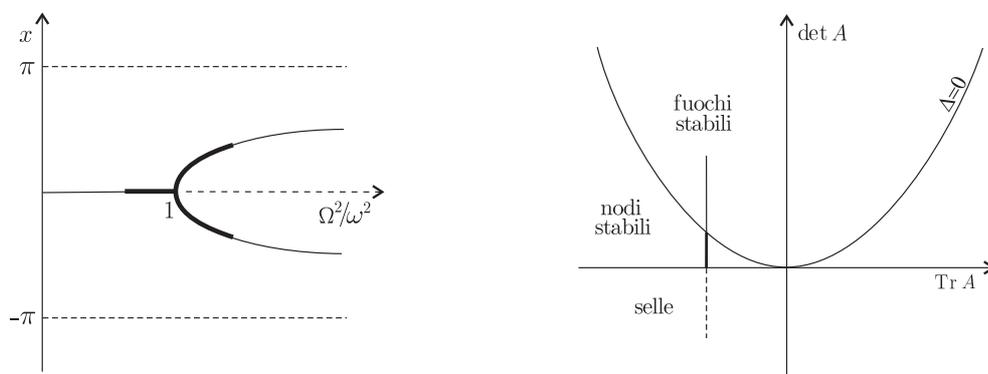


Figura 29: La biforcazione a forchetta con dissipazione

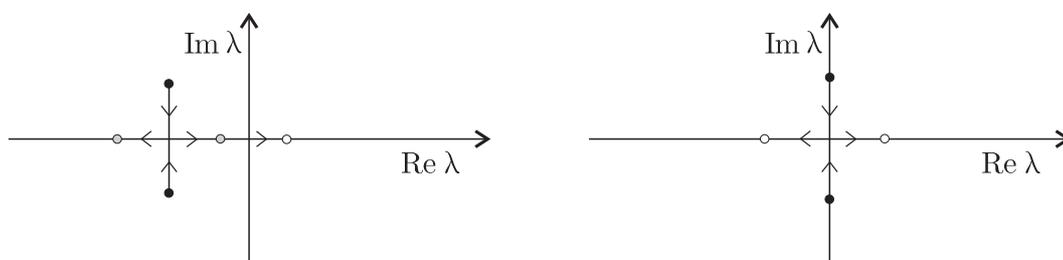


Figura 30: Il comportamento degli autovalori per la biforcazione a forchetta, nel caso generico dissipativo (sinistra) e nel caso conservativo (destra)

Il fenomeno che ci interessa è quello in cui al variare di μ il punto rappresentativo del sistema nel diagramma di biforcazione attraversa una curva critica, mutando le sue proprietà di stabilità. La biforcazione a forchetta del caso conservativo, considerata sopra, è un classico esempio, ma è eccezionale (si attraversano contemporaneamente due curve critiche). Un caso generico di biforcazione a forchetta si ha prendendo ad esempio il pendolo centrifugo e aggiungendo una piccola dissipazione,

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x - 2\mu v, \quad 0 < \mu < \omega,$$

cosicché la matrice A diviene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 - \omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}.$$

La traccia di A è negativa e costante, $\text{Tr } A = -2\mu$; il determinante di A è $\omega^2 - \Omega^2$. Al crescere di Ω si ha allora la situazione illustrata in figura 29: una prima biforcazione muta il fuoco in nodo; poi si ha una biforcazione a forchetta da nodo a sella, mentre si formano due altri punti di equilibrio, inizialmente nodi, che successivamente biforcano diventando fuochi. La figura 30 mostra il comportamento degli autovalori di A , a sinistra nel caso dissipativo e a destra in quello conservativo nel quale le due biforcazioni avvengono simultaneamente.

Biforcazioni con comparsa o scomparsa di punti di equilibrio possono avvenire solo se si attraversa la curva critica $\det A = 0$. Interviene qui un fatto generale, che conviene enucleare in una definizione e in una proposizione che useremo anche in seguito.

DEFINIZIONE 2 Sia $f(x)$ una funzione regolare: $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$, e sia x^* uno zero di f . Lo zero si dice trasverso se, detta A la matrice jacobiana di f in x^* , si ha $\det A \neq 0$.

PROPOSIZIONE 5 Ogni zero trasverso x^* è isolato. Se poi si ha una famiglia di mappe regolari $f_\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, e per un valore $\bar{\mu}$ del parametro esiste uno zero trasverso \bar{x}^* , allora esiste una funzione $x^*(\mu)$, definita in un intorno di $\bar{\mu}$, tale che $x^*(\bar{\mu}) = \bar{x}^*$ e inoltre $f_\mu(x^*(\mu)) = 0$ identicamente.

DIMOSTRAZIONE. La prima parte è un'immediata conseguenza del fatto che se il determinante jacobiano di f non si annulla, allora f è un diffeomorfismo locale, e dunque l'immagine inversa dello zero è localmente unica. La seconda parte è solo una riscrittura del teorema della funzione implicita. \square

Del tutto in generale dunque (lo si era già visto in dimensione uno) i punti critici trasversi sono persistenti, e la loro comparsa o scomparsa può avvenire solo per $\det A = 0$.

C'è ancora un esempio importante di biforcazione in \mathbb{R}^2 che dobbiamo studiare, che si presenta (genericamente) quando il punto rappresentativo del sistema nel diagramma di biforcazione attraversa il semiasse $\text{Tr } A = 0$, $\det A > 0$. Vi dedichiamo il prossimo paragrafo, nel quale preliminarmente introdurremo un fenomeno particolarmente rilevante per la dinamica in \mathbb{R}^2 , noto come *ciclo limite*.

3.5 Il fenomeno del ciclo limite: equazioni di Lienard e di Van der Pol, la biforcazione di Hopf

A. *Nozione di ciclo limite.* Studieremo qui una famiglia molto interessante di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 , introdotte nella seconda metà degli anni '20 del '900 come possibili modelli matematici delle oscillazioni spontanee che si sviluppano, in certe condizioni, in circuiti elettrici amplificati. Tali equazioni ci interessano perché presentano il fenomeno cosiddetto del *ciclo limite*. "Ciclo" sta per moto periodico; "limite" indica che vi convergono asintoticamente i moti vicini. La nozione per sé prescinde dalla dimensione due e si può dare per un generico sistema $\dot{x} = f(x)$ in \mathbb{R}^n , $n > 1$:

DEFINIZIONE 3 Si dice ciclo limite attrattivo (repulsivo) una traiettoria chiusa del sistema, che sia asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi).¹⁷

¹⁷Le comuni nozioni di stabilità e stabilità asintotica alla Lyapunov, introdotte in genere per i punti di equilibrio, si trasportano naturalmente a traiettorie chiuse o altri insiemi invarianti. Sia $\dot{x} = f(x)$ un'equazione differenziale in \mathbb{R}^n , e sia Z un insieme chiuso invariante; Z si dice *stabile* (stabile nel futuro, nel passato) se per ogni aperto U contenente Z esiste un aperto $V \subset U$, contenente anch'esso Z , tale che per ogni $x \in V$ si ha $\Phi^t(x) \in U$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (per $t > 0$, per $t < 0$). Z si dice *asintoticamente stabile* nel futuro (nel passato) se è stabile nel futuro (nel passato) e inoltre esiste un aperto B contenente Z (*bacino di attrazione*) tale che per ogni $x \in B$ si ha

$$\text{dist}(\Phi^t(x), Z) \rightarrow 0$$

per $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Gli insiemi asintoticamente stabili sono detti anche *attrattori*. La definizione di attrattore che si trova generalmente nella letteratura avanzata è questa: *Un insieme chiuso $Z \subset \mathbb{R}^n$ si dice essere un attrattore per l'equazione $\dot{x} = X(x)$ se esiste un aperto B invariante ($\Phi_X^t(B) \subset B$ per $t > 0$) che lo contiene, tale che sia*

$$\bigcap_{t>0} \Phi_X^t(B) = Z$$

(si chiede che B sia invariante, automaticamente lo è Z). Punti di equilibrio asintoticamente stabili e cicli limite sono esempi di attrattori. Tra gli anni '50 e '70 del '900 si è capito che (in dimensione più alta di due però) è tipica

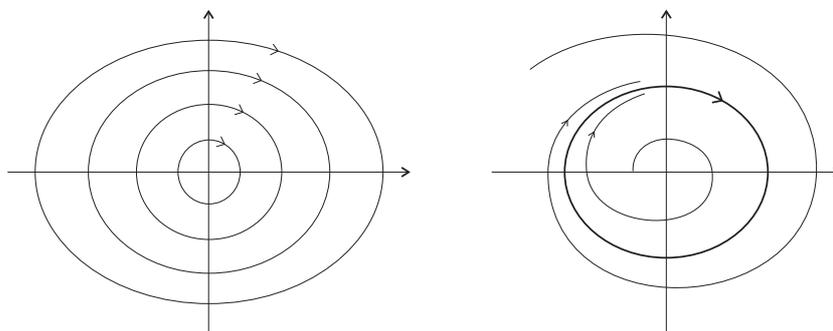


Figura 31: *Un sistema conservativo con un continuo di orbite periodiche (sinistra) e un sistema con un ciclo limite (destra)*

La differenza *sostanziale* rispetto ai sistemi conservativi che eseguono moti periodici, come l'oscillatore armonico o il pendolo, è che questi ultimi hanno un continuo di moti periodici diversi, mentre il ciclo limite è un moto periodico isolato cui convergono i moti vicini (figura 31). Si rifletta sul funzionamento di un orologio a pendolo: l'attrito tende a smorzare il moto, mentre la carica (la molla, un peso che scende) immette energia nel sistema; come risultato il sistema si porta asintoticamente su una precisa orbita periodica, nella quale l'energia immessa e quella dissipata si compensano esattamente e l'orologio funziona correttamente, con una precisa velocità di avanzamento indipendente dal dato iniziale (invece in un pendolo matematico, che è un sistema *non* isocrono, la velocità di avanzamento dipenderebbe dal dato iniziale, cosa catastrofica per un orologio). Per un modello elementare di orologio meccanico con ciclo limite, si veda l'appendice E.

B. Le equazioni di Lienard e di Van der Pol. Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine della forma

$$\ddot{x} + \alpha_\varepsilon(x)\dot{x} + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

ove il coefficiente α_ε del termine di smorzamento ha un andamento qualitativo come quello illustrato in figura 32a; per semplicità e per essere definiti faremo riferimento alla parabola

$$\alpha_\varepsilon(x) = x^2 - \varepsilon. \quad (3.10)$$

Si tratta con evidenza di un oscillatore armonico smorzato di pulsazione $\omega = 1$ (come si può ottenere sempre, prendendo ω^{-1} come unità di tempo), con però un non comune coefficiente di smorzamento: non comune perché non lineare ma soprattutto perché, per $\varepsilon > 0$ e $|x|$ piccolo, precisamente $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, l'attrito è *anomalo*, ovvero il termine di smorzamento non dissipa ma immette energia nel sistema. La (3.9) è detta *equazione di Lienard*. Come illustrato brevemente nell'appendice F, equazioni di questa forma appaiono naturalmente nello studio delle oscillazioni spontanee che si sviluppano, in certe condizioni, in circuiti elettrici amplificati.¹⁸

Per $\varepsilon > 0$ il riscaldamento

$$x = \sqrt{\varepsilon}x' \quad (3.11)$$

la formazione di *attrattori strani*, che non hanno la struttura di varietà: non sono lisci e tagliati trasversalmente al moto danno insiemi totalmente disconnessi come l'insieme di Cantor.

¹⁸Questo genere di studi nasce nella seconda metà degli anni '20 del '900; erano ormai diffusi, in quegli anni, i primi tubi a vuoto in grado di amplificare, detti *triodi*, antenati dei moderni transistor.

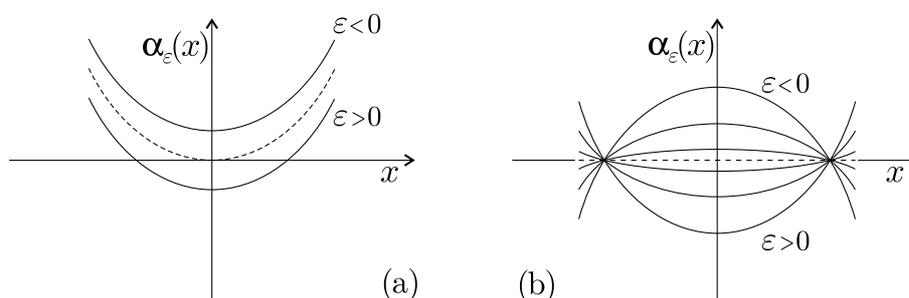


Figura 32: Il coefficiente $\alpha_\varepsilon(x)$ per l'equazione di Lienard (a) e per l'equazione di Van der Pol (b).

porta gli zeri del coefficiente di smorzamento in ± 1 , e muta l'equazione di Lienard, con α_ε come nella (3.10), nell'equazione

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

(si sono tolti gli apici), molto studiata e nota come *equazione di Van der Pol*. Ora il coefficiente di smorzamento è positivo per $|x| > 1$ (attrito ordinario), e negativo per $|x| < 1$. Equivalentemente, passando al primo ordine, possiamo scrivere il sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)v. \quad (3.13)$$

L'equazione di Van der Pol, si osservi, ha senso anche per $\varepsilon < 0$; la dipendenza da ε del coefficiente di smorzamento è illustrata in figura 32b. Per $\varepsilon < 0$ l'equazione rappresenta ancora, a meno di un riscaldamento, un'equazione di tipo Lienard, con però $\alpha_\varepsilon(x) = -(x^2 + \varepsilon)$.

Studieremo qui di seguito il fenomeno del ciclo limite nell'equazione di Van der Pol, per ritornare poi con dei commenti sull'equazione di Lienard.

C. Il ciclo limite nell'equazione di Van der Pol. Per $\varepsilon = 0$ si ha un oscillatore armonico di pulsazione uno, dunque il ritratto in fase consiste di infinite curve chiuse, precisamente cerchi concentrici che vengono percorsi con velocità costante nel periodo $T_0 = 2\pi$. Invece, non appena ε è positivo, si ha la formazione di un ciclo limite, come è garantito dalla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 6 Per ogni $\varepsilon > 0$ il sistema (3.13) ha un ciclo limite attrattivo, il cui bacino di attrazione è l'intero piano xv privato dell'origine.

La dimostrazione, non difficile ma pesante e soprattutto poco istruttiva, è riportata in appendice F. Assai più interessante è lo studio perturbativo del caso di ε piccolo, nel quale invece ci addentriamo.

Per ε piccolo conviene passare dalle coordinate cartesiane x, v a coordinate di tipo polare, usando però, come risulta più conveniente, l'energia E al posto del raggio; la trasformazione di coordinate si scrive allora

$$v = \sqrt{2E} \cos \varphi, \quad x = \sqrt{2E} \sin \varphi,$$

e viceversa

$$E = \frac{1}{2}(x^2 + v^2), \quad \varphi = \arctan \frac{x}{v} \quad (3.14)$$

($\arctan x/v + \pi$ per $v < 0$, $\pm\pi/2$ per $v = 0$). Per $\varepsilon = 0$ si ha evidentemente $\dot{E} = 0$, $\dot{\varphi} = 1$; per $\varepsilon \neq 0$ si trova subito, derivando le (3.14),

$$\dot{E} = \varepsilon f(E, \varphi), \quad \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon g(E, \varphi), \quad (3.15)$$

con

$$f(E, \varphi) = 2E \cos^2 \varphi (1 - 2E \sin^2 \varphi), \quad g = \sin \varphi \cos \varphi (2E \sin^2 \varphi - 1).$$

Si osservi che \dot{E} è la potenza delle forze dissipative, $\dot{E} = -\varepsilon(x^2 - 1)v^2$. L'espressione di g , aggiunta qui per completezza, in realtà non giocherà alcun ruolo. Dall'espressione di f si vede che \dot{E} è certamente positivo per E piccolo (basta $E < 1/2$), dunque si resta sempre consistentemente fuori dall'origine ove il cambio di coordinate non sarebbe più definito.

Per $\varepsilon > 0$ piccolo la variabile radiale E è lenta, $\dot{E} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, mentre la variabile angolare φ è veloce, $\dot{\varphi} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$, pertanto φ avanza monotonamente con velocità prossima a 1, compiendo un giro in un tempo T_ε prossimo al periodo imperturbato $T_0 = 2\pi$, mentre nel frattempo E si è spostata di poco.¹⁹ La variabile lenta è quella che più interessa: la traiettoria infatti è periodica, oppure procede a spirale verso l'esterno o verso l'interno, a seconda che dopo un giro di φ la variabile abbia ripreso il valore iniziale, oppure sia cresciuta o diminuita.

i) Un procedimento euristico. Per capire il comportamento di E e la convergenza verso un ciclo limite seguiamo dapprima un procedimento euristico, che renderemo rigoroso in un secondo momento. Utilizziamo per questo un'idea profonda della teoria delle perturbazioni, interessante (con le dovute cautele) ogniqualvolta si abbia a che fare con un sistema in cui convivono variabili veloci e variabili lente. L'idea è quella di ricavare un'equazione chiusa per la variabile lenta facendo una media sulla variabile veloce, ovvero di sostituire all'equazione vera (3.15) per E l'equazione approssimata, o "mediata",

$$\dot{E} = \varepsilon \mathcal{F}(E), \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E, \varphi) d\varphi; \quad (3.16)$$

nel nostro caso

$$\mathcal{F}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2E \cos^2 \varphi (1 - 2E \sin^2 \varphi) d\varphi. \quad (3.17)$$

L'integrale è elementare e si trova

$$\mathcal{F}(E) = \frac{1}{2\pi} (bE - aE^2)$$

con a e b costanti positive; i valori esatti sono

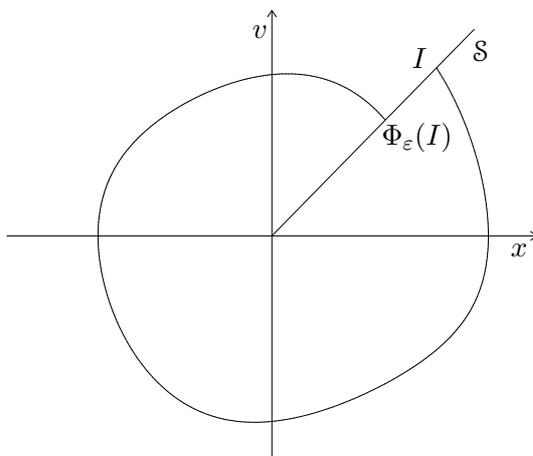
$$a = \pi, \quad b = 2\pi,$$

ma che si tratti di costanti positive è ovvio data l'espressione di f . L'equazione risultante per E ,

$$\dot{E} = \frac{\varepsilon}{2\pi} (bE - aE^2),$$

è del tutto elementare, precisamente è l'equazione della crescita malthusiana corretta. Ci sono pertanto due punti di equilibrio, nell'origine e nel punto $E^* = b/a = 2$; quest'ultimo è asintoticamente

¹⁹In realtà è un po' più complicato di così, perché f e g sono limitate in φ ma non in E ; ma è immediato, con un ragionamento appena più accurato (esercizio), giungere a questa conclusione.

Figura 33: La mappa $\Phi_\varepsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.

stabile e qualunque dato iniziale $E_0 > 0$ vi converge per $t \rightarrow \infty$. A E^* corrisponde, nel piano xv , un ciclo limite attrattivo di raggio $r^* = \sqrt{2E^*} = 2$.

ii) *Il corrispondente procedimento rigoroso.* Vediamo ora come si possa rendere rigoroso questo procedimento euristico, dimostrando con metodi perturbativi che

PROPOSIZIONE 7 *Per ε sufficientemente piccolo il sistema (3.13) ammette un ciclo limite attrattivo prossimo al circolo di raggio 2, con periodo prossimo a 2π .*

Rispetto alla proposizione 6 c'è la limitazione della validità del risultato a ε piccolo, ma in compenso si localizza il ciclo limite. La dimostrazione è una tipica dimostrazione perturbativa: si parte dal sistema imperturbato e ci si limita a controllare quello che avviene al primo ordine in ε , con libertà di trascurare termini $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$; considerazioni di carattere generale permettono poi di concludere che i termini trascurati sono ininfluenti.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo l'attenzione su una qualunque semiretta \mathcal{S} uscente dall'origine nel piano xv (figura 33), con $\varphi = \bar{\varphi}$ assegnato. Per ε piccolo e dato iniziale $(E, \bar{\varphi})$ su \mathcal{S} , se denotiamo con $\hat{E}_\varepsilon(t, E)$, $\hat{\varphi}_\varepsilon(t, E)$ la corrispondente soluzione, si ha evidentemente²⁰

$$\hat{E}_\varepsilon(t, E) = E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \hat{\varphi}_\varepsilon(t, E) = \bar{\varphi} + t + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Dall'espressione di $\hat{\varphi}_\varepsilon$ segue, come già si è osservato, che la traiettoria interseca nuovamente \mathcal{S} dopo un tempo $T_\varepsilon(E) = T_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Una dimostrazione formale, utile anche a stabilire la regolarità di $T_\varepsilon(E)$ in ε che useremo più avanti, si fa (esercizio) scrivendo $T_\varepsilon(E)$ come zero di $\hat{\varphi}_\varepsilon(t, E) - 2\pi$, trasverso e dunque (Proposizione 5) persistente. Sia dunque $\Phi_\varepsilon(E)$ l'intersezione della traiettoria con \mathcal{S} , $\Phi_\varepsilon(E) = \hat{E}_\varepsilon(T_\varepsilon(E), E)$; si vede bene che $\Phi_\varepsilon(E)$ è ε -prossimo a E , e sarà allora conveniente scrivere

$$\Phi_\varepsilon(E) = E + \varepsilon F_\varepsilon(E).$$

La ricerca di un'orbita periodica si riduce così alla ricerca di uno zero di F_ε .

Si trova ora senza difficoltà una buona approssimazione di F_ε , precisamente

$$F_\varepsilon(E) = bE - aE^2 + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.18)$$

²⁰Si sta qui usando la sola regolarità della soluzione al variare dei parametri dell'equazione, per t limitato.

ove a e b sono, significativamente, le costanti calcolate sopra nel procedimento euristico. Per vederlo, riscriviamo innanzitutto l'equazione (3.16) per E in forma integrale,

$$\hat{E}_\varepsilon(T_\varepsilon, E) = E + \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} f(\hat{E}_\varepsilon(t, E), \hat{\varphi}_\varepsilon(t, E)) dt ;$$

corrispondentemente si ha

$$F_\varepsilon(E) = \int_0^{T_\varepsilon} f(\hat{E}_\varepsilon(t, E), \hat{\varphi}_\varepsilon(t, E)) dt .$$

Osserviamo poi che F_ε è funzione regolare di ε (serve qui la regolarità di T_ε in ε), pertanto $F_\varepsilon(E) = F_0(E) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Ma il calcolo di F_0 è del tutto elementare: per $\varepsilon = 0$ infatti il moto incognito $(\hat{E}_\varepsilon(t, E), \hat{\varphi}_\varepsilon(t, E))$ scompare ed è rimpiazzato dal moto imperturbato $(\hat{E}_0(t, E), \hat{\varphi}_0(t, E)) = (E, \bar{\varphi} + t)$, pertanto si ha

$$F_0(E) = \int_0^{T_0} f(E, \bar{\varphi} + t) dt = \int_0^{2\pi} f(E, \varphi) d\varphi ; \quad (3.19)$$

si ritrova così l'integrale (3.17) e la (3.18) è immediata.

Per $\varepsilon = 0$ la curva F_ε si riduce dunque alla parabola $F_0(E) = bE - aE^2$, che passa per l'origine e taglia trasversalmente l'asse delle ascisse in $E_0^* = b/a = 2$. Ma come sappiamo (Proposizione 5) lo zero trasverso è persistente: perciò *per ε piccolo necessariamente esiste uno zero E_ε^* di F_ε , ε -vicino a E_0^** . Se teniamo conto che la curva $F_\varepsilon(E)$ sicuramente passa per l'origine (si veda l'equazione per E), la forma di F_ε è necessariamente come in figura 34, ove è stata tracciata anche Φ_ε . In corrispondenza allo zero E_ε^* la mappa Φ_ε ha un punto fisso e il sistema ha una traiettoria periodica, o ciclo, che per $\varepsilon = 0$ si riduce al circolo di raggio 2. Si vede facilmente (esercizio) che il ciclo è attrattivo. \square

E' importante osservare che la forma precisa del coefficiente di smorzamento nell'equazione di Van der Pol è stata usata pochissimo: di fatto solo nella (3.19), per condurre alla (3.18) con espressioni precise dei coefficienti a e b . Ma è evidente che per avere a e b positivi, e dunque il ciclo limite, il termine di smorzamento è largamente arbitrario: di fatto serve solo che sia negativo per $|x|$ piccolo e positivo per $|x|$ grande; la parabola $x^2 - 1$ è solo la forma più semplice di funzione fatta così. La figura 35, realistica, rappresenta il ciclo limite con due moti che vi si avvicinano dall'interno e dall'esterno, per $\varepsilon = 0.1$. Aumentando ε il ciclo limite continua ad esistere, come è stabilito dalla proposizione 6, ma si discosta molto da un circolo, si veda la figura 36.

- ESERCIZIO 8 Si mostri che per $\varepsilon < 0$ l'equazione di Van der Pol ammette un ciclo limite repulsivo, ancora prossimo, per ε piccolo, al circolo di raggio 2.

D. Il ciclo limite nell'equazione di Lienard; la biforcazione di Hopf. Torniamo all'equazione di Lienard (3.9), con α_ε come in (3.10). Per $\varepsilon < 0$ si ha attrito ordinario in tutto il piano xv , perciò ogni traiettoria tende asintoticamente all'origine, che per ε piccolo si vede subito essere un fuoco stabile. Per $\varepsilon > 0$ il fuoco diviene instabile; simultaneamente, percorrendo all'indietro il riscaldamento (3.11) con cui si è introdotta l'equazione di Van der Pol, si vede che nel piano xv si forma un ciclo limite stabile prossimo al circolo di raggio $2\sqrt{\varepsilon}$: *tale ciclo limite "fuoriesce" dall'origine precisamente nel momento in cui questa biforca da fuoco stabile a fuoco instabile*. Il fenomeno è illustrato in figura 37, sinistra; la biforcazione è chiamata *biforcazione di Hopf* (diretta).

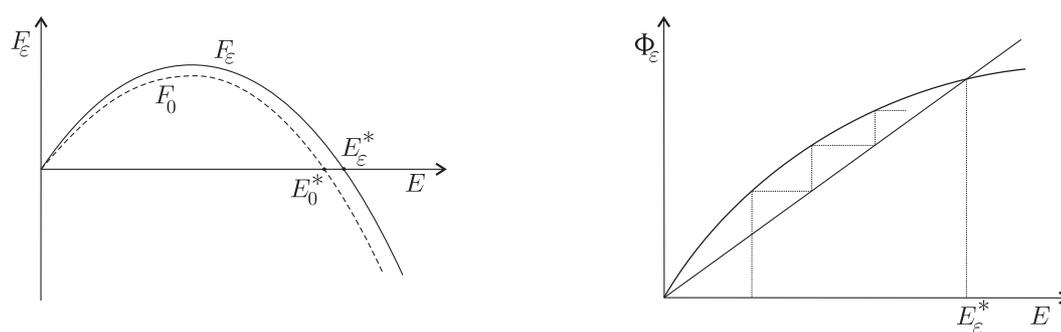


Figura 34: L'andamento di F_ϵ e Φ_ϵ .

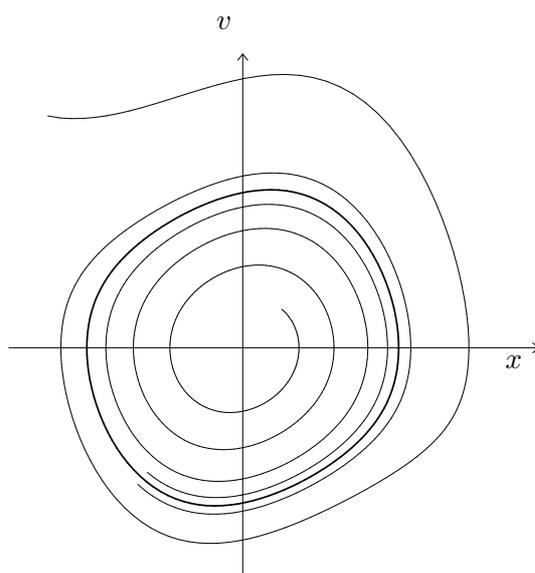
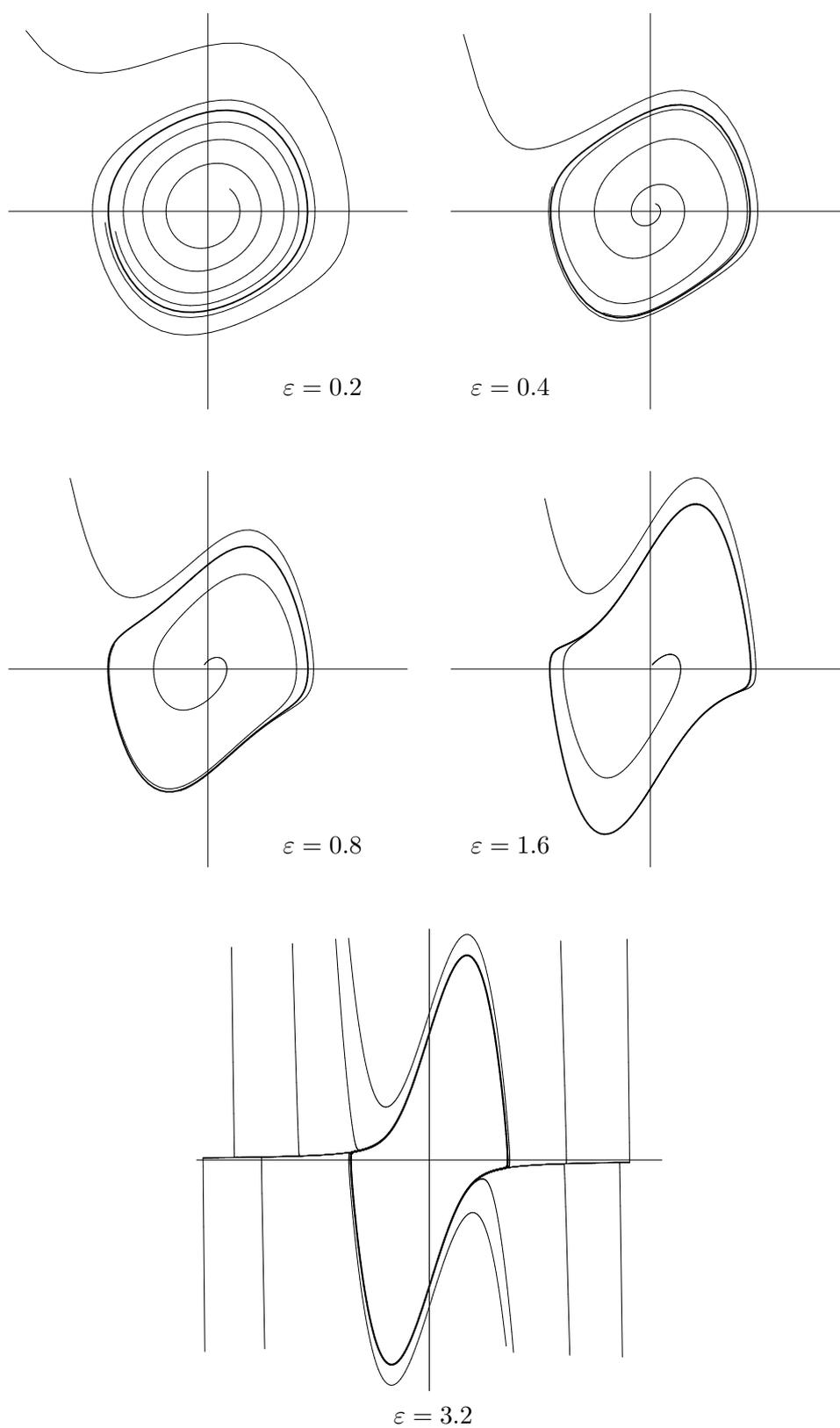


Figura 35: Il ciclo limite per $\epsilon = 0.1$, con due moti che vi convergono dall'interno e dall'esterno.

Figura 36: Il ritratto in fase dell'equazione di Van der Pol, nel piano xv , per diversi ε .

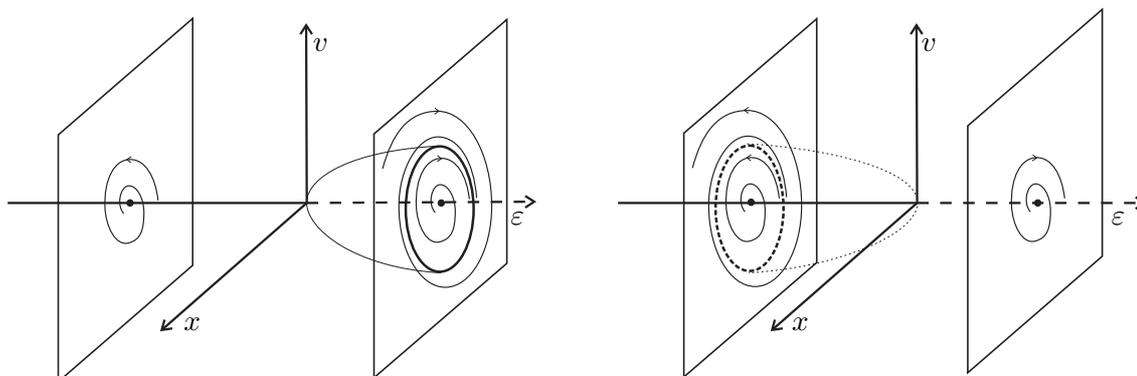


Figura 37: La biforcazione di Hopf diretta e inversa

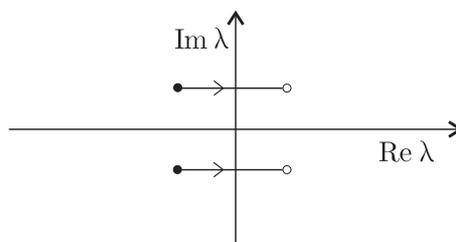


Figura 38: Il comportamento degli autovalori nella biforcazione di Hopf.

- ESERCIZIO 9 Si mostri che per l'equazione di tipo Lienard col segno di x^2 cambiato,

$$\ddot{x} - (x^2 + \varepsilon)\dot{x} + x = 0 ,$$

per $\varepsilon < 0$ (piccolo in modulo) vi sono un fuoco stabile e un ciclo limite instabile di raggio prossimo a $2\sqrt{\varepsilon}$; per $\varepsilon > 0$ il ciclo limite scompare, mentre il fuoco da stabile diviene instabile. Si veda la figura 37, destra. La biforcazione prende il nome di *biforcazione di Hopf inversa*.

La biforcazione di Hopf diretta o inversa è generica quando il punto rappresentativo di un sistema nel diagramma di biforcazione attraversa l'asse $\text{Tr } A$ positivo, ovvero quando una coppia di autovalori complesso-coniugati attraversa l'asse immaginario (figura 38). Il *teorema di Hopf*, per il quale si rinvia a testi specializzati, stabilisce la condizione di genericità.

- ESERCIZIO 10 Si scriva un'equazione che presenti una coppia di cicli limite, stabile e instabile, come in figura 39 sinistra. [Suggerimento: si cerchi una "equazione mediata", del tipo della (3.16), che dia il comportamento voluto.]
- ESERCIZIO 11 Si studi la possibilità di avere un ciclo stabile internamente ma instabile esternamente, come in figura 39 destra.

E. Cicli limite in sistemi fisici. Il fenomeno del ciclo limite si presenta in situazioni diversissime, in pratica ovunque qualche cosa si mette spontaneamente a oscillare convergendo asintoticamente verso un moto periodico. Vi sono diversi meccanismi che conducono a un ciclo limite in sistemi fisici.

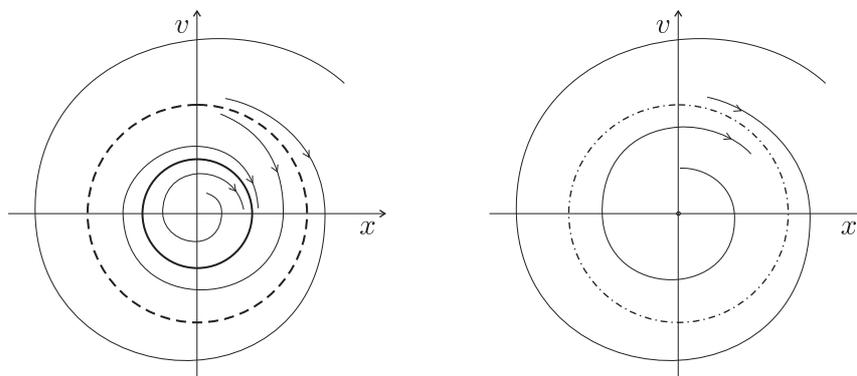


Figura 39: *Sinistra: un sistema con una coppia di cicli limite, stabile e instabile; destra: un ciclo stabile internamente ma instabile esternamente.*

All’orologio meccanico si è già accennato, facendo riferimento all’appendice E. Circuiti elettronici amplificati “reazionati positivamente” (il segnale in uscita dall’amplificatore viene opportunamente riportato in ingresso) hanno come modello equazioni del tipo Lienard, e presentano una biforcazione di Hopf (diretta). Un esempio è riportato nell’appendice G. Ancora una biforcazione di Hopf conduce a cicli limite in sistemi chimici (orologi chimici); l’esempio più noto di sistema chimico oscillante — fece grande scalpore, e per molti anni non fu creduto — è la reazione detta di Belusov–Zabotinsky, cui si accennerà più avanti. Un diverso meccanismo che conduce a un ciclo limite si ha in connessione alla produzione di un suono continuo per effetto di sfregamento, come avviene per i comuni cigolii di una porta o di un freno; un fenomeno per certi aspetti simile, ma assai più complicato, e più interessante, presiede alla formazione della nota negli strumenti ad arco.²¹

3.6 Insiemi asintotici e teorema di Poincaré–Bendixon

Studiando le equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$ in aperti limitati di \mathbb{R}^2 ci siamo imbattuti, fino ad ora, in pochi possibili comportamenti asintotici:²²

- moti che hanno per limite un punto di equilibrio (sistemi con nodi, fuochi, punti di sella);
- moti periodici (sistemi conservativi, Lotka–Volterra, il moto periodico isolato sul ciclo limite);
- moti asintotici a un ciclo limite.

E’ naturale chiedersi se ci siano altre possibilità. La risposta, come vedremo, *in dimensione due* (più precisamente per sistemi piani, si veda oltre) è sostanzialmente negativa. Ma prima di discutere la questione è utile introdurre una nozione, quella di insieme limite, tramite la quale si rende formale la

²¹Allo studio degli strumenti ad arco si dedicò molto il fisiologo e fisico H. von Helmholtz, che con ingegnossissimi metodi sperimentali riuscì a vedere il movimento “a dente di sega” con cui oscillano le corde strofinate (staccandosi e riattaccandosi dall’arco con la frequenza stessa della nota), ma non arrivò a formulare un modello teorico soddisfacente. Chi comprese la sostanza del fenomeno fu il fisico indiano C.V. Raman, nel 1918. Studioso di acustica, Raman ebbe un fugace contatto con la meccanica quantistica verso la fine degli anni venti, e nel 1928 pubblicò due lavori sulla diffusione anelastica di fotoni dalle molecole, su cui si basa la cosiddetta spettroscopia Raman, che gli valsero il premio Nobel per la fisica; in seguito riprese a occuparsi quasi esclusivamente di acustica.

²²Solo mettendoci sul toro \mathbb{T}^2 , e sfruttando in modo essenziale la topologia del toro, abbiamo trovato moti (poco) più complicati, precisamente moti quasi-periodici, per i quali la chiusura della traiettoria è l’intero spazio.

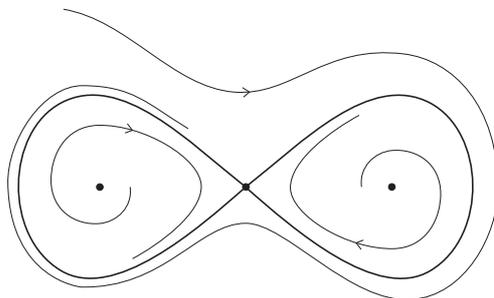


Figura 40: Un possibile insieme limite in dimensione due

nozione di comportamento asintotico. La nozione ha senso, del tutto in generale, per un qualunque sistema dinamico (M, Φ) , continuo o discreto, in dimensione qualsiasi.

DEFINIZIONE 4 Sia (M, Φ) un qualunque sistema dinamico. Il punto $y \in M$ si dice essere un ω -punto per $x \in M$, se esiste una successione $t_1, t_2, \dots \rightarrow \infty$ tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi^{t_j}(x) = y$; si dice ω -limite di x , e si denota $L_\omega(x)$, l'insieme degli ω -punti di x . Similmente, $y \in M$ si dice essere un α -punto per x se esiste una successione $t_1, t_2, \dots \rightarrow \infty$ tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi^{-t_j}(x) = y$; si dice α -limite di x , e si denota $L_\alpha(x)$, l'insieme degli α -punti di x .

Segue banalmente dalla definizione che $L_\omega(\Phi^t(x)) = L_\omega(x)$ per ogni t , e similmente per L_α ; si parla perciò indifferentemente di insieme limite di un punto, o di una traiettoria, o di un moto.

Se il moto $\Phi^t(x)$ converge al punto di equilibrio x^* per $t \rightarrow \infty$, allora $L_\omega(x) = x^*$; se $\Phi^{-t}(x)$ converge a x^* allora $L_\alpha(x) = x^*$. La traiettoria di un moto periodico è contemporaneamente ω -limite e α -limite di ogni punto della traiettoria. Un ciclo limite attrattivo è ω -limite per tutti i punti nel bacino di attrazione. Per la traslazione sul toro, con ω_1/ω_2 irrazionale, l' ω -limite e l' α -limite di un qualsiasi punto x coincidono entrambi con l'intero toro. La figura 40 suggerisce un altro possibile esempio di ω -limite in \mathbb{R}^2 , costituito da un punto di equilibrio instabile e dalle sue separatrici (si immagini di avere attrito ordinario all'esterno delle separatrici, attrito anomalo all'interno). Chiedersi quali siano le proprietà asintotiche di un moto, vuol dire comprendere come siano fatti i suoi insiemi limite. Di qui in avanti, per definitezza, faremo riferimento solo all' ω -limite, ma tutto si trasporta in maniera ovvia all' α -limite.

Alcune proprietà elementari dell' ω -limite sono contenute nella proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 8 Se $D \subset M$, chiuso e limitato, è invariante in avanti, allora per ogni $x \in D$ l' ω -limite $L_\omega(x)$ non è vuoto, è contenuto in D , è chiuso, ed è invariante; inoltre se $y \in L_\omega(x)$, allora $L_\omega(y) \subset L_\omega(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Se il moto $\Phi^t(x)$ è periodico, la dimostrazione è banale: la traiettoria stessa di x è l' ω -limite di x , e tutte le proprietà sono ovvie. Se il moto non è periodico, sia t_1, t_2, \dots una successione convergente all'infinito; gli infiniti punti $\Phi^{t_j}(x)$ hanno certamente una accumulazione $y \in D$, cui converge una opportuna sottosuccessione; pertanto y appartiene a $L_\omega(x)$ che non è vuoto. Che $L_\omega(x)$ sia contenuto in D segue immediatamente dalla definizione di $L_\omega(x)$ e dalla chiusura di D . Per mostrare la chiusura di $L_\omega(x)$ consideriamo una successione $y_1, y_2, \dots, y_j \in L_\omega(x)$, convergente a $y \in D$, e mostriamo che allora $y \in L_\omega(x)$. Ciò è immediato perché se t_1^i, t_2^i, \dots è una successione tale che $\Phi^{t_j^i}(x) \rightarrow y_i$, allora per i e j sufficientemente grandi il punto

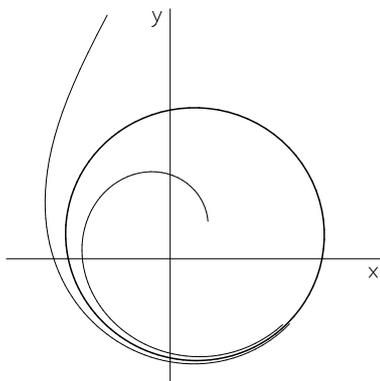


Figura 41: Il ciclo limite per l'esempio 18

$\Phi^{t_j}(x) \in D$ è arbitrariamente vicino a y , e questo basta. Anche l'invarianza di $L_\omega(x)$ è del tutto ovvia: se $\Phi^{t_j}(x) \rightarrow y \in L_\omega(x)$, allora per ogni t la successione $\Phi^{t+t_j}(x)$ converge a $\Phi^t(y)$, dunque $\Phi^t(y) \in L_\omega(x)$. Infine per l'ultima proprietà, dobbiamo dimostrare che se $z \in L_\omega(y)$, allora $z \in L_\omega(x)$. Questo è evidente perché se $\Phi^{t_j}(y) \rightarrow z$, posto $y_j = \Phi^{t_j}(y)$ si ha $y_j \in L_\omega(x)$ (perché $L_\omega(x)$ è invariante e y vi appartiene), e dunque z , limite della successione degli y_j , per la chiusura di $L_\omega(x)$ appartiene anch'esso a $L_\omega(x)$. \square

Vale la pena di osservare che, in generale, $L_\omega(y)$ è contenuto in $L_\omega(x)$ solo propriamente: ad esempio nella situazione illustrata in figura 40, per x non appartenente al laccio delle separatrici l'insieme limite $L_\omega(x)$ contiene il punto di equilibrio instabile y^* e le sue separatrici; ma per ogni y sulle separatrici, $L_\omega(y)$ contiene il solo y^* .

Per sistemi in dimensione più alta di due, gli insiemi limite possono essere molto complicati. Non è così invece per i sistemi piani, precisamente per i sistemi dinamici continui (M, Φ) nei quali M è un aperto di \mathbb{R}^2 invariante in avanti (escludiamo così il toro, o varietà bidimensionali più complicate). Un risultato interessante, anche per le applicazioni, è il seguente.

PROPOSIZIONE 9 (Teorema di Poincaré–Bendixon) *Sia (M, Φ) un sistema dinamico continuo piano, e sia $D \subset M$ un sottoinsieme chiuso, limitato, invariante in avanti. Per ogni $x \in D$, l'insieme limite $L_\omega(x)$ o contiene un punto di equilibrio, oppure è una traiettoria periodica.*

La dimostrazione, un po' complessa, è riportata nell'appendice H; va sottolineato che l'ipotesi di sistema piano è essenziale e il teorema non si generalizza in alcun modo in dimensione più alta (si usa in modo essenziale il fatto che nel piano le traiettorie non hanno modo di scavalcarsi).

Il teorema consente di stabilire con facilità l'esistenza di cicli limite in sistemi interessanti, per i quali ragionamenti semplici come quello che abbiamo svolto in connessione all'equazione di Van der Pol non sarebbero possibili. Un esempio elementare è questo:

- **ESEMPIO 18** In \mathbb{R}^2 privato dell'origine consideriamo il flusso che in coordinate polari r, ϑ si scrive

$$\dot{r} = r(1 - r + \mu \cos \vartheta), \quad \dot{\vartheta} = 1.$$

Per μ non troppo grande, precisamente per $0 \leq \mu < 1$, è sicuramente invariante l'anello D che ha per bordo i cerchi di raggio $r_0 = 1 - \mu$ e $r_1 = 1 + \mu$ (il flusso sul bordo è entrante); d'altra parte, per la seconda equazione, non ci sono punti di equilibrio in D . Segue immediatamente

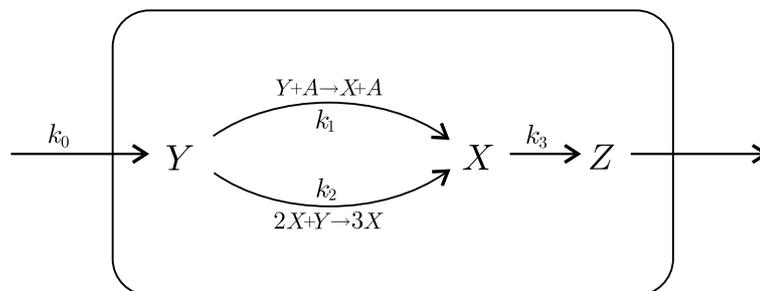


Figura 42: Ad illustrazione dell'esempio 19

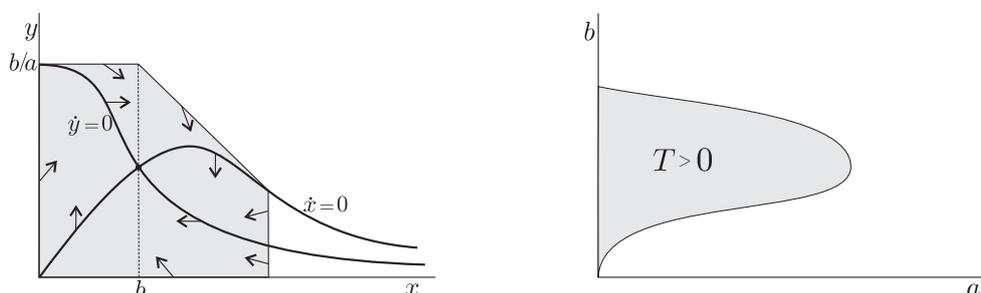


Figura 43: L'applicazione del teorema di Poincaré–Bendixon all'esempio 19

l'esistenza in D di un ciclo limite; si veda la figura 41. Si osservi che on può esservi più di una curva periodica, altrimenti l'area compresa tra le curve sarebbe invariante, mentre è facile verificare che (per μ piccolo) la divergenza di f è strettamente negativa.

Un esempio più interessante è il seguente:

- ESEMPIO 19 Consideriamo le equazioni

$$\dot{x} = -x + ay + x^2y, \quad \dot{y} = b - ay - x^2y, \quad a, b > 0; \quad (3.20)$$

si tratta di un modello interessante per la chimica — un modello semplificato della reazione di glicolisi — in cui una sostanza Y è rifornita con ritmo costante k_0 , $\dot{y} = k_0$, ed avvengono due reazioni attraverso le quali Y si converte in un prodotto intermedio X , che a sua volta poi decade in Z :

- i) Y si trasforma in X in un primo modo con reazione catalizzata da A , ovvero $A + Y \rightarrow A + X$, e corrispondentemente $\dot{y} = -k_1ay$, $\dot{x} = k_1ay$;
- ii) Y si trasforma in X in un secondo modo con reazione autocatalitica $2X + Y \rightarrow 3X$, e corrispondentemente $\dot{y} = -k_2x^2y$, $\dot{x} = k_2x^2y$; infine
- iii) X decade spontaneamente in Z , a ritmo $\dot{x} = -k_3x$.

Mettendo insieme si trova

$$\dot{x} = -k_3x + ak_1y + k_2x^2y, \quad \dot{y} = k_0 - ak_1y - k_2x^2y,$$

e con elementari riscalamanti delle variabili, del tempo e della costante a ($x = \sqrt{k_3/k_2}x'$, $y = \sqrt{k_3/k_2}y'$, $t = t'/k_3$, $a = a'k_3/k_1$), posto $b = k_0(k_2/k_3)^{3/2}$, si arriva alle equazioni 3.20.

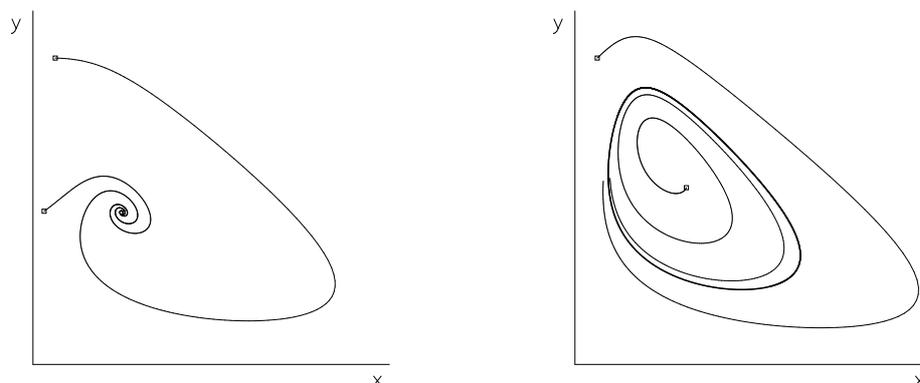


Figura 44: Esempio 18, simulazione numerica: a sinistra ($a = 0.15$, $b = 0.4$) non è presente alcun ciclo limite; a destra ($a = 0.07$, $b = 0.4$) è presente un ciclo limite stabile.

Si vede che \dot{x} si annulla sulla curva $y = \frac{x}{a+x^2}$, mentre \dot{y} si annulla sulla curva $y = \frac{b}{a+x^2}$; si ha allora un punto di equilibrio nell'intersezione

$$(x^*, y^*) = \left(b, \frac{b}{a+b^2} \right),$$

si veda la figura 43, sinistra.

Guardando la disposizione del campo vettoriale in figura, non è difficile tracciare un contorno \mathcal{C}_1 tale che il campo vettoriale sia entrante nella regione da esso racchiusa. Ad esempio, si può prendere il poligono che ha per lati l'asse y tra l'origine e il punto $(0, b/a)$ da cui parte la curva $\dot{y} = 0$, di seguito il segmento orizzontale fino a $x = b$, poi il segmento con pendenza -1 fino a tagliare la curva $\dot{x} = 0$, infine il segmento verticale fino all'asse x e di qui l'asse x fino all'origine (area grigia in figura). E' immediato verificare che su tutti i lati il flusso è entrante (per i lati orizzontali e verticali si guarda il segno di \dot{y} o \dot{x} ; per il lato con pendenza -1 , basta osservare che $\dot{x} + \dot{y} = b - x < 0$ per $x > b$).

Guardiamo ora la matrice jacobiana nel punto di equilibrio,

$$\frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(x, y)} \Big|_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -a - x^2 \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{-a+b^2}{a+b^2} & a + b^2 \\ -\frac{2b^2}{a+b^2} & -a - b^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è $a + b^2 > 0$, mentre la traccia ha l'espressione

$$T = \frac{-a + b^2 - (a + b^2)^2}{a + b^2};$$

se ne deduce facilmente che si ha $T > 0$ se

$$0 \leq a < \frac{1}{2}(-1 - 2b^2 + \sqrt{1 + 8b^2}).$$

Si veda la figura 43, destra, regione grigia. In queste condizioni il punto di equilibrio è un fuoco o un nodo instabile, perciò si può tracciare una curva chiusa \mathcal{C}_0 attorno al punto di equilibrio attraverso il quale il flusso è uscente. Complessivamente si ottiene un anello D , compreso tra \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , invariante in avanti e privo di punti di equilibrio. Per il teorema di

Poincaré–Bendixon esiste all’interno dell’anello un ciclo limite attrattivo e la reazione chimica è oscillante. Per valori dei parametri a e b fuori dalla regione grigia in figura 43, il punto di equilibrio invece è attrattivo. Muovendosi lungo una curva nello spazio dei parametri dall’esterno verso l’interno della regione grigia si ha una biforcazione di Hopf. La figura 44 mostra l’andamento della traiettorie in assenza e in presenza del ciclo limite (sinistra e destra rispettivamente).

La scoperta che sistemi chimici possono avere un andamento oscillante nel tempo (*orologi chimici*) risale a diversi decenni fa. La storia è abbastanza interessante. Il primo a riconoscerne l’esistenza, all’inizio degli anni ’50 del ’900, fu il chimico russo Boris Pavlovich Belousov (1893 - 1970). La scoperta era però in conflitto con l’idea allora dominante (il pregiudizio, diremmo oggi) che la termodinamica potesse descrivere soltanto sistemi che tendono a una situazione di equilibrio; di fatto, Belousov non riuscì a pubblicare il suo lavoro e finì con l’abbandonare la ricerca. Lo fece pubblicare nel 1957, in una rivista minore, un biochimico di nome Schnoll, che contemporaneamente lo passò a un giovane allievo, Zhabotinsky, che lo verificò e poté raccontare il risultato, finalmente, a un convegno importante. Da allora si susseguirono i riconoscimenti, fino al premio Lenin nel 1980, che però gli fu assegnato (assieme a Zhabotinsky) alla memoria, dieci anni dopo la morte.

La reazione detta di Belousov–Zhabotinsky è complessa e coinvolge molti passaggi; il suo studio va oltre gli scopi di queste note. Concretamente non è difficile da produrre mischiando quattro reagenti; dà luogo a oscillazioni di concentrazione dei prodotti di reazione, che si manifestano in cambiamenti di colore con periodo dell’ordine del minuto, su scale spaziali dell’ordine del millimetro. In Internet non è difficile trovare spiegazioni e filmati (un punto di partenza è http://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Belousov).

- ESERCIZIO 12 Si studi il sistema

$$\dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2}, \quad \dot{y} = bx \left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right),$$

determinando la condizione su a e b per l’esistenza di un ciclo limite attrattivo. [Si proceda come nell’esempio 19: si traccino le curve $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$; si determini una regione invariante...]

4 Flussi in dimensione tre, mappe bidimensionali, moti caotici

I flussi in dimensione due, come si è visto, presentano un certo interesse, ma non ammettono una fenomenologia davvero complessa. In sostanza, il fatto che le traiettorie non possano intersecarsi rende inevitabili alcune monotonicità — se un moto spiraleggia verso l’esterno, così farà sempre — e di conseguenza il comportamento asintotico delle traiettorie non riesce a essere complicato. Le cose cambiano radicalmente aggiungendo una dimensione. Proseguiremo allora il nostro studio così: innanzitutto nel prossimo paragrafo 4.1 proporremo un esempio “elementare” in dimensione tre, il pendolo forzato, ed esploreremo il suo comportamento con metodi numerici; in questo modo ci formeremo un po’ di intuizione preliminare sulla nozione di moto caotico. Nei paragrafi successivi introdurremo in modo matematicamente appropriato (ma sempre basandoci su esempi) la nozione “forte” di sistema caotico, basata sulla cosiddetta “dinamica simbolica casuale”, e mostreremo che il pendolo forzato, assieme a molti altri sistemi, vi rientra. Infine daremo una nozione più debole, in un certo senso generica, di sistema caotico, introducendo la nozione di esponente di Lyapunov.

4.1 Il pendolo forzato

Studiamo qui sistemi meccanici a un grado di libertà forzati con forzante periodica nel tempo, precisamente della forma

$$\ddot{x} = F(x, \Omega t) \quad (4.1)$$

con F periodica di periodo 2π nel secondo argomento, cosicchè la dipendenza da t è periodica di periodo $2\pi/\Omega$. Per essere definiti faremo riferimento al pendolo forzato con forzante sinusoidale,

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \mu \cos \Omega t .$$

L'equazione *non autonoma* del secondo ordine (4.1) questa volta è equivalente a un sistema autonomo di *tre* equazioni del primo ordine, precisamente

$$\dot{x} = v , \quad \dot{v} = F(x, \varphi) , \quad \dot{\varphi} = \Omega \quad (4.2)$$

(con dato iniziale $\varphi(0) = 0$); nell'esempio,

$$\dot{x} = v , \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \mu \cos \varphi , \quad \dot{\varphi} = \Omega . \quad (4.3)$$

E' indispensabile pensare il moto nello spazio a tre dimensioni ove vivono le variabili x, v, φ , precisamente (nell'esempio)

$$M = S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 ;$$

si osservi in particolare che solo in questo spazio allargato vale il teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle soluzioni, e traiettorie diverse non si possono intersecare.

Sistemi della forma 4.2, a causa della dipendenza da t , non conservano l'energia, ma preservano il volume in M (la divergenza del campo vettoriale $f = (v, F(x, \varphi), \Omega)$ è nulla) e anche l'area nel piano xv (oltre al volume si conserva $d\varphi$; equivalentemente, la divergenza della proiezione di f sul piano è nulla); per questo sono detti conservativi.

Un modo molto conveniente di rappresentare il moto del sistema (4.3) (o più in generale (4.2)) è allora di riportarsi ancora al piano xv facendo una *sezione* dello spazio tridimensionale con un piano Σ del tipo $\varphi = \text{cost}$, ad esempio $\varphi = 0$, e restringendo l'osservazione ai tempi discreti t_0, t_1, t_2, \dots corrispondenti al passaggio della traiettoria attraverso la sezione, ovvero al passaggio di φ per lo zero; si veda la figura 45. In questo modo per ogni dato iniziale $(x_0, v_0) \in \Sigma$ si ottiene una successione (x_k, v_k) , $k \in \mathbb{Z}$, formata dalle successive intersezioni con Σ della traiettoria uscente da (x_0, v_0) . Accanto al flusso continuo $\Phi_\mu^t : M \rightarrow M$ resta così definita una mappa $\Psi_\mu : \Sigma \rightarrow \Sigma$, tale che $(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Psi_\mu(x_k, v_k)$; il corrispondente sistema dinamico discreto (Σ, Ψ_μ) è detto *Sezione di Poincaré* del sistema continuo. Per i sistemi della forma (4.2), dal momento che φ avanza uniformemente con velocità Ω , ci si riduce in pratica a osservare il sistema a intervalli regolari di tempo $t_k = k\tau$, $\tau = 2\pi/\Omega$. Come si è osservato sopra, la mappa Ψ_μ preserva l'area in Σ .

Consideriamo innanzitutto la situazione limite $\mu = 0$. In tal caso la forzante non esiste, e la mappa Φ si riduce alla mappa al tempo $\tau = 2\pi/\Omega$ per il pendolo ordinario. Il ritratto in fase del sistema a tempo discreto è pertanto identico a quello solito del pendolo, salvo che le traiettorie non sono curve continue ma successioni discrete di punti che corrono, e in generale si addensano, sulle traiettorie continue.²³ Si veda la figura 46. Per $\mu = 0$ la mappa eredita dal flusso

²³Nel caso eccezionale in cui il periodo T del pendolo (per il dato iniziale prescelto) sia commensurabile con il tempo di osservazione τ , la successione (x_k, v_k) , $k \in \mathbb{Z}$, è periodica e dunque composta da un numero finito di punti. In generale non lo è (il periodo T dipende infatti con continuità dall'energia E , e genericamente $T(E)/\tau$ non è razionale), e allora la successione è composta da infiniti punti diversi, che si dimostrano riempire densamente la traiettoria del sistema continuo (la curva di livello dell'energia).

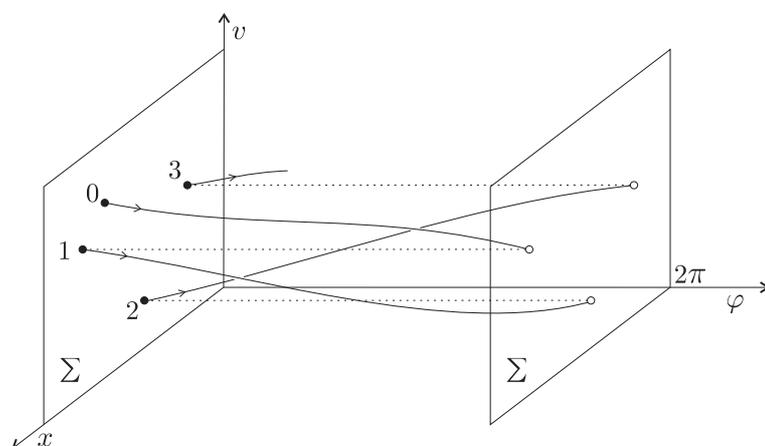


Figura 45: *Flusso continuo e sezione di Poincaré per il pendolo forzato.*

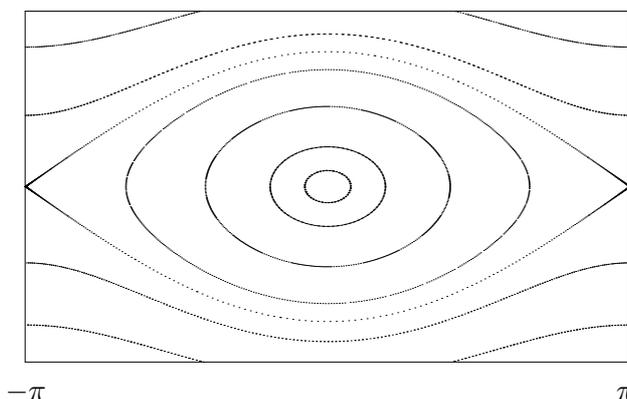


Figura 46: *La sezione di Poincaré per il pendolo forzato per $\mu = 0$, $\omega = 1/\sqrt{2}$.*

la conservazione dell'energia, ovvero ammette la costante del moto $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, pertanto tutte le intersezioni (x_k, v_k) che seguono un dato iniziale (x_0, v_0) stanno su una medesima curva di livello della funzione E .

La situazione muta sostanzialmente non appena si prenda $\mu \neq 0$, anche piccolo. Si guardi la figura 47, che mostra la sezione di Poincaré per il sistema con $\omega = 1/\sqrt{2}$, $\Omega = 1$, per valori crescenti di μ tra 0.02 e 1. Il sistema, a causa del termine forzante, non conserva più l'energia: tuttavia per μ piccolo (primi due riquadri in alto), se si prendono dati iniziali non troppo vicini alle separatrici del pendolo, si vede bene che punti appartenenti a una medesima traiettoria giacciono ancora su una medesima curva, *come se esistesse ancora nel sistema una costante del moto*. Se però si prende un dato iniziale (x_0, v_0) prossimo alle separatrici, si ottengono movimenti significativamente diversi: le successive intersezioni (x_k, v_k) vanno a riempire non una curva, ma una regione bidimensionale di area positiva, dando l'idea che invece la costante del moto non esista. Tali moti, qualitativamente nuovi e tutti da capire, sono detti *moti caotici*, e la regione da essi occupata è detta essa stessa *regione caotica*; per contro, la regione riempita da curve regolari è detta *regione ordinata*, e i moti che vi si svolgono sono chiamati *moti ordinati*. Aumentando μ , la misura della regione caotica cresce fino a diventare preponderante. In ogni riquadro, tutti i punti presenti nella regione caotica (tra i 4000 e gli 8000, a seconda del riquadro) provengono da una singola traiettoria.

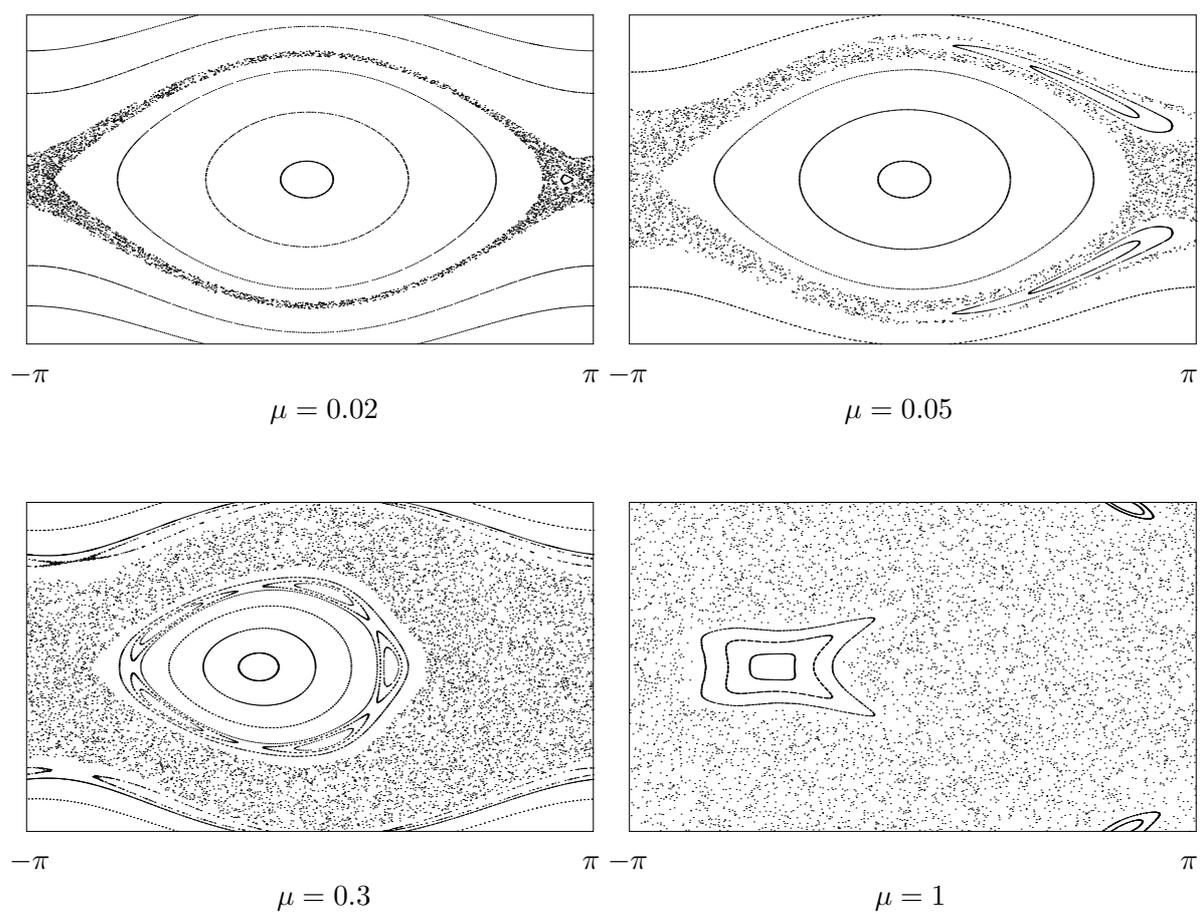


Figura 47: La sezione di Poincaré per il pendolo forzato, per $\omega = 1/\sqrt{2}$, $\Omega = 1$ e diversi valori di μ .

Diversi altri modelli presentano una fenomenologia analoga. Anzi, invece di studiare una mappa Φ dedotta come sezione di Poincaré di un sistema a tempo continuo, si può scrivere direttamente un sistema a tempo discreto, dipendente da un parametro μ , che al pari del pendolo forzato ammetta una costante del moto per $\mu = 0$ e la perda per $\mu > 0$. Un esempio significativo, molto studiato, è la cosiddetta *mappa standard*, che agisce nel modo seguente:

$$(x, v) \mapsto \Phi(x, v) = (x + v \bmod 2\pi, v - \mu \sin(x + v)) ;$$

come per il pendolo la coordinata x è da pensarsi periodica di periodo 2π (lo spazio delle fasi è il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$). E' immediato verificare che la mappa preserva l'area (la matrice jacobiana ha determinante uno). Per $\mu = 0$, v stessa è costante e il ritratto in fase consiste in linee orizzontali. Per $\mu > 0$ il ritratto cambia in modo non banale e compaiono moti caotici, poco visibili per μ piccolo ma sempre più vistosi al crescere di μ . Una selezione di immagini si trova in figura 48; è impressionante, e difficilmente immaginabile senza figure come queste, la complessità della dinamica per una mappa apparentemente così semplice.

Al fine di dare una caratterizzazione appropriata, ben controllata matematicamente, dei moti caotici nel pendolo forzato, studiamo preliminarmente due modelli “elementari”, precisamente due sistemi dinamici discreti, nei quali l'intero spazio delle fasi è ricoperto da moti caotici, in un senso che non sarà difficile precisare; vedremo poi come la nozione si trasporta al pendolo forzato.

4.2 La “trasformazione del panettiere”

Il primo sistema che prendiamo in considerazione è conosciuto come “trasformazione del panettiere” (*baker's transformation*). Si tratta di una mappa invertibile $\Phi : M \rightarrow M$, ove M è il quadrato $[0, 1) \times [0, 1)$ e Φ è così definita:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{per } x < \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{per } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (4.4)$$

“La pasta è schiacciata fino a dimezzare l'altezza e raddoppiare la lunghezza; poi è tagliata e sovrapposta”, si veda la figura 49. E' facile vedere che l'inversa esiste e si ottiene scambiando x con y nella definizione di Φ . La figura 50 dà un'idea del modo di operare della mappa: il primo riquadro mostra 20 000 punti presi a caso (con distribuzione uniforme) in un disco; i riquadri successivi ne seguono l'evoluzione per alcune iterazioni di Φ . *La presenza di discontinuità fa sì che (M, Φ) non sia, strettamente parlando, un sistema dinamico nel senso stretto della definizione 1.*²⁴ Ugualmente è un modello utile a introdurre in modo elementare alcune idee importanti della teoria.

Denotiamo $z = (x, y) \in M$. Punti z e z' sul medesimo segmento verticale si avvicinano esponenzialmente applicando Φ^t , $t > 0$; viceversa, punti sul medesimo segmento orizzontale si allontanano, o più precisamente si avvicinano esponenzialmente applicando Φ^{-t} , $t > 0$. *Tutto quello che diremo su questo modello dipende solo da questo meccanismo di contrazione e dilatazione esponenziale*, ed è condiviso da tutti i sistemi dinamici che lo possiedono. Ma per procedere speditamente sfrutteremo una peculiarità di questo particolare sistema, che ci consente di far breccia con poco sforzo nella sua dinamica e allo stesso tempo di introdurre la nozione, profonda, di *dinamica simbolica*.

Per ogni punto $z = (x, y) \in M$, scriviamo le coordinate x e y in notazione binaria:

$$x = 0.a_0 a_1 a_2 \dots, \quad y = 0.b_0 b_1 b_2 \dots, \quad a_k, b_k = 0, 1,$$

²⁴Si osservi che la discontinuità è localizzata nel segmento $x = 1/2$, ma le immagini del segmento formano un insieme denso.

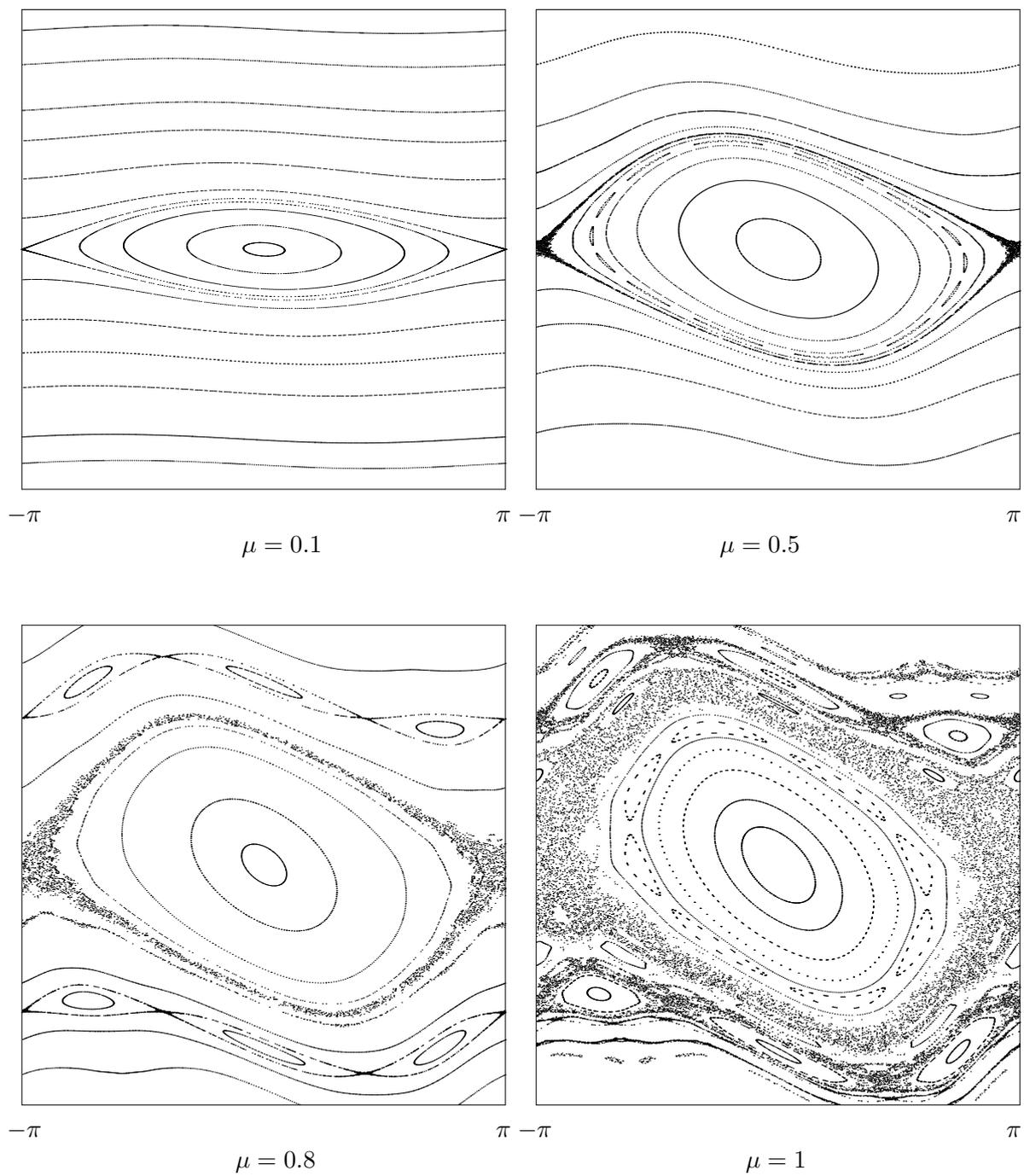


Figura 48: Il ritratto in fase per la “mappa standard”, per diversi valori di μ . La scala delle ordinate per tutti i riquadri è $-3 \leq v \leq 3$.

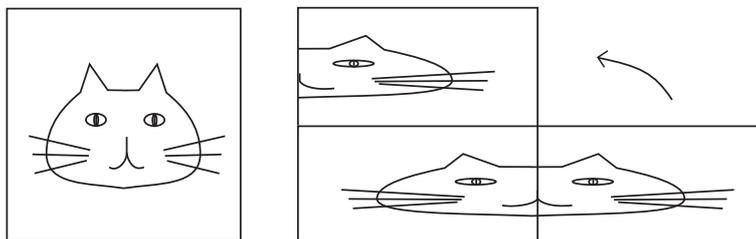


Figura 49: La trasformazione del panettiere.

e rimuoviamo l’ambiguità (peraltro marginale) della notazione escludendo le sequenze che terminano con la cifra “1” ripetuta indefinitamente. Capovolgendo e incollando y a sinistra di x formiamo una stringa doppiamente infinita del tipo

$$\sigma = \dots \sigma_{-3} \sigma_{-2} \sigma_{-1} \cdot \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots = \dots b_2 b_1 b_0 \cdot a_0 a_1 a_2 \dots$$

(il punto decimale individua l’origine della stringa). In questo modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra M e l’insieme Σ delle stringhe infinite di simboli 0,1 (privato delle stringhe che a destra o a sinistra terminano con il simbolo “1” ripetuto indefinitamente). Denotiamo con $h : M \rightarrow \Sigma$, $z \mapsto \sigma = h(z)$, la mappa così costruita. E’ facile verificare che

Se al punto $z \in M$ è associata la stringa σ , allora al punto $z' = \Phi(z)$ resta associata la stringa σ' traslata a sinistra di un posto, ovvero definita da $\sigma'_k = \sigma_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Se si preferisce, si può invece traslare (a destra!) il punto decimale. La verifica, immediata, sfrutta la regola per cui, in base due, la moltiplicazione/divisione per due si fa spostando il punto decimale a destra/sinistra di un posto. Si osservi che se $x \geq \frac{1}{2}$ la prima cifra 1 scivola da x a y . Se denotiamo con $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la traslazione nello spazio di stringhe che abbiamo considerato, si ha così

$$\Psi \circ h = h \circ \Phi . \tag{4.5}$$

E’ interessante osservare che se si introduce in Σ una opportuna distanza, ad esempio

$$\text{dist}(\sigma, \sigma') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \delta(\sigma_k, \sigma'_k) , \quad \delta(\sigma_k, \sigma'_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_k = \sigma'_k \\ 1 & \text{se } \sigma_k \neq \sigma'_k \end{cases} ,$$

allora Ψ è continua con inversa continua (a ogni iterazione di $\Psi \circ \Psi^{-1}$, la distanza tra due punti al più raddoppia). Pertanto, in base alla definizione 1, (Σ, Ψ) è un sistema dinamico topologico. La (4.5) è una relazione di *coniugazione* delle due dinamiche, e consente di trasferire lo studio, facilissimo, di (Σ, Ψ) nello studio di (M, Φ) . Si osservi che h non è un homeomorfismo (non potrebbe esserlo, visto che Φ è discontinua). E’ immediato tuttavia verificare che stringhe vicine vanno in punti vicini, ovvero h^{-1} è continua, mentre non lo è h .²⁵

Introduciamo ora in M la naturale partizione $M = M_0 \cup M_1$, con $M_0 := \{(x, y) \in M : x < \frac{1}{2}\}$ e $M_1 = M \setminus M_0$ (figura 10a); i due insiemi corrispondono rispettivamente a $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1$. Quali sono i punti z che dopo k iterazioni di Φ si troveranno in M_l , $l = 0, 1$? Sono ovviamente quelli col simbolo l in posizione k , cioè con $\sigma_k = l$; questo simbolo infatti, applicando k volte Φ , si porta in posizione zero e determina l’appartenenza di $\Phi^k(z)$ a M_0 o M_1 . Se ne deduce immediatamente che

²⁵Un controesempio è dato dalla successione $z_k = (x_k, y)$ con y qualsiasi e $x_k = 1/2 - 2^{-k}$; si ha $z_k \rightarrow z = (1/2, y)$, mentre la corrispondente stringa $h(z_k)$ converge a $(\dots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}.0111\dots)$, che non appartiene a Σ e in particolare non si avvicina a $h(z) = (\dots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}.1000\dots)$.

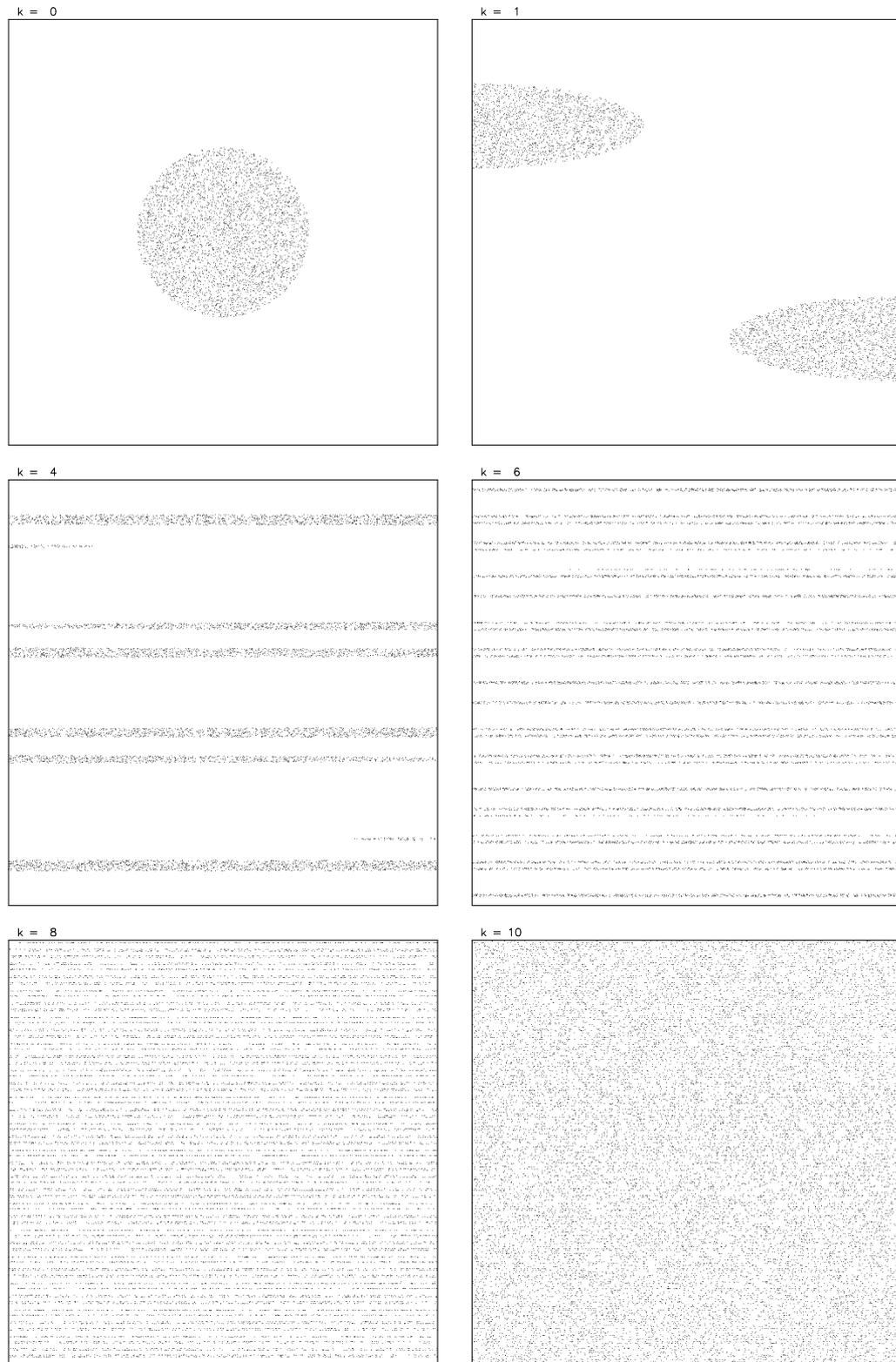


Figura 50: *Evoluzione di 20000 punti inizialmente raccolti in un disco, per effetto della trasformazione del panettiere.*

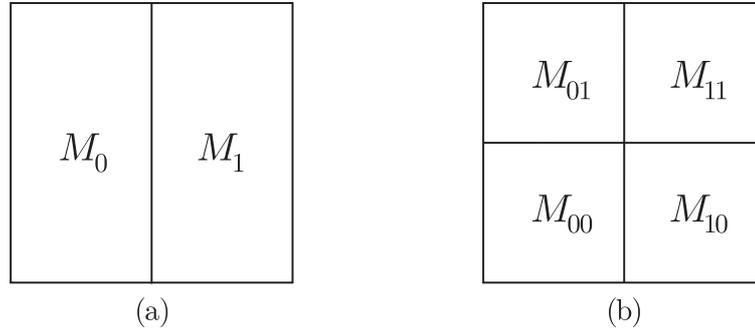


Figura 51: Le partizioni del quadrato M secondo la prima cifra binaria di x e di x, y .

Proprietà 1: *Comunque si prenda una stringa di simboli $\sigma \in \Sigma$, esiste un dato iniziale $z \in M$ che la realizza, precisamente tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il punto $\Phi^k(z)$ si trova in M_0 o M_1 a seconda che sia $\sigma_k = 0$ oppure 1.*

Il punto cercato altro non è che $z = h^{-1}(\sigma)$. La stringa σ associata a z appare qui come *storia* di z , relativa alla partizione (o all’osservazione) $M = M_0 \cup M_1$: ad ogni $z \in M$ resta infatti associata $\sigma \in \Sigma$ secondo la regola

$$\sigma_k = l \quad \text{se} \quad \Phi^k(z) \in M_l, \quad l = 0, 1. \quad (4.6)$$

La storia di z , si osservi, fornisce una definizione alternativa²⁶ di h ,

Invece di una divisione verticale possiamo prendere una divisione orizzontale e far riferimento alla prima cifra binaria di y anziché di x , con identico risultato. Possiamo anche introdurre contemporaneamente le due divisioni, ovvero considerare la partizione di M in quattro sottoinsiemi

$$M = M_{00} \cup M_{01} \cup M_{10} \cup M_{11},$$

avendo posto (figura 51)

$$\begin{aligned} M_{00} &= \{(x, y) : 0 \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y < \frac{1}{2}\}, & M_{01} &= \{(x, y) : 0 \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y < 1\}, \\ M_{10} &= \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x < 1, 0 \leq y < \frac{1}{2}\}, & M_{11} &= \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x < 1, \frac{1}{2} \leq y < 1\}. \end{aligned}$$

A quale sottoinsieme appartenga $z = (x, y)$ dipende evidentemente dalla prima cifra binaria di x e y e dunque, facendo riferimento a $\sigma = h(z)$, dai simboli σ_{-1} e σ_0 .

Fissiamo ora l’attenzione non su Φ ma su Φ^2 . Preso $z \in M$, in quale insieme si troverà $\Phi^{2k}(z)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$? Dipende evidentemente dai due simboli che si troveranno in posizione -1 e 0 , a cavallo del punto decimale, dopo k iterazioni di Φ^2 , e cioè da σ_{2k-1} e σ_{2k} . *Tutte e quattro le combinazioni $(0, 0), \dots, (1, 1)$ sono evidentemente possibili*, e questo per ogni scelta di k , in modo del tutto indipendente. Così, immaginata a piacere una passeggiata sui quattro sottoinsiemi M_{ij} della partizione, esiste sempre un dato iniziale z tale che gli iterati $\Phi^{2k}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, la realizzano esattamente.

La generalizzazione è immediata: per ogni $s > 0$ possiamo tracciare su M una scacchiera di $2^s \times 2^s$ celle quadrate di lato $\delta_s = 2^{-s}$; a quale cella appartenga un punto $z \in M$ dipende

²⁶Equivalente se ci si riferisce alla partizione $M = M_0 \cup M_1$, ma più profonda e generalizzabile. In generale, per un qualunque sistema dinamico discreto (M, Φ) , una partizione $\{M_0, \dots, M_{n-1}\}$ di M genera una corrispondenza tra punti di M e stringhe a n simboli, associando a $z \in M$ la sua storia, con ovvia generalizzazione della (4.6). In generale la codifica non è biunivoca. Quando lo è, come in questo caso (punti diversi hanno necessariamente storie diverse), la partizione si dice *separante*.

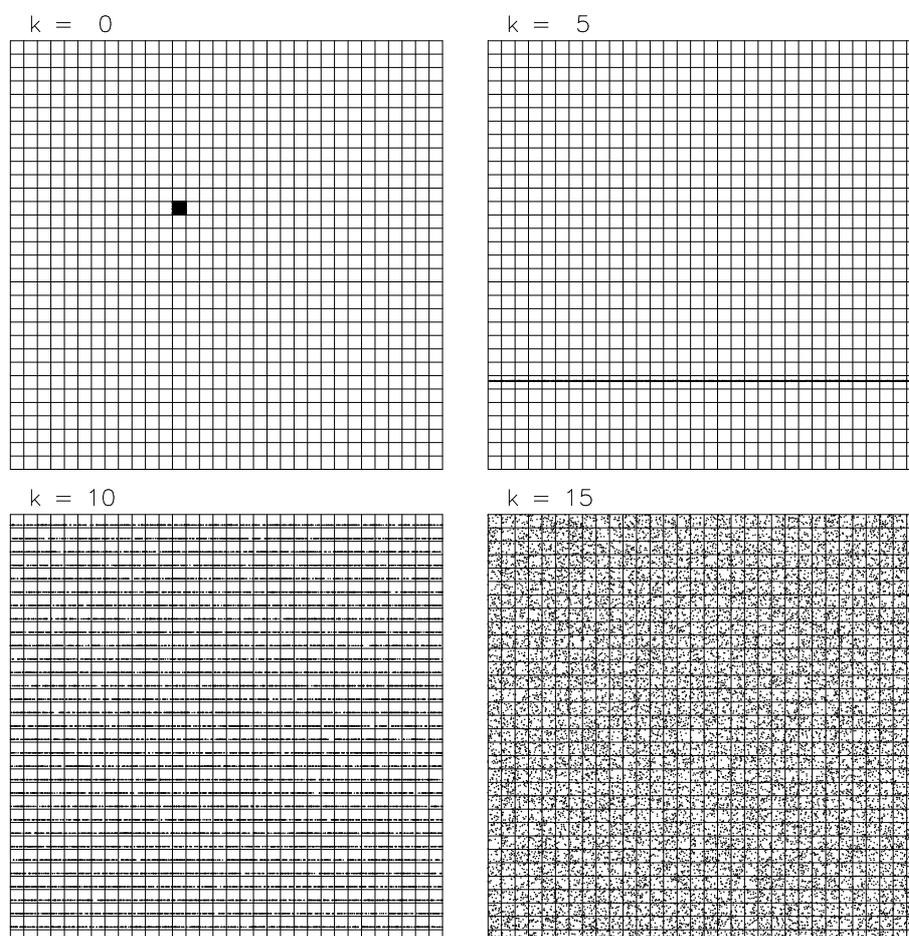


Figura 52: *Evoluzione di 20 000 punti, inizialmente racchiusi in una cella della quadrettatura $2^5 \times 2^5$, per effetto della trasformazione del panettiere. Dopo 5 iterazioni l'insieme ha invaso una riga di celle; dopo 10 iterazioni le ha invase tutte; dopo altre 5 iterazioni i punti appaiono sparsi ovunque su M .*

evidentemente solo dalle prime s cifre binarie di x e di y , ovvero dagli elementi $\sigma_{-s}, \dots, \sigma_{s-1}$ di $\sigma = h(z)$. Ora fissiamo l'attenzione sulle iterazioni Φ^{2ks} di Φ^{2s} . E' immediato convincersi che

Proprietà 2: *Comunque si scelga una passeggiata sulla scacchiera di $2^s \times 2^s$ celle descritta sopra, esiste un punto $z \in M$ tale che le iterazioni $\Phi^{2ks}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, la realizzano.*

Prendendo ad esempio $s = 15$, si ottiene una griglia di $32\,768 \times 32\,768$ celle; se M è un foglio con il lato di mezzo metro, la risoluzione è superiore a quella delle buone macchine da stampa. Presa un'immagine ad arbitrio, ad esempio Dante e Virgilio in una illustrazione del Doré, o pagina tre del quotidiano preferito, esiste sempre $z \in M$ tale che i suoi iterati (osservati di trenta in trenta) la riproducono perfettamente entro la risoluzione prefissata (anzi: possiamo scegliere l'ordine nel quale i punti vanno a comporre l'immagine). Fissata la risoluzione, *tutti* i comportamenti sono possibili, e aver osservato ad esempio in quale cella della griglia vanno a collocarsi i primi k punti, non dà *nessuna* informazione sulla cella in cui andrà a cadere il punto successivo. Naturalmente la *stragrande* maggioranza dei dati iniziali produce solo, per iterazione di Φ^{2s} , un grigio uniforme. Si

osservi che il numero $2s$ di iterazioni necessarie cresce solo col logaritmo della risoluzione.

Il rovescio della medaglia è che non appena abbiamo un’orbita che per qualche ragione ci interessa — diciamo l’orbita che realizza il disegno preferito — se solo introduciamo una microscopica smagliatura nel dato iniziale, spostandolo di δ , in poche iterazioni l’orbita si perde: la separazione tra l’orbita iniziale e l’orbita variata raddoppia a ogni iterazione — gli esponenziali sono al lavoro — e dopo un numero di iterazioni di ordine $|\log \delta|$ le due orbite diventano indipendenti. Ancora: se al posto di un punto prendiamo una macchiolina, ad esempio una delle caselline di lato 2^{-s} della nostra griglia, e ne seguiamo l’evoluzione, in poche iterazioni la macchia si sparpaglia ovunque: in $2s$ iterazioni già vengono invase *tutte* le celle della griglia e rapidamente il foglio si fa grigio uniforme; si veda la figura 52.

La coniugazione con la traslazione nello spazio di stringhe conduce immediatamente ad alcune proprietà curiose della mappa del panettiere. Ad esempio:

Proprietà 3: *L’insieme delle orbite periodiche di Φ è denso in M .*

Infatti, presi ad arbitrio $\varepsilon > 0$ e $z \in M$, sia k tale che $2^{-k} < \varepsilon$. Se σ è la stringa binaria associata a z , $\sigma = h(z)$, prendiamo σ' identica a σ tra $-k$ e $k-1$, e poi riproduciamo periodicamente il blocco di cifre $\sigma_{-k}, \dots, \sigma_{k-1}$ a destra e a sinistra. Il punto $z' = h^{-1}(\sigma')$ è periodico di periodo $T = 2k$, e dista da z meno di ε .

Ancora:

Proprietà 4: *Esiste in M un’orbita densa.*

Infatti, l’insieme delle stringhe finite è numerabile, e possiamo ordinarle ad esempio nel modo spontaneo

$$0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots$$

Costruiamo poi la stringa infinita $\hat{\sigma}$ prendendo a piacere la semistringa di sinistra, e mettendo invece a destra del punto decimale, una accanto all’altra, *tutte* le stringhe finite scritte sopra:

$$\hat{\sigma} = \dots .0100011011000001010 \dots$$

Denotiamo $\hat{z} = h^{-1}(\hat{\sigma})$. Scelti ora ad arbitrio $\varepsilon > 0$ e $z \in M$, e posto $\sigma = h(z)$, prendiamo k tale che sia $2^k < \varepsilon$. Il blocco finito $\sigma_{-k}, \dots, \sigma_{k-1}$ di $\sigma = f(z)$ certamente si trova da qualche parte in $\hat{\sigma}$, diciamo tra $t-k$ e $t+k-1$ con t opportuno. Dopo esattamente t iterazioni di Φ tale blocco si porterà a cavallo del punto decimale; in quel momento $\Phi^t(\hat{z})$ disterà da z meno di ε .

- ESERCIZIO 13 Facendo riferimento all’ordinamento indicato nel corso della prova, si dia una stima da sopra al t necessario perché $\Phi^t(\hat{z})$ arrivi a distanza ε da un qualunque prefissato $z \in M$. [Risp: la dipendenza è del tipo $t \sim \varepsilon^{-2} \log \varepsilon^{-1}$; un conto grossolano dà la stima $t < 16\varepsilon^{-2} \log_2 \varepsilon^{-1}$].

Questo sistema, che al variare del dato iniziale contiene, per così dire, tutti i moti immaginabili, ma tutti instabili ed evanescenti al minimo errore nel dato iniziale, costituisce il prototipo dei sistemi caotici.

4.3 Il “gatto di Arnol’d”

Introduciamo qui un secondo semplice esempio dal quale si vede con chiarezza che la radice del comportamento caotico sta precisamente nella presenza di contrazione e divergenza esponenziale delle traiettorie vicine, senza bisogno di particolarità o trucchi adattati al sistema. Si tratta di

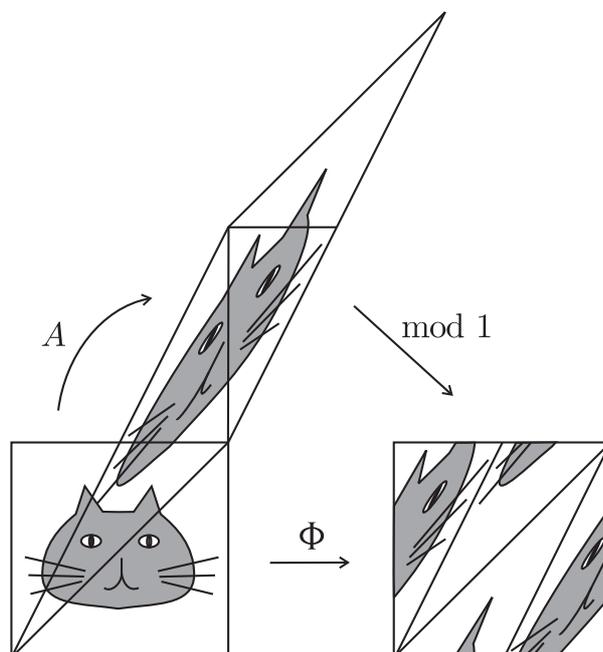


Figura 53: Il Gatto di Arnol’d: (a) l’azione di A . (b) la riduzione al toro.

un sistema dinamico noto universalmente col nomignolo²⁷ “Gatto di Arnol’d”; tecnicamente è un esempio di *automorfismo algebrico* del toro \mathbb{T}^2 .

Sia M il toro bidimensionale $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \bmod 1\}$. Poniamo

$$\Phi(x, y) = (x + y, x + 2y) \bmod 1 ,$$

o in altra notazione

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1 , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Gli unici requisiti importanti della matrice A sono che sia intera con determinante ± 1 e abbia autovalori di modulo diverso da uno.²⁸ Il fatto che sia intera con $|\det A| = 1$ garantisce (la condizione è necessaria e sufficiente) che anche l’inversa sia intera, e dunque che la trasformazione sia biunivoca e regolare *sul toro*.²⁹ Con la matrice A indicata sopra gli autovalori sono

$$\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 , \quad \lambda^{-1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 ,$$

e i corrispondenti autovettori sono

$$U^s = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} , \quad U^u = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

²⁷Dal fatto che Arnol’d, per illustrare il comportamento del sistema usava mostrare, come anche qui abbiamo fatto, l’evoluzione di un gatto, atrocemente straziato dalla dinamica caotica.

²⁸Per questo basta $\text{Tr } A \neq 0$ se $\det A = -1$, mentre per $\det A = 1$ serve $|\text{Tr } A| > 2$.

²⁹Punti di \mathbb{R}^2 le cui coordinate differiscono di interi, cioè equivalenti mod 1, vanno in punti equivalenti mod 1, e viceversa.

la loro pendenza è irrazionale (e anche questo si verifica sempre nelle nostre ipotesi su A). Si vede immediatamente che risulta

$$\Phi^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (4.7)$$

(ovvero si può prima iterare t volte l’applicazione della matrice in \mathbb{R}^2 , e solo alla fine portarsi al toro con l’operazione di modulo).

La figura 53 illustra la trasformazione Φ sulla rappresentazione del toro fornita dal quadrato $[0, 1) \times [0, 1)$: per effetto di A il quadrato si schiaccia e si allunga a losanga, poi si riavvolge — senza lacerazioni — sul toro. La figura 54 mostra l’evoluzione di 20 000 punti inizialmente presi a caso in un piccolo quadrato. L’origine,³⁰ che denotiamo z^* , è un punto fisso: $\Phi(z^*) = z^*$. Se consideriamo le rette E^s e E^u parallele a U^s e U^u passanti per l’origine, e le riportiamo sul toro con l’operazione mod 1, otteniamo due curve W^s e W^u che si avvolgono a elica sul toro, dette rispettivamente *varietà stabile* e *varietà instabile* di z^* . Dal fatto che la loro pendenza è irrazionale si deduce immediatamente — si riveda l’esempio della traslazione sul toro, all’inizio del paragrafo 3.1 — che W^s e W^u non si chiudono mai e anzi sono dense sul toro; si veda la figura 55. Tutti e soli i punti di W^s convergono a z^* iterando Φ , ovvero

$$W^s = \{z \in M : \Phi^t(z) \rightarrow z^* \text{ per } t \rightarrow \infty\}, \quad (4.8)$$

e la convergenza è asintoticamente esponenziale:

$$\frac{\text{dist}(\Phi^{t+1}(z), z^*)}{\text{dist}(\Phi^t(z), z^*)} \rightarrow \lambda < 1 \quad \text{per } t \rightarrow \infty$$

(anzi, il rapporto è esattamente λ per t sufficientemente grande). Si tratta di proprietà facili, ma delicate, sulle quali è bene fermarsi a riflettere. Similmente si ha

$$W^u = \{z \in M : \Phi^{-t}(z) \rightarrow z^* \text{ per } t \rightarrow \infty\}, \quad (4.9)$$

ancora con convergenza asintoticamente esponenziale. Le varietà stabile e instabile sono anche dette, insieme, *varietà asintotiche*.

Il comportamento della mappa, come appare dalla figura 54, si comprende a livello intuitivo molto bene sulla base della 4.7: infatti l’applicazione ripetuta della matrice A muta il piccolo quadrato in una strisciolina molto lunga (circa λ^{-t}) e stretta (circa λ^t) attorno a E^u ; l’operazione di modulo porta E^u su W^u , e la strisciolina, per t grande, segue sempre più a lungo W^u , invadendo densamente il toro.

Prendiamo ora un punto $z \in M$ qualsiasi, consideriamo le rette $E^s(z)$, $E^u(z)$ parallele a U^s e U^u passanti per z , e come prima le riportiamo al toro con l’operazione mod 1. Si ottiene una coppia di curve aperte $W^s(z)$ e $W^u(z)$, dette rispettivamente varietà stabile e instabile del punto z , con queste proprietà:

- i) si intersecano trasversalmente in z ;
- ii) sono invarianti, nel senso che $\Phi(W^s(z)) = W^s(\Phi(z))$ e similmente per W^u ;

³⁰Nella rappresentazione del toro che stiamo adoperando l’origine appare replicata ai quattro vertici del quadrato. Non c’è problema, se si preferisce, a rappresentare il toro con il quadrato centrato nell’origine.

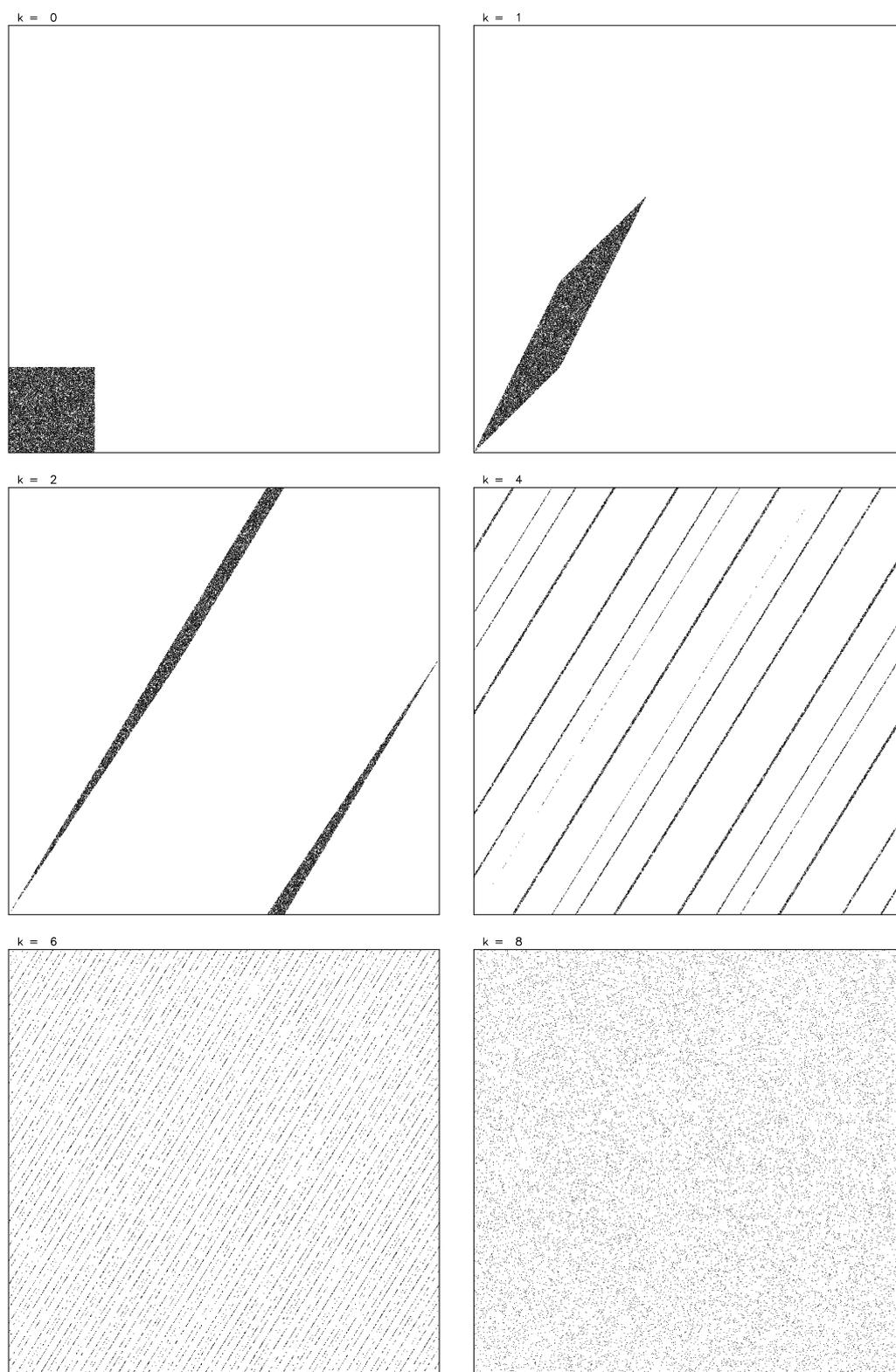


Figura 54: Evoluzione di 20 000 punti inizialmente raccolti in un piccolo quadrato, per effetto del “Gatto di Arnol'd”.

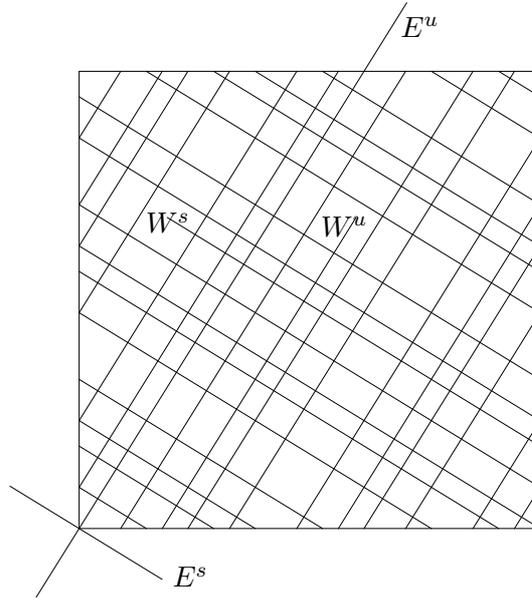


Figura 55: Le varietà stabile e instabile dell'origine per il Gatto di Arnol'd.

- iii) per $z' \in W^s(z)$ risulta $\text{dist}(\Phi^t(z'), \Phi^t(z)) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, e la convergenza è asintoticamente esponenziale:

$$\frac{\text{dist}(\Phi^{(t+1)}(z'), \Phi^{(t+1)}(z))}{\text{dist}(\Phi^t(z'), \Phi^t(z))} \rightarrow \lambda < 1 \quad \text{per } t \rightarrow \infty ;$$

similmente per W^u , con $-t$ al posto di t .

- iv) $W^s(z)$ e $W^u(z)$ dipendono con continuità³¹ da z .

Sfruttando la presenza delle varietà asintotiche, si può dimostrare che per il Gatto di Arnol'd

PROPOSIZIONE 10 *Preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$ esiste $k > 0$, $k < (\text{cost}) \log \varepsilon^{-1}$, tale che per ogni scelta di una successione di punti di M*

$$\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$$

esiste un'orbita di Φ^k che la approssima entro ε , precisamente esiste $\tilde{z} \in M$ tale che

$$\text{dist}(\Phi^{jk}(\tilde{z}), z_j) < \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{Z} .$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $z \in M$, sia $B_\varepsilon(z)$ il quadrato chiuso di semilato ε coi lati paralleli a W^s e W^u (figura 56). Fissato ε , sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda^m < \varepsilon$; poniamo $k = 2m$ ($k \simeq 2 \log \varepsilon^{-1} / \log \lambda^{-1}$), e chiediamoci innanzitutto quali siano i punti di $B_\varepsilon(z_0)$ che si trovano in $B_\varepsilon(z_1)$ dopo esattamente k iterazioni. Per questo consideriamo l'insieme $\Phi^m(B_\varepsilon(z_0))$: si tratta con evidenza di un rettangolo di semilati $\lambda^m \varepsilon$ e $\lambda^{-m} \varepsilon$, centrato in $\Phi^m(z_0)$ e allungato in direzione di W^u (figura 56). Allo stesso modo $\Phi^{-m}(B_\varepsilon(z_1))$ è un rettangolo di semilati $\lambda^{-m} \varepsilon$ e $\lambda^m \varepsilon$, centrato in $\Phi^{-m}(z_1)$ e allungato in direzione

³¹La continuità, o più in generale la regolarità, di una curva dipendente da un parametro (qui z) si può definire così: presa una qualunque retta trasversa alla curva, l'intersezione tra le due dipende con regolarità dal parametro (la scelta della retta è irrilevante).

di W^s . La lunghezza dei due rettangoli è tale che comunque siano messi i loro centri $\Phi^m(z_0)$ e $\Phi^{-m}(z_1)$ su M , essi si intersecano (almeno) in un quadratino U di lato $\lambda^m \varepsilon$ (se l'intersezione contiene più di un quadratino, ne prendiamo uno qualsiasi; alternativamente si riduce un po' ε , in modo da evitare l'ambiguità). Tirando indietro U di m iterazioni si trova un rettangolino di lati $\lambda^{2m} \varepsilon = \lambda^k \varepsilon$ e ε contenuto in $B_\varepsilon(z_0)$, col lato lungo parallelo a E^s , che denotiamo $B_\varepsilon^+(z_0)$ (“+” sta per “in uscita”). In modo analogo, portando avanti U di m iterazioni si trova un rettangolino di lati ε e $\lambda^k \varepsilon$ contenuto in $B_\varepsilon(z_1)$, questa volta col lato lungo parallelo a E^u , che denotiamo $B_\varepsilon^-(z_1)$ (“-” sta per “in arrivo”). *Esattamente in k iterazioni $B_\varepsilon^+(z_0)$ va in $B_\varepsilon^-(z_1)$, e dunque esso è l'insieme cercato.*

Il seguito della dimostrazione è più facile a capirsi che a raccontarsi. In modo del tutto analogo costruiamo $B_\varepsilon^+(z_1)$, che in k iterazioni finisce in $B_\varepsilon^-(z_2)$; con evidenza, $B_\varepsilon^s(z_1)$ e $B_\varepsilon^u(z_1)$ si intersecano in un quadratino di lati $\lambda^{-k} \varepsilon$, che riportato indietro in prossimità di z_0 dà un rettangolino più sottile del precedente, precisamente con il lato minore ridotto di un ulteriore fattore λ^k e il lato maggiore sempre lungo ε , contenuto nel precedente $B_\varepsilon^+(z_0)$ (figura 56). Esso è precisamente l'insieme che dopo k iterazioni è in $B_\varepsilon(z_1)$ e dopo altre k iterazioni è in $B_\varepsilon(z_2)$. Non è difficile convincersi che procedendo così, cioè cercando i punti che infilino una alla volta tutti i quadrati $B_\varepsilon(z_j)$ per $j > 0$, si trova una successione di rettangoli chiusi annidati, col lato maggiore di ugual lunghezza ε disposto parallelamente a $W^s(z_0)$ e il lato corto che va stringendosi (esponenzialmente) a zero. Una dimostrazione più formale si può fare per induzione. L'intersezione infinita di questi rettangoli è un segmento $I^+ \subset B_\varepsilon(z_0)$, di lunghezza ε , parallelo a $W^s(z_0)$; per ogni $z \in I^+$ si ha

$$\Phi^{jk}(z) \in B_\varepsilon(z_j) \quad \forall j \geq 0 .$$

In modo analogo si trova $I^- \subset B_\varepsilon(z_0)$, di lunghezza ε e parallelo a $W^u(z_0)$, i cui punti soddisfano la medesima relazione per $t \leq 0$. L'intersezione $\tilde{z} = I^+ \cap I^-$ è il punto cercato. \square

In conclusione: anche con il Gatto di Arnol'd possiamo trovare orbite che traccino, con la risoluzione che vogliamo, l'illustrazione preferita. Ma attenzione: questo è vero se pensiamo al dato iniziale proprio come a un punto sul toro determinato con infinita precisione; se invece ammettiamo la minima smagliatura ε , dopo tempi $\mathcal{O}(\log \varepsilon)$ il disegno comincia a impastarsi e degenera presto in un grigio uniforme. Insomma: per ogni fissata risoluzione ε , solo su tempi sostanzialmente più brevi di $\log \varepsilon$ questo sistema, al pari della trasformazione del panettiere, si comporta in modo regolare e deterministico; per tempi significativamente più lunghi il comportamento appare invece totalmente casuale.

4.4 Punti iperbolici; varietà stabile e instabile

Nel Gatto di Arnol'd, come si è visto, il meccanismo di transizione da un intorno all'altro è interamente regolato dalla presenza, per ciascun punto, delle varietà asintotiche W^s e W^u che si intersecano trasversalmente, e in questo modo “lanciano” in modo opportuno sottoinsiemi ben fatti di punti da un intorno all'altro. Considerazioni analoghe si sarebbero potute fare anche per la mappa del panettiere, senza bisogno del trucco *ad hoc* che abbiamo introdotto, facendo solo un po' di attenzione alla definizione di W^s e W^u che per la discontinuità della mappa sono anch'esse discontinue.³² Un meccanismo analogo si trova, come vedremo, anche nel pendolo forzato, almeno per ε piccolo, pur di restringersi a un intorno delle separatrici di spessore $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Per vederlo tuttavia dobbiamo introdurre alcune nozioni preliminari. Ci restringeremo per semplicità a un sistema

³²Adoperando ad esempio la proprietà caratteristica (4.8) come definizione di W^s , si vede che W^s è costituita da infiniti segmenti verticali di lunghezza uno, la cui ascissa è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \dots$; similmente W^u è costituita da infiniti segmenti orizzontali.

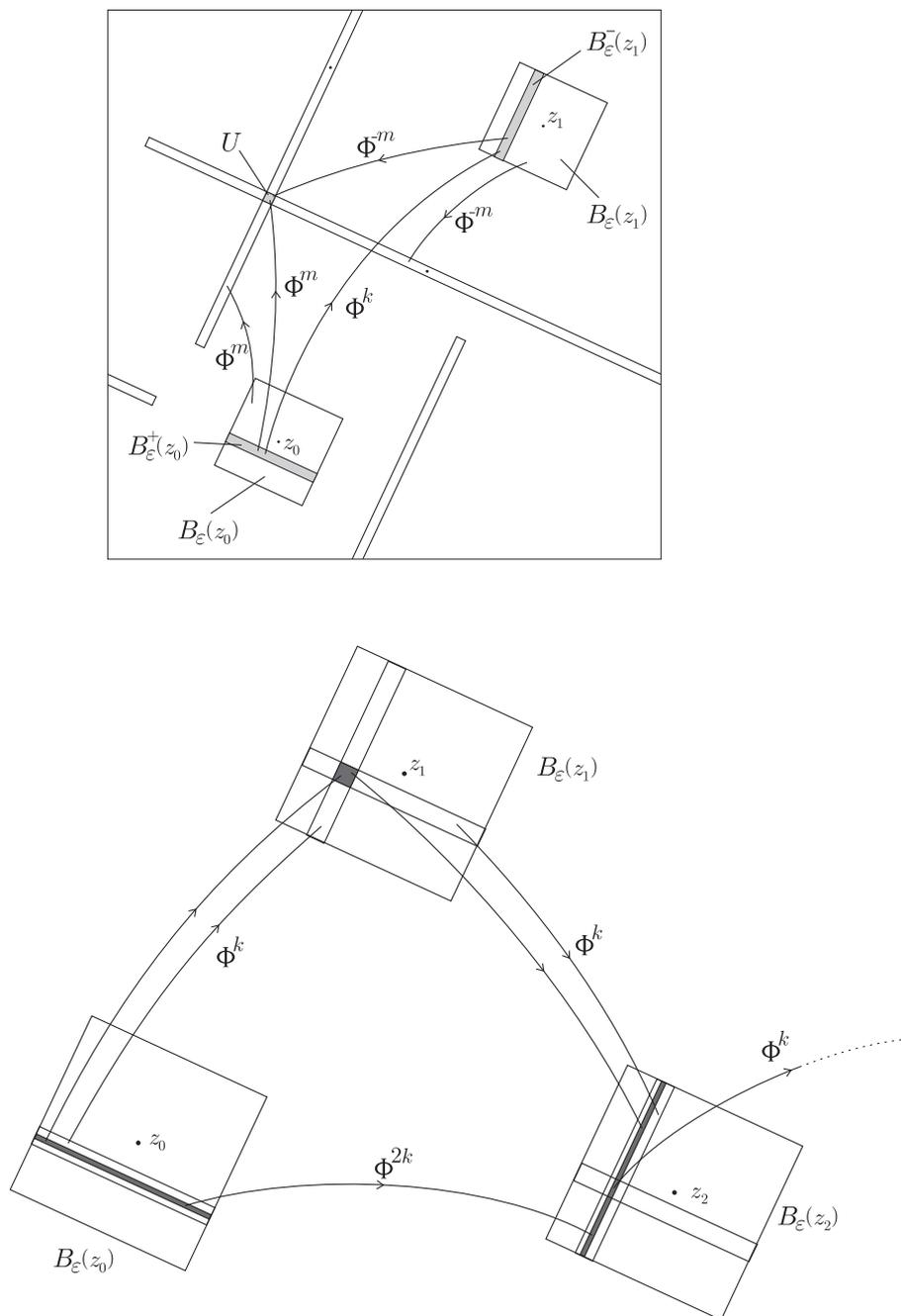


Figura 56: Il meccanismo di transizione da un intorno all'altro nel Gatto di Arnol'd.

dinamico discreto in dimensione due (la minima interessante), ma *tutto quello che diremo ha una naturale estensione in dimensione finita qualsiasi.*

a) *Punti iperbolici.* Sia A un operatore lineare che agisce su uno spazio vettoriale reale E di dimensione 2 (una matrice reale 2×2 , per ogni scelta della base in E che consente di identificare E stesso con \mathbb{R}^2).

DEFINIZIONE 5 *L'operatore A si dice iperbolico, se non ha autovalori di modulo uno.*

Il caso in cui entrambi gli autovalori abbiano modulo minore di uno oppure maggiore di uno è poco interessante, perciò di qui in avanti supporremo che A abbia due autovalori λ_s e λ_u diversi, necessariamente reali, tali che

$$|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u| .$$

Siano E^s e E^u i corrispondenti autospazi, e sia $\lambda = \max(|\lambda_s|, |\lambda_u|^{-1}) < 1$. Si ha allora

$$\|A^t \xi\| \leq \lambda^t \|\xi\| \quad \text{per} \quad \xi \in E^s$$

e similmente

$$\|A^{-t} \xi\| \leq \lambda^t \|\xi\| \quad \text{per} \quad \xi \in E^u .$$

Consideriamo ora un sistema dinamico discreto regolare invertibile (M, Φ) in dimensione due, e supponiamo che $z^* \in M$ sia un punto fisso, $\Phi(z^*) = z^*$. Sia E il piano tangente a M in z^* e $A = D\Phi(z^*)$ l'applicazione tangente, o derivata, $A : E \rightarrow E$ (in coordinate: M è un aperto di \mathbb{R}^2 , E è \mathbb{R}^2 , $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la matrice jacobiana di Φ calcolata in z^*).

DEFINIZIONE 6 *Il punto fisso z^* si dice iperbolico se A è un operatore iperbolico e i suoi autovalori sono, in modulo, uno minore e uno maggiore di uno.*

E' dunque iperbolica, secondo questa definizione, l'origine del Gatto di Arnol'd; iperbolico è anche, per ogni $\mu > 0$, il punto $(\pi, 0)$ per la mappa standard. Consideriamo poi un sistema a tempo continuo $\dot{z} = f(z)$ in dimensione due; sia z^* un punto di equilibrio, $f(z^*) = 0$, e sia J la matrice jacobiana di f calcolata in z^* . Per ogni t , denotiamo con A_t la matrice jacobiana della mappa Φ^t anch'essa calcolata in z^* .

PROPOSIZIONE 11 *Risulta $A_t = \exp(tJ)$; in particolare, se μ è autovalore di J , allora $\lambda = e^{t\mu}$ è autovalore di A_t .*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $\mathcal{A}(t, z)$ e $\mathcal{J}(z)$ la jacobiana, rispettivamente, di Φ^t e di f in un punto z qualsiasi (cosicché $A_t = \mathcal{A}(t, z^*)$, $J = \mathcal{J}(z^*)$). Si ha

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t, z) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi^t}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi^t}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial z} f(\Phi^t(z)) = \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi^t(z)) \frac{\partial \Phi^t}{\partial z}(z) = \mathcal{J}(\Phi^t(z)) \mathcal{A}(t, z) ,$$

e dunque per $z = z^*$

$$\dot{A}_t = J A_t .$$

Pertanto (ricordando anche $A_0 = I$) si ha $A_t = e^{tJ}$. □

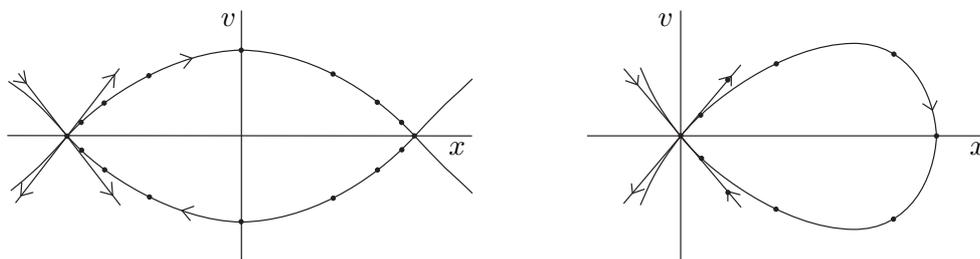


Figura 57: *Punti iperbolici e varietà asintotiche per il pendolo e per il sistema (4.10); i punti corrispondono a traiettorie discrete (traiettorie della mappa al tempo fissato), asintotiche per $t \rightarrow \pm\infty$ al punto di equilibrio.*

Per ogni t fissato dunque il punto di equilibrio z^* è punto fisso iperbolico di A_t , se e solo se J ha autovalori reali di segno opposto, ovvero se è una sella. Per la mappa al tempo t fissato del pendolo è così iperbolico il punto di equilibrio instabile $z^* = (\pi, 0)$, con $\lambda_u, \lambda_s = e^{\pm\omega t}$; similmente è iperbolica l'origine per la mappa a tempo fissato del sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \omega^2 x - ax^2, \quad (4.10)$$

le cui separatrici sono in figura 57 (destra) accanto a quelle del pendolo (sinistra).

PROPOSIZIONE 12 *I punti fissi iperbolici sono isolati.*

DIMOSTRAZIONE. Mettiamoci in coordinate in un intorno di z^* iperbolico, e poniamo $\Psi(z) = \Phi(z) - z$; la mappa Ψ con evidenza invia z^* in zero. Si vede subito che z^* è uno zero trasverso di Ψ : infatti, se A e B denotano rispettivamente la jacobiana di Φ e di Ψ , si ha $B = A - I$, e per l'iperbolicità di z_0^* risulta $\det B \neq 0$ (B non ha infatti autovalori nulli). Per la Proposizione 5, z^* è isolato. \square

Consideriamo ora una mappa Φ_μ che dipenda in modo regolare da un parametro μ , come la sezione di Poincaré del pendolo forzato.

PROPOSIZIONE 13 *Se Φ_0 ammette un punto fisso iperbolico z_0^* , allora per μ piccolo esiste un punto fisso iperbolico z_μ^* , μ -vicino a z_0^* .*

DIMOSTRAZIONE. E' anche questa una immediata conseguenza della Proposizione 5. \square

Nel caso del pendolo forzato dunque la mappa Ψ_μ (la sezione di Poincaré del flusso) ha un punto fisso z_μ^* anche per $\mu \neq 0$ (mentre però z_0^* è anche punto di equilibrio del flusso, z_μ^* è solo un punto periodico).

b) *Varietà stabile e instabile.* Gli autospazi E^s e E^u sono sottospazi di E invarianti per la mappa lineare $A : E \rightarrow E$, caratterizzati rispettivamente da contrazione e dilatazione dei vettori. E' naturale chiedersi se corrispondentemente non esistano, per la mappa nonlineare Φ che agisce su M , curve W^s e W^u contenute in M con proprietà analoghe a W^s e W^u , precisamente invarianti e caratterizzate, rispettivamente, da contrazione e dilatazione delle distanze. Tali curve esistono, abbiamo visto, per il Gatto di Arnol'd, e con evidenza esistono anche per la mappa al tempo uno

del pendolo o del sistema (4.10): W^s è la separatrice entrante, W^u è la separatrice uscente; è interessante osservare (figura 57) che per il pendolo, se pensiamo $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$ distinti (pensiamo cioè $x \in \mathbb{R}$), allora la varietà instabile di $(-\pi, 0)$ è contemporaneamente varietà stabile di $(\pi, 0)$, e viceversa; se pensiamo i due punti coincidenti, allora una medesima curva è contemporaneamente varietà stabile e instabile di uno stesso punto fisso, e questo è anche il caso del sistema (4.10).

Al di là di questi esempi molto particolari, un teorema fondamentale della teoria dei sistemi dinamici, detto *teorema della varietà stabile* o teorema di Perron–Hadamard, assicura del tutto in generale l'esistenza delle varietà stabile e instabile per un qualunque punto iperbolico z^* di un qualunque sistema dinamico regolare (M, φ) . Precisamente:

PROPOSIZIONE 14 *Sia z^* un punto fisso iperbolico per il sistema dinamico regolare discreto invertibile (M, Φ) in dimensione due. Posto*

$$\begin{aligned} W^s &= \{z \in M : \Phi^t(z) \rightarrow z^* \text{ per } t \rightarrow \infty\} \\ W^u &= \{z \in M : \Phi^{-t}(z) \rightarrow z^* \text{ per } t \rightarrow \infty\}, \end{aligned}$$

si ha che W^s, W^u sono curve immerse in M , prive di punti doppi, regolari quanto il sistema, tangenti in z^* rispettivamente a E^s e a E^u .

Se la mappa dipende da un parametro μ , allora le varietà asintotiche $W^s(z_\mu^*)$ e $W^u(z_\mu^*)$ del punto iperbolico z_μ^* dipendono in modo regolare anche da μ , nella classe di regolarità del problema.³³

La dimostrazione, piuttosto complessa, è riportata nell'appendice J.

DEFINIZIONE 7 *Le curve W^s e W^u oggetto della proposizione 13 sono dette rispettivamente varietà stabile e varietà instabile, e complessivamente varietà asintotiche, di z^* .*

Si osservi che W^s e W^u , per il modo stesso in cui sono state definite, sono invarianti: per ogni $t \in \mathbb{Z}$, $\Phi^t(W^s) = W^s$, e similmente per W^u . Inoltre, dal fatto che W^s e W^u sono tangenti rispettivamente a E^s e E^u , si deduce facilmente che, ad esempio per W^s , la convergenza di $\Phi^t(z)$ a z^* è asintoticamente esponenziale: precisamente esiste $\lambda < 1$ tale che

$$\text{dist}(\Phi^{t+1}(z), z^*) < \lambda \text{dist}(\Phi^t(z), z^*)$$

per t sufficientemente grande (il comportamento del sistema nonlineare, in prossimità di z^* , è prossimo a quello del sistema lineare; è sufficiente peggiorare un po' λ). Similmente per W^u , scambiando t con $-t$.

4.5 Intersezioni omocline

Consideriamo ora la mappa al tempo fissato del pendolo o di un qualunque sistema meccanico conservativo che abbia un punto di equilibrio instabile, come il sistema (4.10). Come si è già detto, per questi sistemi le varietà asintotiche coincidono con le separatrici, e dunque con le curve di livello dell'energia $E(x, v) = E^*$, avendo denotato con E^* l'energia del punto di equilibrio instabile. Dovendo coincidere con curve di livello di una funzione regolare, le varietà asintotiche non possono essere troppo complicate. Inoltre quando, come in questi esempi, le separatrici corrono a laccio da z^* a se stesso, avviene che una medesima curva è contemporaneamente varietà stabile e instabile

³³Per la nozione di regolarità delle curve, si veda la nota 31.

di z^* . La situazione tuttavia cambia drasticamente se si introduce un termine forzante. In tal caso infatti viene meno la conservazione dell'energia, cade la necessità che W^s e W^u coincidano, e come si verifica direttamente in esempi semplici come il pendolo, non appena μ è diverso da zero le due curve si differenziano e hanno una intersezione trasversa (il fenomeno è detto sdoppiamento, o *splitting*, delle separatrici). E' facile vedere che se ciò avviene, vi sono conseguenze drammatiche.

Per capire supponiamo di avere un qualunque sistema dinamico (M, Φ) ; sia z^* un suo punto iperbolico e siano W^s, W^u le corrispondenti varietà asintotiche. Supponiamo che W^s e W^u si intersechino trasversalmente in un punto z_0 (figura 58a).

DEFINIZIONE 8 Un'intersezione trasversa di W^s e W^u è detta punto omoclino,³⁴ o intersezione omoclina (trasversa).

Dalla definizione stessa di W^s e W^u si ha che

$$\Phi^t(z_0) \rightarrow z^* \quad \text{per} \quad t \rightarrow \pm\infty .$$

Ma evidentemente tutta la traiettoria (discreta) di z_0 , cioè tutti i punti $z_k = \Phi^k(z_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, hanno le medesime proprietà asintotiche, ovvero per ogni k si ha $\Phi^t(z_k) \rightarrow z^*$ per $t \rightarrow \pm\infty$; *ciascun punto z_k allora si trova ancora sull'intersezione di W^s e W^u* (cosa del resto ovvia, dal momento che W^s e W^u sono invarianti) e poiché la jacobiana $\frac{\partial \Phi^k}{\partial z}$ non è singolare, l'intersezione è ancora trasversa. Pertanto, *tutti i punti z_k sono a loro volta punti omoclini*; insieme essi costituiscono, si dice, una *traiettoria omoclina*.

Consideriamo, per essere definiti, il caso in cui la mappa Φ preserva l'orientazione (come certamente avviene se Φ è la mappa a un tempo T fissato di un flusso, o una sua deformazione); allora W^u , prolungata oltre z_0 , taglia W^s in z_1, z_2, \dots “da dentro a fuori”, e forma anse simili a quelle rappresentate in figura 58b (resta così intercalata almeno una seconda orbita omoclina, della quale però non ci occupiamo). Man mano che z_k , $k \rightarrow \infty$, si avvicina a z^* , i punti omoclini si addensano: la distanza tra l'uno e l'altro decresce esponenzialmente, grosso modo come λ_s^k , ove $\lambda_s < 1$ denota il minore dei due autovalori della jacobiana $A = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z^*}$. Corrispondentemente, i tratti di varietà instabile W^u si dispongono “parallelamente” a W^u stessa (altrimenti W^u intersecherebbe se stessa!), accumulandosi su di essa, e le anse sempre più schiacciate necessariamente si allungano: grosso modo come λ_u^k , se $\lambda_u > 1$ denota l'altro autovalore di A .

Ora, come è illustrato in figura 59a, per k abbastanza grande accade necessariamente (su questo punto è bene riflettere un po'; si usa la continuità di Φ in un intorno di z^*) che W^u , correndo (per tratti arbitrariamente lunghi) lungo W^u stessa, intersechi nuovamente W^s in due punti z'_0 e z''_0 : tali intersezioni sono anch'esse punti omoclini, benché non appartenenti alla famiglia, o traiettoria omoclina $\{z_k\}$ sopra considerata (né a quella intercalata); anzi, d'ora in poi si formeranno punti omoclini nuovi a ogni iterazione, come i punti z'''_0 e z^{iv}_0 rappresentati in figura 59b. Tutti questi punti, per iterazione di Φ , daranno luogo a nuove famiglie di punti omoclini, e man mano che i punti si avvicineranno a z^* vi saranno corrispondentemente nuove anse di W^u , e ancora nuove intersezioni con W^s e nuove famiglie... con un livello di complicazione che è impossibile illustrare in un disegno, e forse anche immaginare, ma che Poincaré ebbe chiaro.³⁵ Analoga situazione si ha evidentemente per k negativo: questa volta è la varietà stabile W^s a formare le anse, e la situazione

³⁴“Che si dirige verso lo stesso punto”: ὁμοῦς = stesso, κλίνω = inclinarsi, piegare verso.

³⁵“On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme...” (Poincaré, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*).

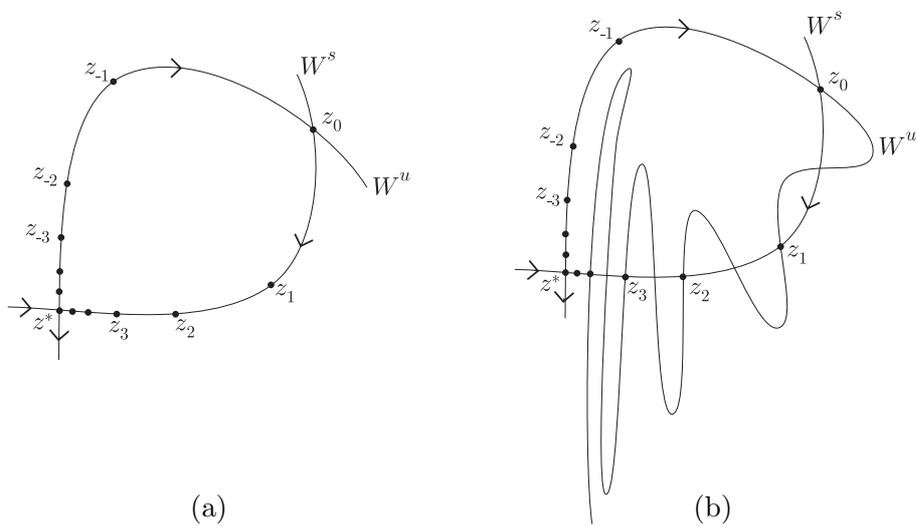


Figura 58: (a) Il punto omocline z_0 e i suoi iterati $z_k = \Phi^k(z)$; (b) le prime anse formate dalla varietà instabile W^u

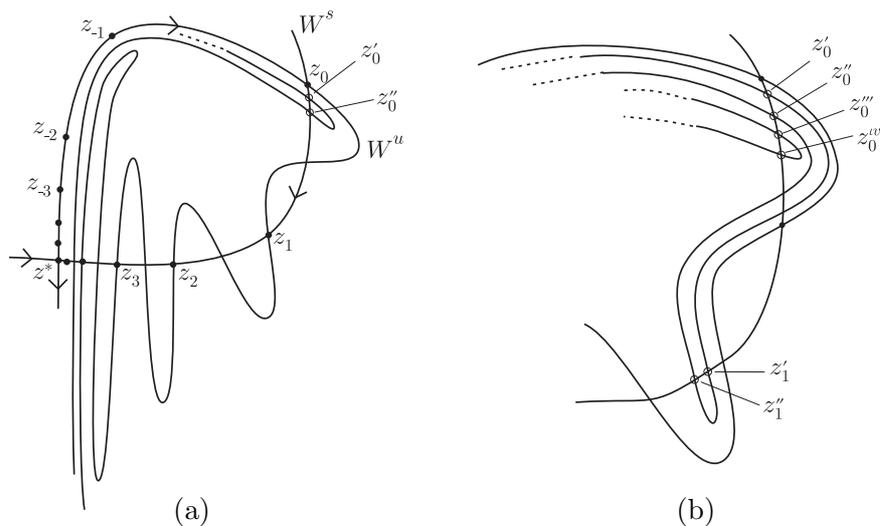


Figura 59: (a) Anse successive di W^u e nuovi punti omoclini; (b) dettaglio

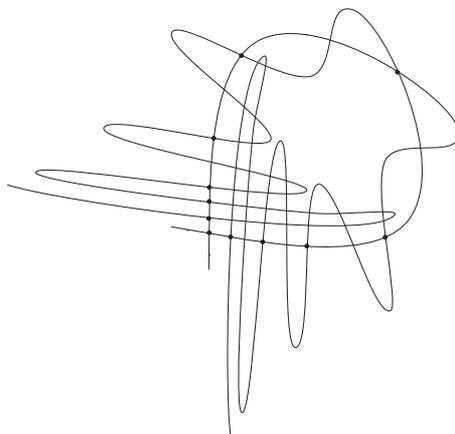
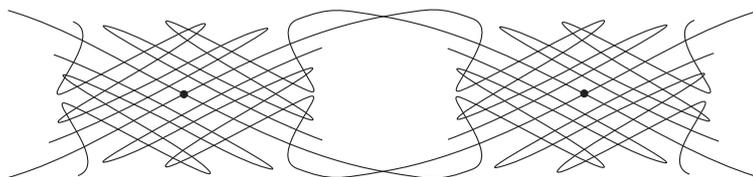
Figura 60: Una visione d'insieme di W^s e W^u 

Figura 61: Il caso del pendolo

complessiva è quella vagamente delineata in figura 60. La figura 61 mostra invece le anse di W^s e W^u per il pendolo.

Al di là della ovvia impressione di complessità della dinamica che danno le figure, si può dedurre in modo formale che in queste condizioni c'è nella dinamica del sistema una sostanziale imprevedibilità, analoga a quella che abbiamo visto per la mappa del Panettiere e per il Gatto di Arnol'd. La teoria generale di questi fenomeni è stata sviluppata da Smale negli anni '50 del '900, e per essa si rinvia a testi o corsi specializzati; proseguendo nello stile di queste note, noi qui non formuleremo risultati generali, ma studieremo in dettaglio, per capire, il caso del pendolo forzato.

4.6 La “catena di transizione” nel pendolo forzato

Prendiamo provvisoriamente per buona l'esistenza di un'intersezione omoclina trasversa nella sezione di Poincaré Ψ_μ del pendolo forzato, riservandoci di dimostrarne in seguito l'effettiva esistenza per μ piccolo; mostriamo che allora

PROPOSIZIONE 15 *Comunque si prenda $\delta > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$, $k < (\text{cost}) \log \delta^{-1}$, tale che per ogni scelta di una stringa a tre simboli*

$$\sigma = \{ \dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots \}, \quad \sigma_j = 0, \pm 1,$$

esiste un dato iniziale \tilde{z} i cui iterati $\{\Psi_\mu^{jk}(\tilde{z}), j \in \mathbb{Z}\}$ si trovano tutti nella palla $B_\delta(z_\mu^)$, e per $jk < t < (j+1)k$, $t \in \mathbb{Z}$, “obbediscono alla stringa”, precisamente:*

- Ψ_μ^t resta in $B_\delta(z_\mu^*)$, se $\sigma_j = 0$;

- compie un giro in senso orario (x cresce di 2π), se $\sigma_j = -1$;
- compie un giro in senso antiorario (x decresce di 2π), se $\sigma_j = +1$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione non differisce molto dalla dimostrazione della proposizione 10, ed è basata come quella sulla costruzione di un meccanismo di transizione, facilmente iterabile, da un intorno all’altro. Per alleggerire le espressioni ometteremo ovunque il riferimento a μ , che è fissato.

Per comodità soprattutto grafica pensiamo qui all’angolo x del pendolo come a una variabile su \mathbb{R} anziché su S^1 , distinguendo gli angoli che differiscono di 2π , e denotiamo z_m^* , $m \in \mathbb{Z}$, le repliche di z^* , $z_m^* = (\pi + 2m\pi, 0)$. Tracciamo una palla $B_\delta(z_m^*)$ attorno a z_m^* , prendendola per comodità della forma di un “rombo” di semilato δ con i lati disposti parallelamente a $W^{s,u}(z_m^*)$; denoteremo brevemente $B_m = B_\delta(z_m^*)$. Dobbiamo trovare $k \in \mathbb{N}$ e poi, per ogni scelta della stringa σ , un punto $\tilde{z} \in B_0$ tale che $\Psi^{kj}(\tilde{z})$, al variare di j , visiti successivamente

$$B_{m_1}, B_{m_2}, B_{m_j}, \dots,$$

in obbedienza alla stringa σ , ovvero con $m_{j+1} = m_j + \sigma_j$.

Ora, iterando Ψ ciascun rombo B_m si schiaccia addosso alla varietà instabile $W^u(z_m^*)$, e si allunga seguendola; a ogni iterazione il fattore di contrazione è grosso modo $\lambda = e^{-\omega T} < 1$, il fattore di dilatazione è λ^{-1} (λ e λ^{-1} sono gli autovalori della mappa linearizzata attorno a z_m^*). Con poca riflessione ci si convince che:

- per s opportuno, $s \simeq \log \delta^{-1} / \log \lambda$, l’evoluto $\Psi^s(B_m)$ ha la forma indicata in figura 62a, cioè è una striscia di spessore $\lambda^{-s}\delta$ e lunghezza $\mathcal{O}(1)$, disposta lungo $W^u(z_m^*)$; similmente l’evoluto all’indietro $\Psi^{-s}(B_m)$ è una striscia di analogo spessore e lunghezza, disposta invece lungo $W^s(z_m^*)$. *Calibrando s , e eventualmente riducendo appena δ , si può sempre far sì che $\Psi^s(B_m)$ intersechi trasversalmente le tre strisce $\Psi^{-s}(B_m)$ e $\Psi^{-s}(B_{m\pm 1})$ in tre piccoli rombi U_m^0 e U_m^\pm , come indicato in figura 62a.*
- A loro volta U_m^0 e U_m^\pm , tirati indietro di s iterazioni, danno luogo a tre strisce $B_{m,m}^+$ e $B_{m,m\pm 1}^+$, contenenti i punti che esattamente in $k = 2s$ iterazioni in avanti (apice ‘+’), partendo da B_m , restano in B_m , ovvero si spostano in $B_{m\pm 1}$. Le strisce hanno spessore $\mathcal{O}(\lambda^{-k}\delta)$ e semilunghezza δ , si appoggiano (è importante) con il lato corto alle pareti di B_m , e sono disposte parallelamente alla varietà stabile di z_m^* . Allo stesso modo esistono tre altre strisce trasversali a queste, allungate questa volta in direzione di W^s , che denotiamo $B_{m,m}^-$ e $B_{m,m\pm 1}^-$, contenenti i punti che esattamente in k iterazioni all’indietro (apice ‘-’) restano in B_m o vanno in $B_{m\pm 1}$; si veda la figura 62b. La striscia $B_{m,m+1}^+$ va in $B_{m+1,m}^-$, mentre $B_{m,m}^+$ va in $B_{m,m}^-$ e $B_{m,m-1}^+$ va in $B_{m-1,m}^-$ (a piede c’è il percorso, l’apice ‘+’ o ‘-’ dice se si sta usando Ψ^k o Ψ^{-k}).

Supponiamo ora, per fissare le idee, che la stringa σ prescelta, cui la dinamica deve obbedire, abbia $\sigma_0 = 1$ e $\sigma_1 = 0$; cerchiamo l’insieme dei punti che da B_0 vanno in B_1 nelle prime k iterazioni, e poi vi restano per le successive k . Quelli che soddisfano la sola prima condizione li conosciamo già, sono quelli che stanno in $B_{0,1}^+$, e sappiamo che sotto Ψ^k vanno in $B_{1,0}^-$. Di questi, quelli che nelle k successive iterazioni restano in B_1 sono evidentemente l’intersezione di $B_{1,0}^-$ con $B_{1,1}^+$; tale intersezione, tirata indietro fino a B_0 mediante Ψ^{-k} , è allora una più sottile striscetta contenuta strettamente in $B_{0,1}^+$, che è naturale denotare $B_{0,1,1}^+$: esattamente questi punti si troveranno in B_1

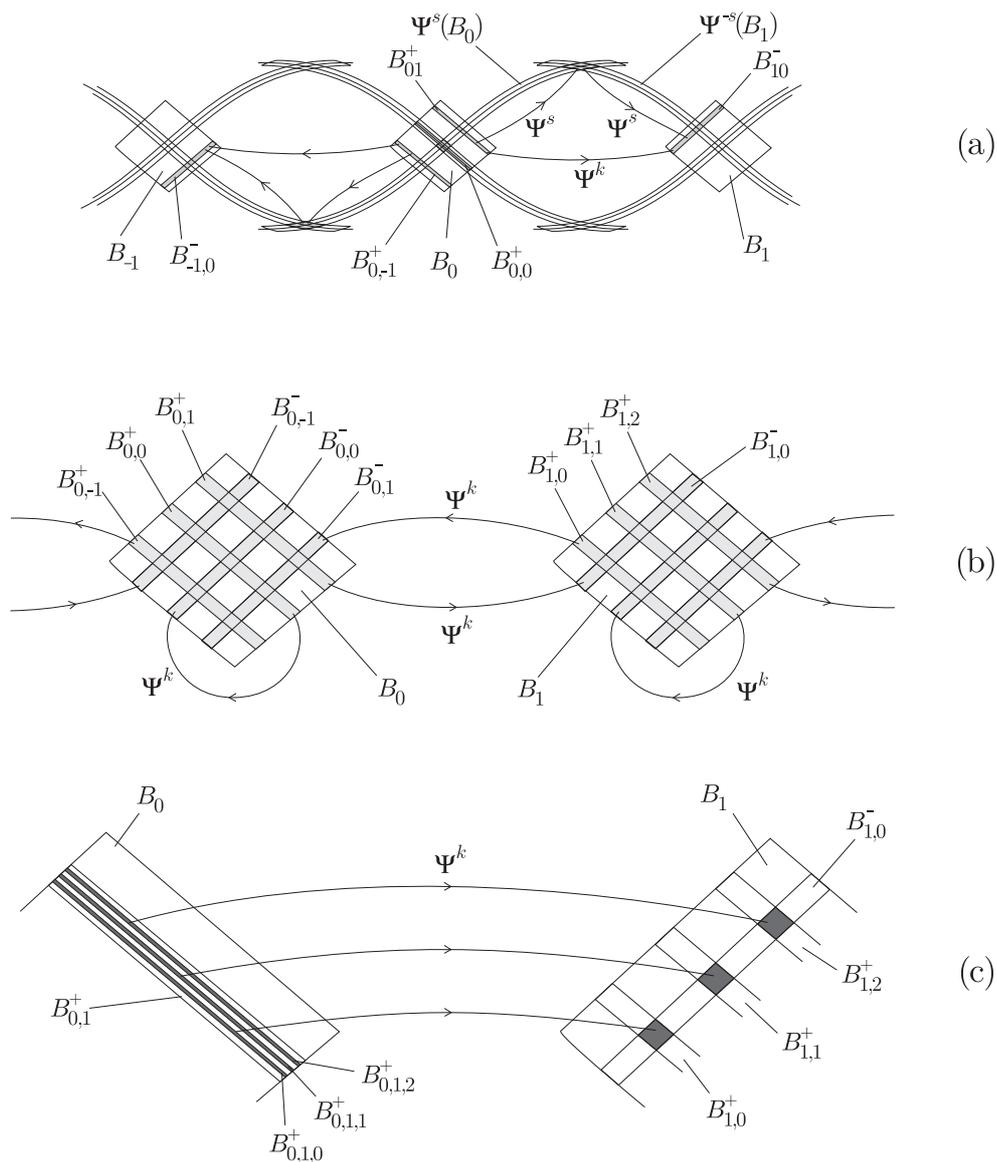


Figura 62: Il meccanismo di transizione nel pendolo forzato.

dopo k iterazioni, e vi resteranno per le k iterazioni successive. Allo stesso modo, se $\sigma_0 = 1$ e anche $\sigma_1 = 1$, si costruisce una diversa striscetta $B_{0,1,2}^+$ formata dai punti di B_0 che in k iterazioni in avanti vanno in B_1 e in altre k iterazioni atterrano in B_2 . Si è creato, si osservi, un meccanismo di transizione, basato sul fatto che ogni striscetta di arrivo interseca trasversalmente ogni striscetta di partenza.

A questo punto il gioco è chiaro: comunque si scelga la stringa finita $\sigma_0, \dots, \sigma_{j-1}$ si trova una striscetta $B_{0,m_1,m_2,\dots,m_{j-1}}^+$, spessa $\lambda^{-jk}\delta$, formata dai punti che le obbediscono, cioè tali che $m_{i+1} = m_i + \sigma_i$, $i = 1, \dots, j-1$. Tutte queste striscette sono annidate, e al crescere di j si stringono in un arco $B_{\sigma^+}^+$ costituito dai punti che obbediscono all'intera semistringa positiva σ^+ (una prova più formale si fa per induzione su j). Allo stesso modo si procede per la semistringa negativa, trovando B_{σ^-} . L'intersezione delle due è il punto \tilde{z} cercato. Il tutto è più semplice a capirsi che a raccontarsi. E' importante cogliere l'analogia con l'esempio del Gatto di Arnol'd. \square

4.7 Il metodo di Poincaré–Melnikov per la ricerca dei punti omoclini

Come si è visto, la presenza di un'intersezione omoclini trasversa è un fatto gravido di conseguenze. La cosa, come si è detto, era già chiara a Poincaré, e sempre a Poincaré è dovuta la dimostrazione che per sistemi semplici come il pendolo forzato tale intersezione, almeno per piccola forzante, effettivamente esiste. Il metodo di studio fu ripreso e messo a punto, nei primi anni '60 del '900, dal russo Melnikov, ed è comunemente noto col nome di *metodo di Poincaré–Melnikov*. La limitazione a piccola forzante è dovuta al fatto che il metodo è perturbativo, e non va intesa come indicazione che i fenomeni omoclini scompaiano per forzante più grande.

Consideriamo dunque il pendolo forzato

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \mu F(x, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad (4.11)$$

con F periodica di periodo 2π in entrambi gli argomenti; il caso sul quale fisseremo maggiormente l'attenzione è quello in cui

$$F(x, \varphi) = \sin \varphi, \quad (4.12)$$

ma il metodo è del tutto generale.

Denotiamo con $\Phi_\mu^t(x, v)$ la soluzione delle (4.11) con dato iniziale x, v qualsiasi e $\varphi = 0$, più precisamente la proiezione della soluzione sul piano xv (per la variabile φ la soluzione è banalmente Ωt), e con $\Psi_\mu = \Phi_\mu^T$ la mappa al periodo T della forzante, ovvero la sezione di Poincaré $\varphi = 0$.

Per $\mu = 0$ sappiamo che la mappa ha i punti fissi iperbolici $z_0^\pm = (\pm\pi, 0)$, congiunti dalla separatrice W_0 del pendolo che è contemporaneamente varietà instabile dell'uno e varietà stabile dell'altro; per quanto visto nel paragrafo precedente, proposizione 13, per μ piccolo la mappa Ψ_μ ammetterà ancora due punti iperbolici³⁶ z_μ^\pm prossimi a z_0^\pm , e con evidenza si ha

$$z_\mu^+ = z_\mu^- + (2\pi, 0). \quad (4.13)$$

Siano allora W_μ^+ e W_μ^- rispettivamente la varietà stabile di z_μ^+ e la varietà instabile di z_μ^- . Ci proponiamo di mostrare che

se F soddisfa una opportuna condizione di genericità (che sarà soddisfatta in particolare dalla (4.12)), e se $\mu \neq 0$ è sufficientemente piccolo, allora W_μ^+ e W_μ^- hanno un'intersezione trasversa e formano tra loro un angolo $\mathcal{O}(\mu)$.

³⁶Si osservi che z_μ^\pm sono punti fissi per la mappa, ma in generale non sono punti di equilibrio per il sistema continuo (la loro orbita è periodica di periodo T).

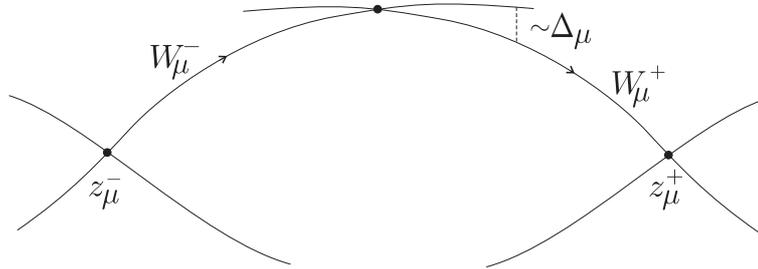


Figura 63: le varietà W_μ^+ e W_μ^- per il pendolo forzato

Per $\mu = 0$ si conserva l'energia $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos x$, e dunque l'equazione delle separatrici si scrive

$$E(x, v) = E(z_0^\pm) = \omega^2 ,$$

ovvero, limitandoci alla curva superiore,

$$v = \eta_0(x) , \quad \eta_0(x) = \omega \sqrt{2(1 + \cos x)} = 2\omega \cos \frac{x}{2} ;$$

per ogni x si ha allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_0^{\pm kT}(x, \eta_0(x)) = z_0^\pm .$$

Come per tutti i sistemi conservativi a un grado di libertà, il moto del pendolo non forzato si determina con una quadratura. Per dati iniziali generici ci si imbatte nei cosiddetti integrali ellittici, non riducibili a funzioni più elementari. Fanno eccezione i dati iniziali sulla separatrice, per i quali invece la soluzione si riesce a esprimere esplicitamente in termini di funzioni esponenziali e trigonometriche: in particolare, per il dato iniziale $\bar{z} = (0, 2\omega) \in W_0$, denotando $\Phi_0^t = (X^t, V^t)$, si trova³⁷

$$X^t(\bar{z}) = \pi - 4 \arctan e^{-\omega t} , \quad V^t(\bar{z}) = \frac{4\omega}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} ; \quad (4.14)$$

per X^t si ha anche l'espressione equivalente, dispari a vista in t ,

$$X^t(\bar{z}) = 2(\arctan e^{\omega t} - \arctan e^{-\omega t}) .$$

L'integrale di Poincaré–Melnikov.

Dal teorema della varietà stabile sappiamo che W_μ^\pm sono curve regolari in μ , che pertanto per $\mu \neq 0$ piccolo si discostano poco dalla separatrice W_0 ; un tratto finito di W_μ^- tra $x = -\pi$ e un qualche fissato $\hat{x} < \pi$ si può allora scrivere, per μ piccolo, come grafico di una funzione regolare $v = \eta_\mu^-(x)$, e similmente un tratto finito di W_μ^+ tra $-\hat{x}$ e π si può scrivere come grafico di una

³⁷Sulla separatrice si ha $\dot{x} = v = 2\omega \cos \frac{x}{2}$, e dunque prendendo $x = 0$ a $t = 0$ si trova facilmente

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{X^t} \frac{dx}{2\omega \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2\omega} \int_0^{X^t} \frac{dx}{\sin \frac{\pi-x}{2}} = \frac{1}{4\omega} \int_0^{X^t} \frac{dx}{\sin \frac{\pi-x}{4} \cos \frac{\pi-x}{4}} \\ &= \frac{1}{4\omega} \int_0^{X^t} \frac{dx}{\tan \frac{\pi-x}{4} \cos^2 \frac{\pi-x}{4}} = -\frac{1}{\omega} \log \tan \frac{\pi - X^t}{4} . \end{aligned}$$

Segue immediatamente l'espressione (4.14) di X^t , e poi per derivazione quella di V^t .

funzione regolare $v = \eta_\mu^+(x)$. Per $\hat{x} > 0$ c'è un intervallo comune $(-\hat{x}, \hat{x})$ nel quale per definizione di varietà stabile e instabile si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_\mu^{\pm kT}(x, \eta_\mu^\pm(x)) = z_\mu^\pm .$$

Poniamo allora, in $(-\hat{x}, \hat{x})$,

$$\Delta_\mu(x) = \frac{1}{2} [(\eta_\mu^+(x))^2 - (\eta_\mu^-(x))^2] = E(x, \eta_\mu^+(x)) - E(x, \eta_\mu^-(x)) ;$$

si ha $\Delta_\mu = \frac{1}{2}(\eta_\mu^+ + \eta_\mu^-)(\eta_\mu^+ - \eta_\mu^-)$, pertanto ci sarà un'intersezione trasversa tra W_μ^+ e W_μ^- , se esiste un valore \tilde{x}_μ tale che risulti $\Delta_\mu(\tilde{x}_\mu) = 0$, con derivata $\Delta'_\mu(\tilde{x}_\mu) \neq 0$.

PROPOSIZIONE 16 *Risulta*

$$\Delta_\mu(x) = \mu J(x) + \mathcal{O}(\mu^2) , \quad \text{ove} \quad J(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} V^t(x, \eta_0(x)) F(X^t(x, \eta_0(x)), \Omega t) dt .$$

L'interesse della proposizione è ovvio: se J ha uno zero trasverso in un punto \tilde{x} , allora per μ piccolo anche $\Delta_\mu(x)$ ha uno zero trasverso in un punto \tilde{x}_μ prossimo a \tilde{x} ; d'altra parte l'integrale J è facile da studiare, dal momento che la funzione integranda è nota esplicitamente (si richiede, è bene sottolinearlo, la sola conoscenza del moto imperturbato sulla separatrice). La funzione integranda è con evidenza la potenza

$$P(x, v, \varphi) = vF(x, \varphi) \tag{4.15}$$

della forza F , calcolata lungo il moto imperturbato $(\Phi_0^t(x, v), \Omega t)$ che ha dato iniziale $(x, \eta_0(x)) \in W_0$ e $\varphi = 0$. L'integrale J è comunemente chiamato *integrale di Poincaré–Melnikov*. La condizione di genericità su F , cui abbiamo accennato nelle considerazioni introduttive, è precisamente che l'integrale di Poincaré–Melnikov J abbia uno zero trasverso.

DIMOSTRAZIONE. Per calcolare $\Delta_\mu(x)$ servono buone espressioni per $E(x, \eta_\mu^+(x))$ e $E(x, \eta_\mu^-(x))$. Si procede così: per ogni $k > 0$ si scrive l'identità banale

$$\begin{aligned} E(\Phi_\mu^{kT}(x, \eta_\mu^+(x))) - E(x, \eta_\mu^+(x)) &= \int_0^{kT} \dot{E}(\Phi_\mu^t(x, \eta_\mu^+(x)), \Omega t) dt \\ &= \mu \int_0^{kT} P(\Phi_\mu^t(x, \eta_\mu^+(x)), \Omega t) dt , \end{aligned}$$

con $P(x, v, \varphi)$ come nella (4.15). Prendendo il limite $k \rightarrow \infty$ si trova allora

$$E(z_\mu^+) - E(x, \eta_\mu^+(x)) = \mu \int_0^\infty P(\Phi_\mu^t(x, \eta_\mu^+(x)), \Omega t) dt .$$

Grazie alla regolarità in μ di z_μ^* e $\eta_\mu^+(x)$, a sinistra dell'uguale, e dunque a destra, c'è regolarità in μ (cosa non ovvia se ci si limitasse a guardare il solo integrale illimitato). Uno sviluppo di Taylor troncato al primo ordine dà allora

$$E(z_\mu^+) - E(x, \eta_\mu^+(x)) = \mu \int_0^\infty P(\Phi_0^t(x, \eta_0(x)), \Omega t) dt + \mathcal{O}(\mu^2) .$$

Allo stesso modo si trova

$$E(z_\mu^-) - E(x, \eta_\mu^-(x)) = \mu \int_0^{-\infty} P(\Phi_0^t(x, \eta_0(x)), \Omega t) dt + \mathcal{O}(\mu^2) .$$

Sottraendo, e ricordando che z_μ^+ e z_μ^- differiscono per una traslazione di 2π in x cosicché $E(z_\mu^+) = E(z_\mu^-)$, segue infine

$$\begin{aligned} \Delta_\mu(x) &= -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} P(\Phi_0^t(x, \eta_0(x)), \Omega t) dt + \mathcal{O}(\mu^2) \\ &= -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} V^t(x, \eta_0(x)) F(X^t(x, \eta_0(x)), \Omega t) dt + \mathcal{O}(\mu^2) , \end{aligned}$$

come richiesto. □

Il caso del pendolo con forzante sinusoidale.

Studiamo ora l'integrale di Poincaré–Melnikov nel caso del pendolo con forzante sinusoidale, ovvero per V^t come nella (4.14) e $F(x, \varphi) = \sin \varphi$. Per questo conviene eseguire un cambio di variabile da x a $\tau =$ tempo di percorrenza da $(0, \eta(0))$ a $(x, \eta(x))$ lungo la separatrice nel moto imperturbato, ovvero scrivere

$$x = X^\tau(\bar{z}) .$$

Posto allora $\bar{J}(\tau) = J(X^\tau(\bar{z}))$, usando l'espressione (4.14) di V^t si trova subito

$$\bar{J}(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} V^{t+\tau}(\bar{z}) \sin \Omega t dt = -4\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} dt$$

(si è usata la proprietà gruppale $V^t(X^\tau(\bar{z}), V^\tau(\bar{z})) = V^{t+\tau}(\bar{z})$). Si vede bene che $\bar{J}(\tau)$ si annulla per $\tau = lT$ e $\tau = \frac{1}{2}T + lT$, $l \in \mathbb{Z}$: per questi valori di τ infatti il numeratore è dispari in t , mentre il denominatore è pari. Quanto alla derivata, in $\tau = lT$ e $\tau = \frac{1}{2}T + lT$ si trova rispettivamente

$$\bar{J}' = \pm 4\omega \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \Omega t}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} dt ,$$

e l'integrale non si annulla; in effetti, l'integrale si calcola esplicitamente (col metodo dei residui) e si trova

$$\bar{J}' = \pm \frac{2\pi\Omega}{e^{\frac{\pi\Omega}{2\omega}} + e^{-\frac{\pi\Omega}{2\omega}}} \neq 0 ;$$

corrispondentemente si trova, per la derivata J' di J rispetto a x ,

$$J' = \frac{\bar{J}'}{V^\tau(\bar{z})} \neq 0 .$$

Il caso del pendolo è particolarmente felice, perché tutto, a cominciare dal moto imperturbato sulla separatrice, si scrive esplicitamente in termini di funzioni elementari. Ma il metodo è del tutto generale, e riduce la dimostrazione di esistenza del punto omoclinico, con tutto quello che ne consegue, allo studio di funzioni che sono “semplici” integrali di funzioni elementari, che anche se non si sanno calcolare esattamente si possono comunque in qualche modo approssimare quanto serve.

APPENDICI

A Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie

Sia data l'equazione differenziale ordinaria, autonoma,

$$\dot{x} = f(x) , \quad x \in M , \quad (\text{A.1})$$

ove M è (per semplicità) una palla contenuta in \mathbb{R}^n . Sotto ipotesi debolissime di regolarità di f , precisamente che f sia localmente lipshitziana,³⁸ vale il *teorema di esistenza e unicità*, o *teorema di Cauchy*:

PROPOSIZIONE 17 *Se f è localmente lipshitziana in M , allora per ogni $x_0 \in M$ esistono un intervallo (τ_0, τ_1) , $\tau_0 < 0 < \tau_1$, e un'unica soluzione $x(t)$ dell'equazione, definita per $t \in (\tau_0, \tau_1)$, tale che sia $x(0) = x_0$.*

Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi una assegnata condizione iniziale è detto *problema di Cauchy*; il teorema di Cauchy dice dunque che sotto la sola ipotesi che f sia lipshitziana il problema di Cauchy ammette sempre una e una sola soluzione. Una notazione comoda per la soluzione con dato iniziale $x_0 \in M$ è $\Phi^t(x_0)$; si ha evidentemente $\Phi^0(x_0) = x_0$.

L'intervallo di definizione della soluzione (τ_0, τ_1) dipende in generale da x_0 . Per ogni x_0 si può sempre supporre che l'intervallo sia massimale, ovvero che per $t = \tau_0$ e $t = \tau_1$ la soluzione $\Phi^t(x_0)$ esca dal dominio di definizione M dell'equazione (altrimenti, si veda un testo di analisi, l'intervallo (τ_0, τ_1) è prolungabile). In molti casi interessanti l'intervallo di definizione della soluzione è tutto \mathbb{R} . Un caso tipico in cui ciò avviene è quello in cui il dominio M è invariante ($\Phi^t(M) \subset M, \forall t \in \mathbb{R}$): ad esempio perché esiste una costante del moto F — ovvero una funzione tale che $F(\Phi^t(x)) = F(x)$ per ogni x e ogni t per cui $\Phi^t(x)$ è definito — e il bordo di M è una superficie di livello di F . Senza bisogno che esista una costante del moto, basta comunque che il bordo sia una superficie invariante. Supporre che M sia illimitato, ad esempio che coincida con tutto \mathbb{R}^n , non basta a concludere che l'intervallo di definizione della soluzione sia \mathbb{R} : la soluzione potrebbe andare all'infinito in un tempo finito, come mostra il controesempio in \mathbb{R}^1

$$\dot{x} = 1 + x^2 ,$$

³⁸Ricordiamo che f si dice localmente lipshitziana se esiste $\lambda > 0$ (*costante di Lipshitz*) tale che per ogni coppia $x, y \in M$ con $\|x - y\|$ sufficientemente piccolo si ha $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$; per questo è sufficiente che f sia di classe C^1 . Se cade la lipshitzianità di f cade l'unicità, come mostra il facile controesempio

$$\dot{x} = \sqrt{x} , \quad x_0 = 0 ;$$

con evidenza è soluzione $x(t) = 0 \forall t$, ma anche $x(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $x(t) = \frac{1}{4}t^2$ per $t > 0$, o più in generale $x(t) = 0$ per $t \leq t_0$ e $x(t) = \frac{1}{4}(t - t_0)^2$ per $t > t_0$, per ogni t_0 .

che per $x_0 = 0$ è risolta da $\tan t$: la soluzione va con evidenza all'infinito per $t = \pm\pi/2$. Si dimostra tuttavia che se $M = \mathbb{R}^n$ e f è dominata da una funzione lineare, $\|f(x)\| < c_0 + c_1\|x\|$ per qualche scelta delle costanti c_0 e c_1 , allora la soluzione è definita per ogni t .

Supponiamo allora di trovarci nella situazione in cui per ogni $x \in M$ la soluzione esiste per $t \in \mathbb{R}$; in questo caso la soluzione generale $\Phi^t(x)$, più precisamente l'insieme

$$\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\},$$

con terminologia presa a prestito dall'idrodinamica è detto *flusso* su M . E' bene distinguere tra *movimento*, ovvero una qualunque soluzione particolare $x(t)$ dell'equazione, e *traiettoria*, che è una curva immersa in M , immagine dell'applicazione $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ (l'oggetto geometrico, senza riguardo al tempo di percorrenza). *Grazie al fatto che l'equazione (A.1) è autonoma*, se $x(t)$ è soluzione particolare lo è anche $x'(t) = x(t+s)$ per ogni s ; in sostanza la medesima traiettoria fa da supporto a infiniti movimenti sfasati nel tempo, che hanno come dato iniziale un punto qualsiasi della traiettoria. Ne segue una *importante* proprietà, naturale corollario del teorema di Cauchy:

COROLLARIO 18 *Traiettorie diverse di un sistema autonomo non possono mai intersecarsi.*

Un'altra facile proprietà delle equazioni differenziali che stiamo considerando (autonome, per le quali Φ^t esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$), è che per ogni $x \in M$ e ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\Phi^{-t}(\Phi^t(x)) = x, \quad \text{ovvero} \quad (\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}; \quad (\text{A.2})$$

più in generale, per ogni t e s in \mathbb{R} si ha

$$\Phi^{t+s}(x) = \Phi^t(\Phi^s(x)) = \Phi^s(\Phi^t(x)), \quad \text{ovvero} \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t. \quad (\text{A.3})$$

Queste relazioni, assieme a $\Phi^0 = \text{identità}$, mostrano che *il flusso Φ di un'equazione differenziale autonoma è un gruppo commutativo a un parametro.*

Una generalizzazione a volte interessante è quella in cui le soluzioni non sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma lo sono per $t \in \mathbb{R}^+$; ciò avviene se il campo f sul bordo di M è entrante, più precisamente non uscente. In tal caso viene meno l'invertibilità (A.2) ma per $t, s > 0$ rimane vera la legge di composizione (A.3). Corrispondentemente

$$\Phi = \{\Phi^t, t \in \mathbb{R}^+\}$$

è un semigruppato, chiamato *semiflusso* su M . Vale la pena di osservare che anche nel caso di semiflusso la scrittura $\Phi^{-t}(A)$, $t > 0$ e $A \subset M$, ha senso:

$$\Phi^{-t}(A) = \{x \in M : \Phi^t(x) \in A\}$$

($\Phi^{-t}(A)$ è vuoto se per nessun $x \in A$ esiste $\Phi^{-t}(x)$).

- ESERCIZIO 14 Si studi l'equazione logistica (esempio 10 nel testo). Si mostri che la semiretta $M = (0, \infty)$ è invariante solo in avanti, e corrispondentemente Φ è solo un semiflusso.

Nelle stesse ipotesi del teorema di Cauchy si dimostra anche la regolarità delle soluzioni nel dato iniziale:

PROPOSIZIONE 19 *Si consideri l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$. Per ogni t fissato la soluzione $\Phi^t(x)$ è funzione regolare di x , nella stessa classe di regolarità di f . Se f è almeno C^1 , esistono in particolare costanti $C, \lambda > 0$ tali che*

$$\|\Phi^t(y) - \Phi^t(x)\| < C e^{\lambda|t|} \|y - x\| . \quad (\text{A.4})$$

La (A.4), con il problematico coefficiente esponenziale in t , non è migliorabile se non per sistemi molto particolari, e deve considerarsi generica.

Di frequente si trovano equazioni che contengono parametri, ad esempio la pulsazione nell'oscillatore armonico o il coefficiente dell'attrito viscoso nei sistemi smorzati. La proposizione appena enunciata sulla dipendenza regolare della soluzione dal dato iniziale si estende immediatamente alla dipendenza dai parametri:

PROPOSIZIONE 20 *Si consideri il sistema*

$$\dot{x} = f(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

dipendente dai parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \geq 1$. La soluzione $\Phi^t(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ per ogni t fissato è funzione regolare di $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, con la stessa classe di regolarità di f .

La proposizione 20 è un immediato corollario della proposizione 19: infatti si può sempre pensare di estendere il sistema a \mathbb{R}^{n+k} , considerando anche $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ come variabili, semplicemente aggiungendo le equazioni del moto banali $\dot{\alpha}_i = 0$, $i = 1, \dots, k$; la dipendenza regolare dai dati iniziali nel sistema allargato si traduce immediatamente nella dipendenza regolare dai parametri nel sistema ristretto.

B La mappa logistica

Uno dei modelli più studiati nella dinamica discreta delle popolazioni, che ha dato anche luogo a un'ampia letteratura matematica, è l'equazione logistica discreta, o *mappa logistica*,

$$\Phi(x) = \mu x(1 - x) , \quad x \in [0, 1] , \quad \mu > 0 . \quad (\text{B.1})$$

Per esercizio si può “sperimentare” su un calcolatore quello che succede al variare di μ , osservando la successione $\Phi^t(x)$ per t grande, con $x \in (0, 1)$ qualsiasi. Valori interessanti di μ da cui cominciare il gioco sono 1.5, 2.9, 3.2, 3.5, 4.0 (si veda la figura 64).

C Equazioni differenziali che preservano il volume

Sia data l'equazione differenziale in \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = f(x) ;$$

denotiamo con $\nabla \cdot f$ la divergenza di f , $\nabla \cdot f = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. A un generico insieme B è naturalmente associato l'insieme evoluto $\Phi^t(B)$ all'istante t (figura 65).

PROPOSIZIONE 21 *Sia B misurabile. Allora il volume $\text{Vol}(\Phi^t(B))$ varia nel tempo secondo la legge*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(B)) = \int_{\Phi^t(B)} \nabla \cdot f \, dV . \quad (\text{C.1})$$

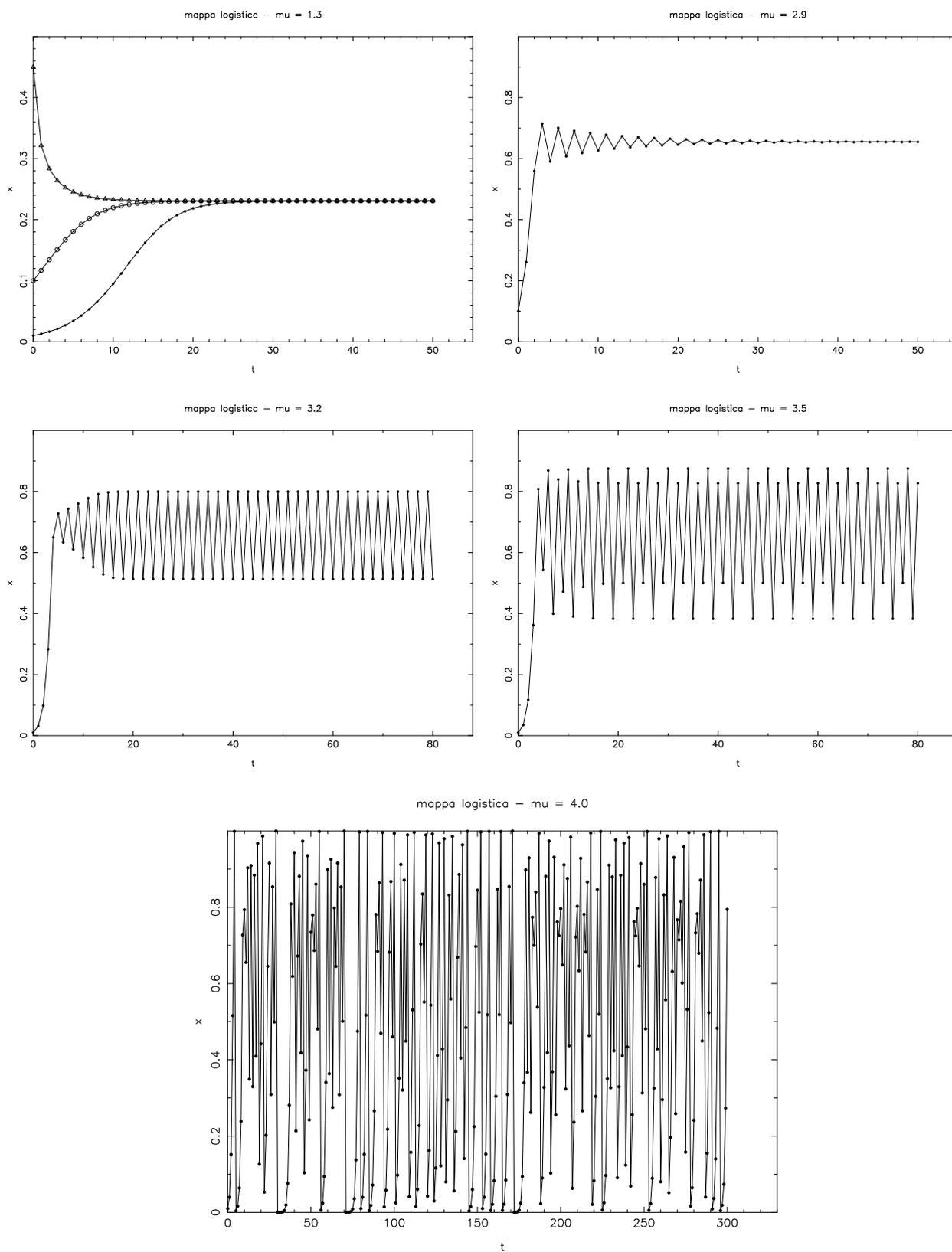


Figura 64: La mappa logistica, per diversi valori di μ .

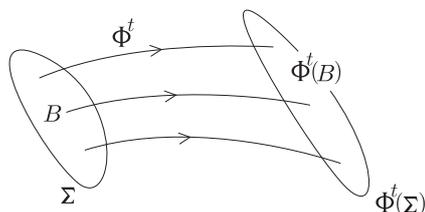


Figura 65: L'insieme B evolve sotto il flusso Φ^t .

Si può dimostrare la proposizione 21 in poche righe, nel caso in cui B abbia un bordo regolare Σ , se si accetta di servirsi del linguaggio un po' euristico in cui si trattano i differenziali come quantità piccole.

DIMOSTRAZIONE 1. Nell'intervallo tra t e $t + dt$ l'evoluto di B passa da $\Phi^t(B)$ a $\Phi^{t+dt}(B)$, e in questo movimento l'elemento di superficie $d\sigma$ spazza il volume $f \cdot N d\sigma dt$, ove N è il versore normale alla superficie $\Phi^t(\Sigma)$ di $\Phi^t(B)$, rivolto verso l'esterno; si veda la figura 66. Segue

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(B)) = \int_{\Phi^t(\Sigma_B)} f \cdot N d\sigma .$$

Per il teorema della divergenza l'integrale di superficie si trasforma in integrale di volume e si ottiene la (C.1). □

Una dimostrazione più generale, senza nulla di euristico, si ottiene sulla base del seguente

LEMMA 22 Sia A^t la matrice jacobiana di Φ^t ,

$$A_{ij}^t(x) = \frac{\partial \Phi_i^t(x)}{\partial x_j} .$$

Risulta

$$\frac{d}{dt} \det A^t(x) = \det A^t(x) \nabla \cdot f(\Phi^t(x)) .$$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. Osserviamo innanzitutto che si ha³⁹

$$\det A^{t+s}(x) = \det A^s(\Phi^t(x)) \det A^t(x) , \tag{C.2}$$

perciò

$$\frac{d}{dt} \det A^t(x) = \frac{d}{ds} \det A^{t+s}(x) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \det A^s(\Phi^t(x)) \Big|_{s=0} \det A^t(x) .$$

Basta allora dimostrare che per ogni x risulta

$$\frac{d}{ds} \det A^s(x) \Big|_{s=0} = \nabla \cdot f(x)$$

³⁹Dalla legge di composizione $\Phi^{t+s}(x) = \Phi^s(\Phi^t(x))$ segue subito, derivando la funzione composta,

$$A^{t+s}(x) = A^s(\Phi^t(x)) A^t(x)$$

(una formula del tutto ovvia, se si pensa di usare A^t per portare avanti vettori tangenti); la (C.2) è immediata.

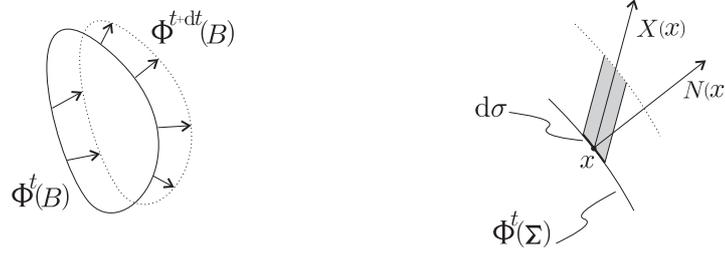


Figura 66: Un'illustrazione della dimostrazione 1.

(ci si è così portati da un t generico al solo $t = 0$). Per questo osserviamo che $\Phi^s(x) = x + sf(x) + \mathcal{O}(s^2)$, da cui

$$A^s(x) = \begin{pmatrix} 1 + s \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & & & \\ & 1 + s \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & & \\ \mathcal{O}(s) & & \dots & & \mathcal{O}(s) \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 + s \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2);$$

segue immediatamente $\det A^s = 1 + s \nabla \cdot f + \mathcal{O}(s^2)$, e questo basta. \square

Possiamo ora dimostrare la proposizione.

DIMOSTRAZIONE 2. Per g (integrabile) qualsiasi si ha

$$\int_{\Phi^t(B)} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_B g(\Phi^t(x')) \det A^t(x') dx'_1 \cdots dx'_n \quad (\text{C.3})$$

(si è fatta la sostituzione di variabili $x = \Phi^t(x')$); in particolare per $g = 1$

$$\text{Vol}(\Phi^t(B)) = \int_B \det A^t(x') dx'_1 \cdots dx'_n .$$

Ma dal lemma segue subito

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(B)) = \int_B \det A^t(x') \nabla \cdot f(\Phi^t(x')) dx'_1 \cdots dx'_n$$

e dunque, usando a rovescio la (C.3) con $g = \nabla \cdot f$,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(B)) = \int_{\Phi^t(B)} \nabla \cdot f(x) dx_1 \cdots dx_n ,$$

come preteso. \square

D La classificazione in \mathbb{R}^2 , per autovalori nulli o coincidenti.

Aggiungiamo qui poche considerazioni sul comportamento del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{D.1})$$

quando il punto $(\text{Tr } A, \det A)$ rappresentativo della matrice A nel diagramma di biforcazione (figura 28) si trova su una delle curve critiche del diagramma, precisamente sull'asse $\det A = 0$ oppure sulla parabola $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4\det A = 0$; in quest'ultimo caso comprenderemo anche l'origine $\text{Tr } A = \det A = 0$.

a) *La curva $\det A = 0$, per $\text{Tr } A \neq 0$.*

La trattazione è semplice perché, al pari dei nodi e dei punti di sella, la matrice A è diagonalizzabile. Più precisamente, in questo caso esistono due autovalori reali $\lambda_1 = \text{Tr } A \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$, con autovettori $u^{(1)}, u^{(2)}$ indipendenti che si possono prendere reali. Il sistema ammette allora le soluzioni particolari $x(t) = e^{\lambda_1 t} u^{(1)}, x(t) = u^{(2)}$, combinando le quali si ottiene l'integrale generale nella forma

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} u^{(1)} + C_2 u^{(2)} .$$

La direzione di $u^{(1)}$ è dilatante o contraente, a seconda del segno di $\lambda_1 = \text{Tr } A$; la direzione di $u^{(2)}$ è neutra, e l'asse $u^{(2)}$ si decompone in un continuo di punti singolari. Si hanno pertanto i ritratti in fase tracciati in figura 67. Per $\lambda_1 > 0$ l'origine è punto di equilibrio instabile per tempi positivi, mentre per $\lambda_1 < 0$ il punto è stabile (ma non asintoticamente stabile); il comportamento ovviamente si inverte per tempi negativi.

Si osservi che la stabilità può venir meno, o mutarsi in stabilità asintotica, non solo per variazioni arbitrariamente piccole di $\det A$ (passaggio a nodo o a colle), ma anche semplicemente aggiungendo alla (D.1) opportuni termini non lineari: per convincersene basta considerare l'esempio

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad \dot{x}_2 = ax_2^3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Con evidenza si ha stabilità asintotica per $a < 0$, instabilità per $a > 0$. Questa mancanza di "robustezza" delle proprietà di stabilità quando si passa dal caso lineare al caso non lineare rende nel complesso poco interessante il caso $\det A = 0$.

b) *La curva $\Delta = 0$.*

Questo caso è più delicato perché vi sono due autovalori coincidenti $\lambda = \frac{1}{2}\text{Tr } A$ e di conseguenza, in generale, la matrice A non possiede due ma un solo autovettore (il secondo autovettore esiste solo nel caso particolare in cui A sia multipla dell'identità, $A = \lambda I$). Un esempio di tali matrici è dato da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ;$$

il vettore $u = (1, 0)$ è autovettore con autovalore λ e per $a \neq 0$ non ne esistono altri (indipendenti da u). Possiamo limitarci a trattare questo caso: si vede infatti immediatamente che ad esso ci si può sempre ricondurre con un banale cambio di coordinate, precisamente una rotazione che porti l'asse x_1 a coincidere con la direzione di u (l'elemento di matrice A_{21} è allora necessariamente nullo, e sulla diagonale compaiono i due autovalori coincidenti).⁴⁰

Siamo così condotti a considerare il sistema

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 .$$

⁴⁰Anzi, per $a \neq 0$, il riscaldamento $x_2 = a^{-1}x_2'$ conduce alla forma ancor più particolare $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (forma di Jordan).

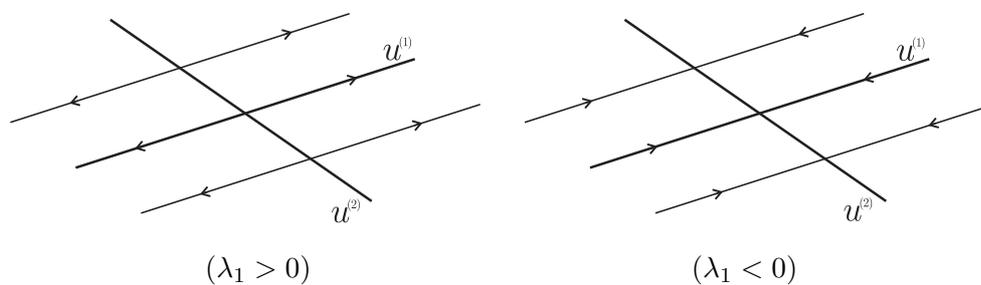


Figura 67: Il caso $\det A = 0$, $\text{Tr } A \neq 0$.

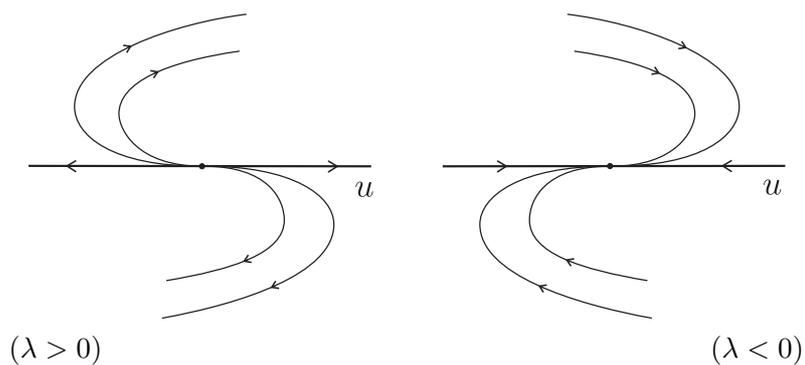


Figura 68: Il caso $\Delta = 0$, $a \neq 0$.

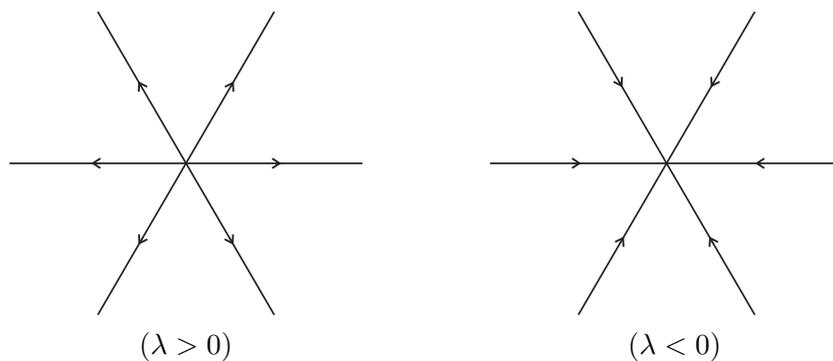


Figura 69: Il caso $\Delta = 0$, $a = 0$ ($A = \lambda I$)

La seconda equazione si risolve immediatamente e dà

$$x_2(t) = x_2^o e^{\lambda t};$$

la prima diviene allora un'equazione lineare forzata, precisamente $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2^o e^{\lambda t}$, e se ne trova facilmente la soluzione,

$$x_1(t) = (x_1^o + a x_2^o t) e^{\lambda t}.$$

L'andamento qualitativo dei moti è riportato in figura 68, per $a > 0$. Si osservi che le traiettorie sono tangenti nell'origine all'autovettore u . Il comportamento è in un certo senso intermedio tra quello del fuoco e quello del nodo; al pari di questi due casi si ha la stabilità asintotica nel futuro per $\lambda = \frac{1}{2} \text{Tr } A < 0$, nel passato per $\text{Tr } A > 0$.

Infine per $a = 0$ la matrice A è proporzionale all'identità, pertanto ogni vettore u è autovettore e ogni semiretta uscente dall'origine è invariante; l'andamento è quello riportato in figura 69.

Resta da considerare l'origine del diagramma di biforcazione, ovvero matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

cui ci si può sempre ricondurre nel modo indicato sopra. Per $a = 1$ si ha il caso ben noto del moto libero, per $a \neq 0$ qualsiasi il comportamento è sostanzialmente identico (il caso $a = 0$ è evidentemente banale). Si osservi che l'asse x_1 si decompone in un continuo di punti singolari. Il sistema lineare è instabile sia per tempi positivi che per tempi negativi, ma il comportamento può mutare per aggiunta di termini non lineari.

- ESERCIZIO 15 si trovino degli esempi di sistemi non lineari con A della forma (D.2), tali che si abbia: (a) stabilità per tutti i tempi; (b) stabilità non asintotica per soli tempi positivi; (c) stabilità asintotica per tempi positivi.

E Il ciclo limite nell'orologio meccanico

Ci proponiamo qui di costruire un modello matematico elementare che riproduca la fenomenologia dell'orologio meccanico e mostri la presenza, alla base del funzionamento dell'orologio, del fenomeno del ciclo limite. Un modello semplicissimo, ma ciononostante abbastanza realistico, si ottiene a partire da un oscillatore o un pendolo smorzato, aggiungendovi un termine impulsivo. Consideriamo per fissare le idee un oscillatore armonico debolmente smorzato:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v,$$

e fissiamo un dato iniziale $(0, v_0)$ sulla semiretta $x = 0, v > 0$. Il movimento che ne segue,

$$x(t) = \frac{v_0}{\sigma} e^{-\mu t} \sin \sigma t, \quad v(t) = v_0 e^{-\mu t} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin \sigma t + \cos \sigma t \right), \quad (\text{E.1})$$

ove $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, riattraversa la semiretta a intervalli regolari di tempo $T = 2\pi/\sigma$, in corrispondenza a valori di velocità v_1, v_2, \dots decrescenti; si veda la figura 70. Dalla (E.1) si ricava la legge elementare

$$v_{k+1} = a v_k, \quad a = e^{-\mu T} < 1,$$

che dà $v_k = a^k v_0$.

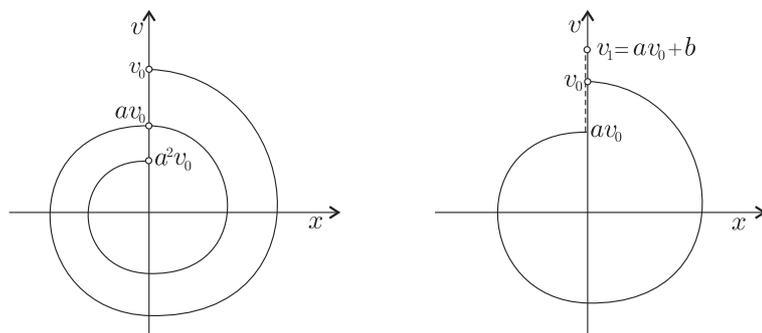


Figura 70: *L'oscillatore forzato impulsivamente.*

Aggiungiamo ora al sistema una forzante impulsiva che agisce nel modo seguente: nell'istante in cui la x passa per lo zero con $v > 0$, si trasmette all'oscillatore un impulso istantaneo positivo, che ne incrementa la velocità di una quantità fissa $b > 0$; l'idea è che l'oscillatore subisca un urto da un dispositivo liberato proprio dal passaggio di x sullo zero (meccanismo di *scappamento* dell'orologio).⁴¹ Così, al primo passaggio si avrà velocità av_0 prima dell'urto e velocità $v_1 = av_0 + b$ dopo l'urto; al secondo passaggio si ha $av_1 = a(av_0 + b)$ prima dell'urto, e $v_2 = av_1 + b = a(av_0 + b) + b$ dopo l'urto, e così via; si veda la figura 70, destra.

Si è così costruita una mappa $v \mapsto \Phi(v) = av + b$, tale che

$$v_{k+1} = \Phi(v_k) .$$

L'analisi della mappa mostra che esiste un unico punto fisso v^* soluzione di $\Phi(v) = v$ ovvero intersezione della retta $v' = \Phi(v)$ con la bisettrice $v' = v$ (figura 71). Grazie al fatto che la pendenza della retta è $a < 1$, si conclude che *per ogni dato iniziale $v_0 > 0$ la successione v_0, v_1, v_2, \dots converge a v^** . La legge esatta, nell'esempio specifico che stiamo seguendo, si deduce immediatamente⁴² ed è

$$v_k = v^* + a^k(v_0 - v^*) . \tag{E.2}$$

Ma il dettaglio non è rilevante, mentre è facile e importante convincersi che *la conclusione è robusta, ovvero valida ben al di là dei dettagli che abbiamo inserito per semplificare la descrizione*. Al posto dell'oscillatore armonico potremmo avere un sistema non lineare come il pendolo; al posto dello smorzamento viscoso esattamente lineare potremmo avere una legge più complessa; infine l'efficienza del meccanismo di scappamento, ovvero il salto b di velocità al passaggio di x per lo zero, potrebbe calare un po' al crescere di v . Come risultato, la retta $av + b$ potrebbe essere sostituita da una curva $\Phi(v)$ un po' diversa. *Ma se $\Phi(v)$ non è troppo diversa dalla retta $av + b$, in particolare se la pendenza è minore di uno e $\Phi(0) > 0$, continua ad esistere un punto fisso di Φ cui convergono le iterate $\Phi^k(v_0)$ per ogni $v_0 > 0$, ovvero continua ad esistere per il sistema un ciclo limite attrattivo.*

F Il ciclo limite nell'equazione di Van der Pol per $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Dimostriamo qui la proposizione 6.

⁴¹Il più comune è lo *scappamento ad ancora*, ben visibile aprendo un qualunque orologio meccanico. Il dispositivo è mosso evidentemente dalla riserva di energia dell'orologio (molla, peso).

⁴²Si porta l'origine delle velocità in v^* ponendo $v = v^* + u$. Si ricava immediatamente $u_{k+1} = au_k$, che dà la (E.2).

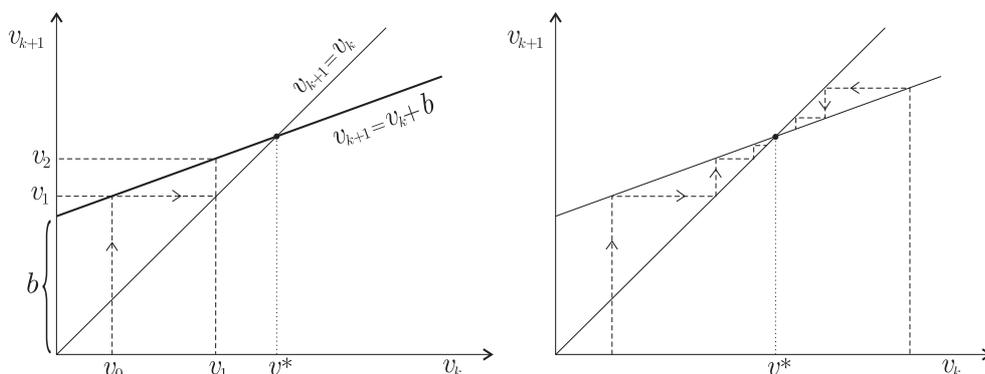


Figura 71: La mappa $\Phi(v) = av + b$ e le sue iterate.

DIMOSTRAZIONE. Conviene introdurre al posto di v una diversa coordinata⁴³ y , legata a v da

$$\varepsilon y = v + \varepsilon \gamma(x), \quad \gamma(x) = \frac{x^3}{3} - x; \quad (\text{F.1})$$

il sistema di due equazioni del primo ordine equivalente all'equazione di Van der Pol è allora

$$\dot{x} = \varepsilon(y - \gamma(x)), \quad \dot{y} = -\varepsilon^{-1}x. \quad (\text{F.2})$$

Si vede bene che l'asse y e la cubica γ di equazione $y = \gamma(x)$ dividono il piano in quattro regioni I – IV simili a quadranti, ove \dot{x} e \dot{y} hanno segno definito, nell'ordine $(+, -)$, $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$; si veda la figura 72. Ciò è già sufficiente a garantire che ciascuna traiettoria con origine nel semiasse y positivo, che denotiamo y^+ , taglia successivamente γ^+ , y^- , γ^- (con ovvio significato dei simboli), poi ancora y^+ , e così via. Ha senso allora considerare la mappa $\sigma : y^+ \rightarrow y^+$, corrispondente al primo ritorno della traiettoria su y^+ (sezione di Poincaré).

Se usiamo una variabile $s \in \mathbb{R}^+$ come coordinata su y^+ , e teniamo conto che le traiettorie non si possono intersecare, è chiaro che per ogni s vi sono tre sole possibilità:

- i) $\sigma(s) = s$, la traiettoria si chiude;
- ii) $\sigma(s) > s$, e allora $s < \sigma(s) < \sigma^2(s) < \dots$, ovvero la traiettoria procede a spirale verso l'esterno.
- iii) $\sigma(s) < s$, e allora $s > \sigma(s) > \sigma^2(s) > \dots$, ovvero la traiettoria procede a spirale verso l'interno.

Accanto alla mappa $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, corrispondente a un giro completo dell'orbita, è utile considerare una mappa $\tau : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ corrispondente a mezzo giro: precisamente, se l'orbita di origine $(0, s) \in y^+$ taglia per la prima volta y^- in $(0, -s')$, $s' > 0$, poniamo $\tau(s) = s'$. La simmetria delle equazioni mostra che σ si ottiene componendo due volte τ , ovvero $\sigma(s) = \tau(\tau(s))$; le tre possibilità sopra considerate corrispondono allora rispettivamente a $\tau(s) = s$, $\tau(s) > s$, e $\tau(s) < s$.

Poniamo ora $\delta(s) = \frac{1}{2}(\tau(s)^2 - s^2)$, e dimostriamo il seguente

⁴³La coppia di coordinate x, y al posto di x, v è spontanea, quando si scriva l'equazione di Van der Pol nella forma

$$\frac{d}{dt} [\dot{x} + \varepsilon(x^3/3 - x)] + x = 0.$$

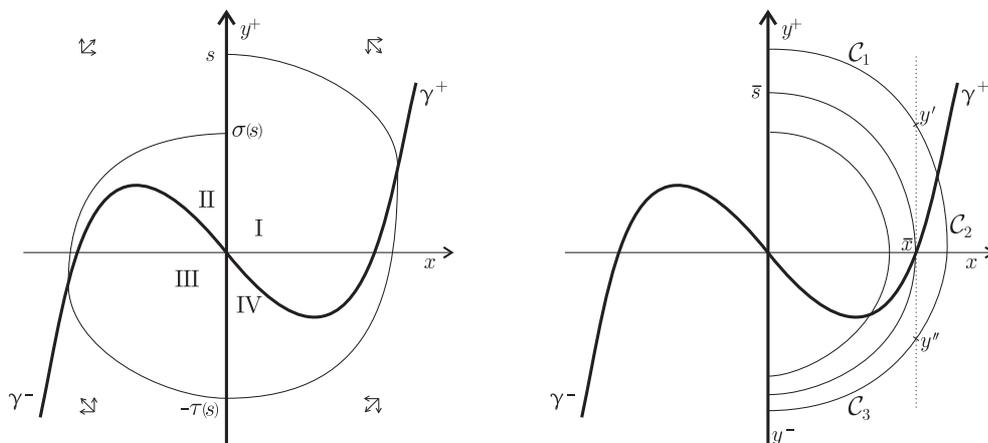


Figura 72: Sinistra: le due mappe σ e $\tau : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Destra: a illustrazione del Lemma 23.

LEMMA 23 Esiste un valore \bar{s} , tale che: (a) $\delta(s) > 0$ per $0 < s \leq \bar{s}$; (b) $\delta(s)$ è strettamente decrescente per $s \geq \bar{s}$; (c) $\delta(s)$ tende a $-\infty$ per $s \rightarrow +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $s > 0$, sia t_s il tempo al quale la traiettoria di origine $(0, s)$ taglia per la prima volta l'asse y^- ; introduciamo la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}(\varepsilon^{-2}x^2 + y^2)$, e osserviamo che risulta

$$\delta(s) = W(0, y_s(t_s)) - W(0, s) = \int_0^{t_s} \dot{W}(x_s(t), y_s(t)) dt, \quad (\text{F.3})$$

ove $(x_s(t), y_s(t))$ indica il movimento con dato iniziale $(0, s)$. Dalle equazioni del moto (F.2) si ottiene subito $\dot{W} = \varepsilon^{-2}x\dot{x} + y\dot{y} = -\varepsilon^{-1}x\gamma(x)$, perciò

$$\delta(s) = -\varepsilon^{-1} \int_0^{t_s} x_s(t)\gamma(x_s(t)) dt.$$

Sia ora $\bar{s} > 0$ il punto di y^+ tale che la traiettoria uscente da $(0, \bar{s})$ taglia l'asse x nel suo punto di intersezione $(\bar{x}, 0)$ con γ^+ (figura 72, destra); per $\gamma(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ risulta evidentemente $\bar{x} = \sqrt{3}$. E' chiaro che, se $s \leq \bar{s}$, allora si ha $\gamma(x_s(t)) \leq 0$ per $0 \leq t \leq t_s$. In tali condizioni l'integrale nella (F.3) risulta positivo, e questo basta per il punto (a).

Per il punto (b), la stima dell'integrale è poco più complicata: prendiamo una traiettoria uscente da $(0, s)$ con $s > \bar{s}$; dividiamola in tre curve \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 , a seconda che sia $x_s(t) < \bar{x}$, $x_s(t) \geq \bar{x}$, e poi ancora $x_s(t) < \bar{x}$ (si veda la figura), e scriviamo

$$\delta(s) = \int_{\mathcal{C}_1} \dot{W} dt + \int_{\mathcal{C}_2} \dot{W} dt + \int_{\mathcal{C}_3} \dot{W} dt.$$

Per il primo integrale è possibile sostituire x a t come variabile indipendente; usando $dt = dx/\dot{x} = (y - \gamma(x))^{-1}$ si trova subito

$$\int_{\mathcal{C}_1} \dot{W}(x_s(t), y_s(t)) dt = -\varepsilon^{-2} \int_0^{x_1} \frac{x\gamma(x)}{y_s(x) - \gamma(x)} dx,$$

ove si è indicata con $\mathcal{Y}_s(x)$ la curva implicitamente definita dal movimento $(x_s(t), y_s(t))$. E' evidente da questa espressione che il contributo di \mathcal{C}_1 è positivo e decrescente al crescere di s (si osservi che $\mathcal{Y}_s(x)$ per ogni x è crescente con s). In modo del tutto analogo si vede che anche il contributo di \mathcal{C}_3 è positivo (attenzione al verso di percorrenza di \mathcal{C}_3), e decrescente con s . Per il secondo integrale possiamo invece usare y come variabile indipendente, e scrivere

$$\int_{\mathcal{C}_2} \dot{W} dt = - \int_{y'}^{y''} \gamma(\mathcal{X}_s(y)) dy ,$$

ove $\mathcal{X}_s(y)$ è la curva implicitamente definita dal movimento in esame, e gli estremi di integrazione sono ordinati in modo che sia $y'_s < y''_s$ (cioè in ordine opposto al verso di percorrenza; ciò spiega il segno meno). Si vede allora che il contributo di \mathcal{C}_2 è negativo, e crescente in modulo per s crescente: infatti, a fissato y , $\mathcal{X}_s(y)$ cresce con s (la traiettoria è più esterna), perciò anche γ cresce, e inoltre il dominio di integrazione in y si allarga. Ciò basta per concludere che $\delta(s)$, per $s \geq \bar{s}$, è decrescente (strettamente), come asserito in (b).

Infine, poiché al crescere di s la traiettoria si sposta verso destra a piacere (per tutti i punti di γ^+ , con ascissa x comunque grande, passa una traiettoria che proviene da y^+ con s sufficientemente grande, e interseca l'asse delle ascisse a destra di x) è anche chiaro che $\delta(s) \rightarrow -\infty$ per $s \rightarrow +\infty$.

□

Dal lemma si deduce all'istante che esiste un unico zero s^* di δ in \mathbb{R}^+ , e dunque un'unica orbita periodica. Che poi tale orbita sia globalmente attrattiva è del tutto evidente: ad esempio per $0 < s < s^*$ si ha $\delta(s) > 0$, e dunque la successione $\sigma^k(s)$ è crescente; il suo limite è necessariamente invariante (come segue dalla continuità di δ), e dunque coincide con s^* . In modo analogo si ragiona per $s > s^*$. La dimostrazione della proposizione è così conclusa.

G Un circuito amplificato con biforcazione di Hopf

La figura 73 mostra un circuito elettrico con in parallelo un'induttanza, un condensatore e un componente non lineare; quest'ultimo si suppone obbedire a una legge del tipo

$$I = f(V)/R , \tag{G.1}$$

avendo indicato con $V = V_b - V_a$ la differenza di potenziale ai suoi capi, con I la corrente che lo attraversa (positiva se nel verso della freccia; $I = I_2$ nella figura), e con R una costante; per $f(V) = V$ si ha eccezionalmente un componente lineare, precisamente un resistore di resistenza R .

Dalla (G.1) assieme alle consuete equazioni dei due componenti lineari ($\dot{I}_1 = -V/L$ per l'induttanza, $\dot{V} = (I_1 - I_2)/C$ per il condensatore), si ricava senza difficoltà per V l'equazione

$$\ddot{V} + \mu(V)\dot{V} + \omega^2 V = 0 , \quad \mu(V) = \frac{1}{RC} f'(V) , \tag{G.2}$$

ove si è posto $\omega^2 = 1/(LC)$ e si è denotata con f' la derivata prima di f . La pulsazione ω si porta facilmente a 1 scegliendo opportunamente l'unità di tempo, precisamente riferendosi, anziché a t , al tempo adimensionale $\tau = \omega t$; l'equazione che ne deriva è ora

$$\ddot{V} + \alpha(V)\dot{V} + V = 0 , \quad \alpha(V) = \frac{\mu(V)}{\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} f'(V) .$$

Nel caso lineare $f(V) = V$ si ha un oscillatore armonico smorzato e corrispondentemente, per $t \rightarrow \infty$, si ha il comportamento asintotico banale $V(t) \rightarrow 0$. Lo stesso comportamento si trova con

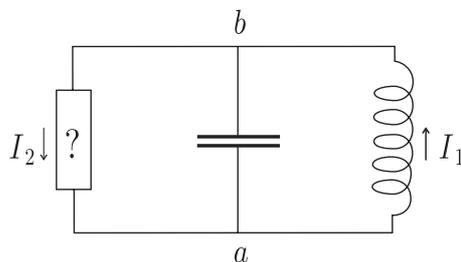


Figura 73: Un circuito elettrico con un componente non lineare

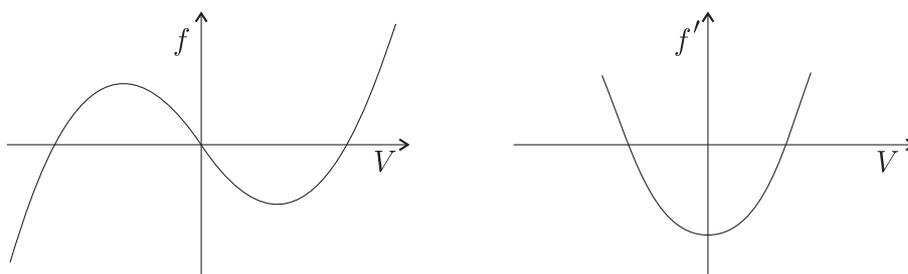


Figura 74: L'aspetto qualitativo di f che serve per produrre un ciclo limite.

evidenza per ogni f monotona crescente. Per avere un ciclo limite occorre una f sostanzialmente diversa, del tipo “a doppia gobba” come nella parte sinistra di figura 74, in modo che f' a sua volta abbia l'aspetto qualitativo riprodotto della parte destra della figura, ovvero sia convessa, negativa per $|V|$ piccolo e positiva per $|V|$ grande.

Il tratto in cui f ha segno opposto a V comporta il fatto curioso che la corrente scorre in direzione opposta alla differenza di potenziale. In questo modo si immette energia nel circuito, per $|V|$ piccolo (cosa evidentemente necessaria, se vogliamo un ciclo limite), e dunque il componente non lineare deve contenere un amplificatore. Con semplificazione drastica, intendiamo qui per amplificatore un elemento di circuito con tre connessioni esterne — un “ingresso” A , una “uscita” B , e una connessione comune C , si veda la figura 75 — tale che, se indichiamo con $V_i = V_A - V_C$ e $V_u = V_B - V_C$ le tensioni in ingresso e in uscita,

- V_u è funzione della sola V_i , $V_u = F(V_i)$, con F monotona crescente della forma qualitativa indicata in figura 75; la pendenza $F'(V)$ si suppone maggiore di uno per $|V|$ piccolo,

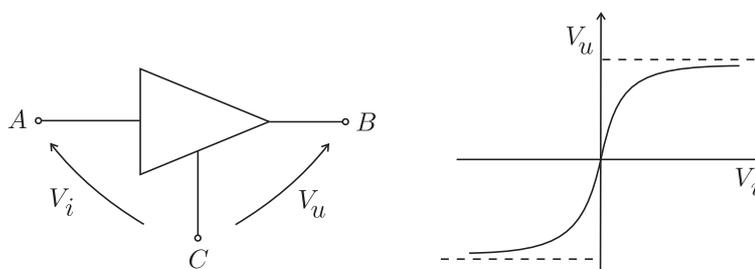


Figura 75: L'amplificatore ideale, con ingresso, uscita e terminale comune; l'andamento di V_u come funzione di V_i .

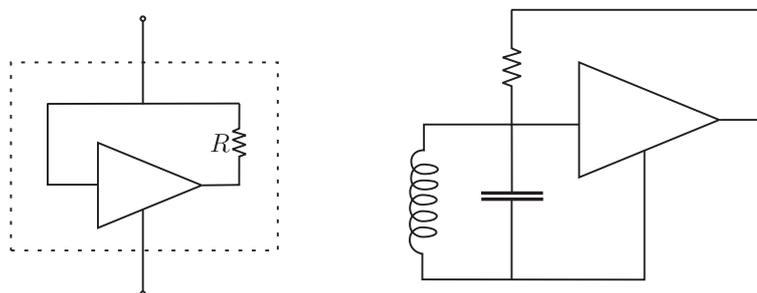


Figura 76: Sinistra: la costruzione del componente non lineare; destra: il circuito completo.

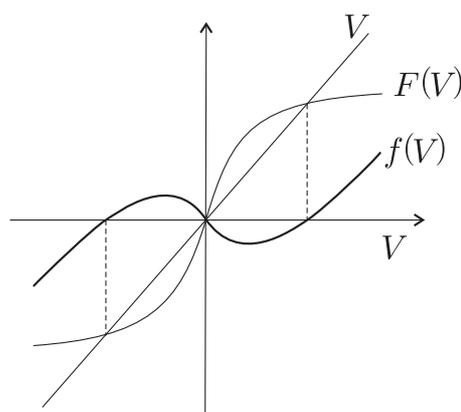


Figura 77: La funzione $f(V) = V - F(V)$.

mentre per $|V|$ grande F “satura” a due valori opposti $\pm V_{\max}$.

- La corrente in ingresso è trascurabile.

Il numero $\beta = F'(0) > 1$ è detto guadagno dell’amplificatore per piccoli segnali.

Con questo componente ideale costruiamo il componente non lineare a due connessioni esterne, da inserire nel circuito di figura 73, nel modo indicato in figura 76, sinistra; il circuito completo è disegnato, in modo equivalente ma forse meglio leggibile, nella parte destra della figura. Poiché $V = V_i$, si ha $V_u = F(V)$, e dunque $I_2 = (V - F(V))/R$. Per confronto con la (G.1) si vede allora che la funzione f è

$$f(V) = V - F(V) ,$$

e il suo grafico ha la forma qualitativa voluta; si veda la figura 77. In particolare si ha, come richiesto, $f'(0) = 1 - \beta < 0$.

Pensiamo ora che β sia un parametro variabile attorno a 1. Per $\beta < 1$ si ha $f'(V) > 0$ per ogni V , e l’origine è un fuoco stabile; quando β supera 1 il vertice della parabola scende sotto lo zero e si ha una biforcazione di Hopf. In un piccolo intorno dell’origine, l’equazione è approssimata da

$$\ddot{V} + (aV^2 - \varepsilon)\dot{V} + V = 0 ,$$

con

$$a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} F'''(0) > 0 , \quad \varepsilon = -\alpha(0) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} (\beta - 1) ;$$

all’occorrenza a si elimina con la sostituzione $V \mapsto V/\sqrt{a}$.

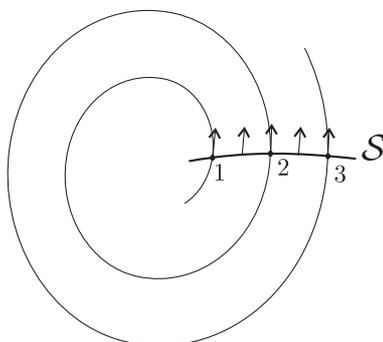


Figura 78: La monotonicità delle intersezioni $\Phi^{t_k}(x)$ su \mathcal{S}

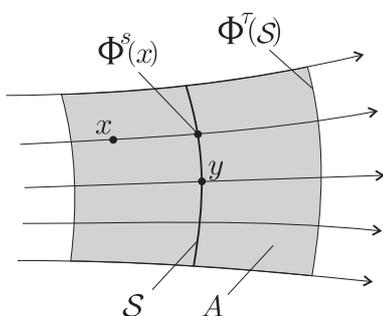


Figura 79: L'intorno cilindrico di y generato da una sezione trasversa \mathcal{S} contenente y

H Dimostrazione del teorema di Poincaré–Bendixon

Premettiamo alcune nozioni preliminari alla dimostrazione del teorema.

Un arco chiuso (finito) di curva $\mathcal{S} \subset M$ si dice essere una *sezione trasversa* al flusso, se \mathcal{S} è trasverso a $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathcal{S}$; per ogni $y \in M$ tale che $f(y) \neq 0$, certamente esiste una sezione trasversa contenente y (ad esempio si può prendere un segmento sufficientemente corto perpendicolare a $f(y)$). Dalla definizione segue immediatamente che le traiettorie tagliano \mathcal{S} sempre nello stesso verso (altrimenti in qualche punto di \mathcal{S} si perde la trasversalità).

Sia \mathcal{S} una sezione trasversa; per τ sufficientemente piccolo sicuramente risulta $\Phi^t(x) \notin \mathcal{S}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ e $-\tau \leq t \leq \tau$. Se $y \in \mathcal{S}$, l'insieme

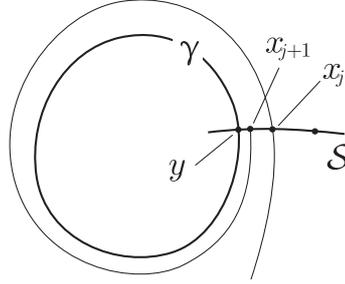
$$A = \bigcup_{|t| < \tau} \Phi^t(\mathcal{S})$$

(figura 79) costituisce un intorno di y , che chiameremo *intorno cilindrico* generato da \mathcal{S} , che ha l'ovvia proprietà che per ogni $x \in A$ esiste unico s , $|s| < \tau$, tale che $\Phi^s(x) \in \mathcal{S}$.

Nel lemma seguente si usa in maniera essenziale l'ipotesi che il sistema sia piano:

LEMMA 24 *Se il movimento $\Phi^t(x)$ taglia una sezione trasversa \mathcal{S} agli istanti $t_1 < t_2 < \dots$ (in numero finito o infinito), le intersezioni $\Phi^{t_j}(x)$ costituiscono una successione monotona su \mathcal{S} .*

DIMOSTRAZIONE. E' un'ovvia conseguenza del fatto che le traiettorie non possono intersecarsi; si veda la figura 78. □

Figura 80: Il movimento $\Phi^t(x)$ converge a γ

LEMMA 25 Sia $y \in L_\omega(x)$, e sia \mathcal{S} una sezione trasversale contenente al suo interno y . Allora y è l'unica intersezione di $L_\omega(x)$ con \mathcal{S} .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $y' \neq y$ appartenga a $L_\omega(x) \cap \mathcal{S}$, e siano t_1, t_2, \dots e t'_1, t'_2, \dots tali che $\Phi^{t_k}(x) \rightarrow y$, $\Phi^{t'_k}(x) \rightarrow y'$. Per indice elevato tutti questi punti sono certamente dentro a un intorno cilindrico generato da \mathcal{S} , pertanto non è restrittivo, ritoccando i tempi, supporre che tali punti stiano su \mathcal{S} . Ma allora pescando dall'una e dall'altra sequenza si trova subito una successione t''_k tale che $\Phi^{t''_k}(x)$ oscilla lungo \mathcal{S} , contro il lemma 24. \square

Dopo queste premesse possiamo ora procedere alla dimostrazione del teorema di Poincaré-Bendixon.

DIMOSTRAZIONE. Se $L_\omega(x)$ non contiene punti di equilibrio, e $y \in L_\omega(x)$, neanche $L_\omega(y) \subset L_\omega(x)$ contiene punti di equilibrio. Preso allora $z \in L_\omega(y)$, sia \mathcal{S} una sezione trasversale contenente z e sia t_1, t_2, \dots una successione tale che $\Phi^{t_j}(y) \rightarrow z$. Non è restrittivo supporre (come nella dimostrazione del lemma 25) che ciascuno di questi punti stia su \mathcal{S} . Ma tutti i punti $\Phi^{t_j}(y)$ stanno in $L_\omega(x)$, come anche z (i primi perché $L_\omega(x)$ è invariante, z perché $L_\omega(y) \subset L_\omega(x)$); poiché per il lemma 25 l'intersezione di $L_\omega(x)$ con \mathcal{S} è unica, tutti questi punti coincidono con z , e dunque la traiettoria di y è periodica. Per concludere dobbiamo mostrare che $L_\omega(x)$ coincide con la traiettoria γ di y (fino ad ora sappiamo solo che la contiene); per questo mostriamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi^t(x), \gamma) = 0. \quad (\text{H.1})$$

Infatti, sia \mathcal{S} trasversale a γ in $y \in L_\omega(x)$, e sia t_1, t_2, \dots tale che $x_j = \Phi^{t_j}(x) \rightarrow y$; ancora una volta, non è restrittivo supporre $x_j \in \mathcal{S}$ e anche, aggiungiamo, $\Phi^t(x) \notin \mathcal{S}$ per $t_j < t < t_{j+1}$. Per j grande x_j è arbitrariamente prossimo a y ; segue facilmente che l'intervallo $t_{j+1} - t_j$ è limitato e prossimo al periodo T di γ (basta osservare che anche $\Phi^T(x_j)$, per j grande, è arbitrariamente prossimo a y , e dunque sta in un intorno cilindrico di y generato da \mathcal{S} ; un piccolo aggiustamento a T lo porta allora su \mathcal{S} e si ha x_{j+1}). Durante tale intervallo la distanza di $\Phi^t(x_j)$ da $\Phi^t(y)$, e dunque da γ , è limitata da $(\text{cost}) \text{dist}(y, x_j)$, e dunque è arbitrariamente piccola; segue la (H.1). Si veda la figura 80. \square

I Il modello di Hénon e Heiles

Il modello di Hénon e Heiles è costituito da due oscillatori armonici di ugual frequenza, che senza perdita di generalità può essere posta uguale a uno, accoppiati da un termine cubico. Lo studio

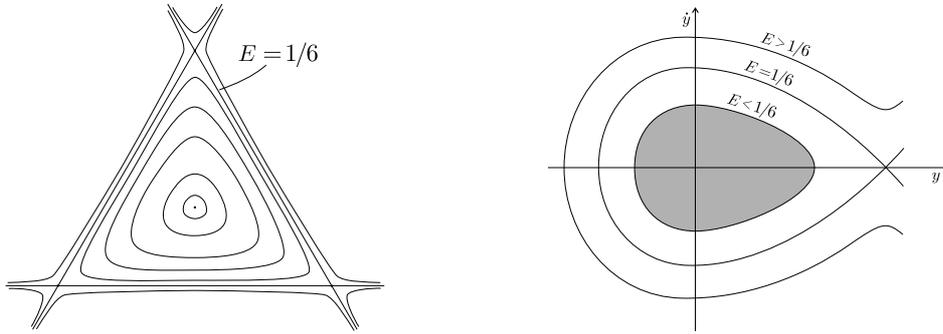


Figura 81: sinistra: le curve di livello di V ; destra: il dominio di definizione della sezione di Poincaré, al variare di E .

risale al 1964 ed è ricordato come *il primo lavoro in cui, con metodi numerici, si vide con chiarezza la presenza di moti caotici*, anzi la compresenza di moti caotici e moti regolari, oggi tanto familiare ma allora pressoché sconosciuta. Qualche parola sulla motivazione fisica è demandata alla fine di questa appendice.

La lagrangiana si scrive

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y), \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x^2y - \frac{1}{3}y^3); \quad (\text{I.1})$$

per moti di piccola energia (dunque di piccola ampiezza) il termine cubico è piccolo e costituisce una perturbazione dei termini quadratici.⁴⁴ La forma precisa dei termini cubici non è molto rilevante, gli autori la preferirono ad altre perché dava le figure migliori. Le equipotenziali $V(x, y) = E$ sono tracciate schematicamente in figura 81, sinistra; a parte la curiosa simmetria triangolare, si vede che si ha una buca di potenziale, con moti sicuramente confinati, per $E < 1/6$ (le corrispondenti superfici di energia costante sono compatte), mentre per $E \geq 1/6$ il potenziale non assicura più il confinamento (le superfici di energia costante perdono la compattezza e hanno lembi che si estendono all'infinito).

Dal sistema continuo passiamo a un sistema discreto, precisamente una mappa in dimensione due, costruendo un'opportuna sezione di Poincaré. Per questo si procede in modo analogo a quanto visto per il pendolo forzato. Qui lo spazio delle fasi ha quattro dimensioni, ma per ogni fissata energia E la traiettoria deve giacere in una superficie di energia costante Σ_E , tridimensionale come lo spazio delle fasi del pendolo forzato. Si prende allora una conveniente sezione di Σ_E , e una scelta buona (perché tutte le traiettorie la intersecano) risulta essere la sezione $x = 0$; ci si restringe agli attraversamenti in un determinato verso, ad esempio con $\dot{x} > 0$. Ogni punto della sezione si può rappresentare con una coppia di coordinate (y, \dot{y}) , che con evidenza determina univocamente un punto nello spazio delle fasi: infatti $x = 0$, mentre \dot{x} resta fissato dalla conservazione di E ,

$$\dot{x} = \sqrt{2E - \dot{y}^2 - y^2 + \frac{2}{3}y^3}. \quad (\text{I.2})$$

La richiesta ovvia che il radicando in questa espressione sia positivo limita il dominio di (y, \dot{y}) a una regione M_E che per $E < 1/6$ è limitata; si veda la figura 81, destra. Per ogni dato iniziale (y, \dot{y})

⁴⁴Si potrebbe far apparire in modo esplicito un piccolo parametro ε mediante il riscaldamento $x = \varepsilon\tilde{x}$, $y = \varepsilon\tilde{y}$, che conduce alla lagrangiana

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) - \varepsilon(\tilde{x}^2\tilde{y} - \frac{1}{3}\tilde{y}^3)$$

(un inessenziale fattore ε^2 davanti a \tilde{L} è stato eliminato); è consuetudine però, seguendo gli stessi autori, procedere con la lagrangiana (I.1), pensando l'energia E come parametro.

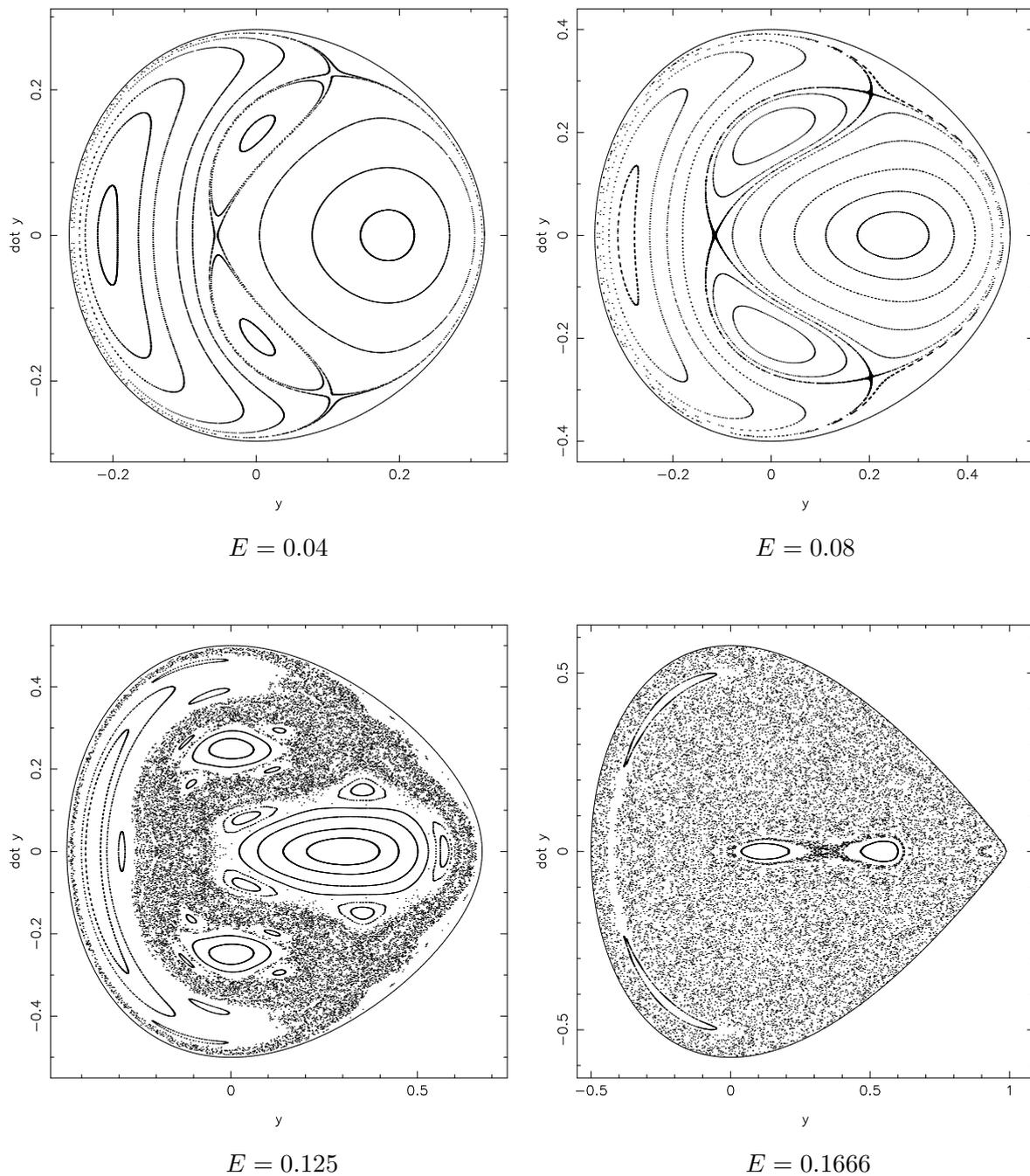


Figura 82: *La sezione di Poincaré del sistema di Hénon e Heiles, per diversi valori di E .*

su M_E , resta ben definita la successiva intersezione della traiettoria con la sezione, e dunque resta ben definita una mappa $\Phi_E : M_E \rightarrow M_E$. Dal sistema continuo di partenza abbiamo così ottenuto un sistema dinamico discreto (M_E, Φ_E) , sezione di Poincaré del sistema continuo.

La domanda che ci poniamo è se nel sistema di partenza, oltre all'energia, ci sia una seconda quantità conservata $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Se F esiste, corrispondentemente esiste una costante del moto $f(y, \dot{y})$ per il sistema discreto (M_E, Φ_E) , precisamente si conserva

$$f(y, \dot{y}) = F(0, y, \dot{x}(y, \dot{y}), \dot{y}) ,$$

con $\dot{x}(y, \dot{y})$ definito dalla (I.2).

La figura 82 mostra il risultato, per diversi valori di $E < 1/6$. La situazione appare complessa: nei due riquadri superiori, per ogni $(y, \dot{y}) \in M_E$ le iterate $\Phi_E^k(y, \dot{y})$ sembrano disporsi su curve di livello di una funzione regolare (benché per $h = 0.125$ già si intuisca che, in prossimità di una separatrice, c'è un annerimento molto piccolo ma non riducibile a un punto). Crescendo E tuttavia, accanto ai moti che sembrano ammettere ancora una quantità conservata, compaiono moti di altra natura: le iterate $\Phi_E^k(y, \dot{y})$ non stanno più su curve, ma vanno a riempire un'area. *Tutti i punti non allineati in curve nei due riquadri in basso (20.000 punti in ciascuno) sono iterate di un unico punto iniziale.*

Le figure appaiono qualitativamente simili a quelle che abbiamo già visto per il pendolo forzato, e possono non meravigliarci. Storicamente però, questo di Hénon e Heiles fu il primo esempio in cui la presenza di moti caotici in sistemi semplici apparve evidente, e di un'evidenza schiacciante. Tutti gli altri esempi numerici vennero dopo. Da quel momento fu chiaro a tutti quello che Poincaré e pochi altri avevano compreso: la dinamica, in sistemi semplicissimi non costruiti appositamente ma naturali fisicamente, può essere molto, molto complessa.

Il motivo di interesse degli autori per il modello (I.1) proviene dall'astronomia. Uno degli argomenti di punta, allora, era la regolarità dei moti delle stelle nelle galassie. Nello schema più semplice si può pensare che ciascuna stella veda, fondamentalmente, il campo medio di tutte le altre stelle;⁴⁵ un problema a molti corpi imbarazzantemente complicato si riduce così a un problema a tre soli gradi di libertà, se si è in grado di fare un esempio sensato di potenziale medio efficace. Addirittura, ci si riduce a due soli gradi di libertà se si suppone — è la situazione più semplice, anche se non l'unica — che la galassia abbia simmetria cilindrica, dunque si conservi il momento angolare e si possa effettuare una riduzione. Da questa situazione alla lagrangiana (I.1) il passo è breve: si suppone che ci sia una traiettoria circolare, che per il sistema ridotto appare come un punto di equilibrio, e si sviluppa attorno ad esso, come nella teoria delle piccole oscillazioni. Le coordinate x e y sono le coordinate normali. Il termine cubico che appare in V nella (I.1) è solo un esempio di quello che ci potrebbe essere. Nel titolo del lavoro si parla di possibile esistenza, nel sistema, di un "terzo integrale" del moto, dopo energia e momento angolare.

Oggi non si ricorda più la motivazione astronomica del modello di Hénon e Heiles: i risultati apparvero immediatamente (già agli stessi autori) di portata ben maggiore del problema che aveva motivato lo studio. Il lavoro di Hénon e Heiles è considerato tra quelli fondanti per la teoria dei sistemi dinamici, e per questo vi è stata dedicata questa appendice.

⁴⁵Sono approssimazioni che si incontrano spesso in meccanica statistica, e del resto una galassia si presenta in modo naturale come un gas di molte stelle. L'approssimazione di campo medio in dinamica stellare è buona, molto più che per i gas di molecole, perchè i potenziali molecolari decadono molto rapidamente con la distanza, mentre il potenziale gravitazionale decade solo come $1/r$, cosicché una stella ne "vede" efficacemente molte, e la media ha più senso.

J Dimostrazione del teorema della varietà stabile

Il cuore della dimostrazione è la costruzione locale della varietà stabile, in un intorno piccolo di z^* . Per questo mettiamoci in una carta (cosicché i punti di M e quelli dello spazio tangente $T_{z^*}M$ si confondono), e anzi in una carta adattata alla matrice jacobiana $A = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)|_{z^*}$: precisamente, tale che z^* stia nell'origine, $z^* = (0, 0)$, e le rette E^s e E^u coincidano rispettivamente con l'asse x e l'asse y . Con questa scelta la matrice A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad 0 < |a| < 1 < |b|,$$

e corrispondentemente la mappa nonlineare Φ si scrive

$$\Phi(x, y) = (ax + f(x, y), by + g(x, y)),$$

con f, g nulle nell'origine assieme alle loro derivate prime:

$$f(0, 0) = g(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0. \quad (\text{J.1})$$

Per $\varepsilon > 0$ denotiamo con U_ε il quadrato di semilato ε centrato nell'origine. Vale la seguente proposizione, detta *teorema della varietà stabile locale*, vero cuore del teorema di Perron–Hadamard:

PROPOSIZIONE 26 *Se ε è sufficientemente piccolo, allora esiste unica una funzione $w : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$, regolare quanto Φ , tale che:*

i) si ha $w(0) = w'(0) = 0$, ovvero il grafico di w che denotiamo

$$W_\varepsilon^s = \{(x, y) \in U_\varepsilon : y = w(x)\}$$

è tangente all'asse x nell'origine;

ii) se (x, y) appartiene a W_ε^s , allora anche $\Phi(x, y)$ appartiene a W_ε^s , ovvero W_ε^s è invariante in avanti, $\Phi(W_\varepsilon^s) \subset W_\varepsilon^s$;

iii) si ha $\Phi^t(x, w(x)) \rightarrow (0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$;

iv) se $\Phi^t(x, y) \in U_\varepsilon$ per ogni $t \geq 0$, allora $y = w(x)$, ovvero per tutti i punti $(x, y) \in U_\varepsilon \setminus W_\varepsilon^s$ esiste $t > 0$ tale che $\Phi^t(x, y) \notin U_\varepsilon$;

Si veda la figura 83. La varietà W_ε^s si dice *varietà stabile locale* di z^* . Si osservi che i punti (ii) e (iv) implicano l'unicità di w .

Da questa proposizione si deduce immediatamente, come corollario, il teorema della varietà stabile, salvo che per la dipendenza regolare dal parametro che tratteremo poi a parte.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica innanzitutto che l'insieme W^s definito nella Proposizione 14 coincide con

$$\mathcal{W}^s = \bigcup_{t \geq 0} \Phi^{-t}(W_\varepsilon^s).$$

Infatti, per un verso è evidente che se $z \in \mathcal{W}^s$, allora per un qualche t si ha $\Phi^t(z) \in W_\varepsilon^s$, e dunque, per il punto (iii) della Proposizione 26, si ha poi $\Phi^t(z) \rightarrow z^*$ per $t \rightarrow \infty$, ovvero $z \in W^s$. Viceversa,

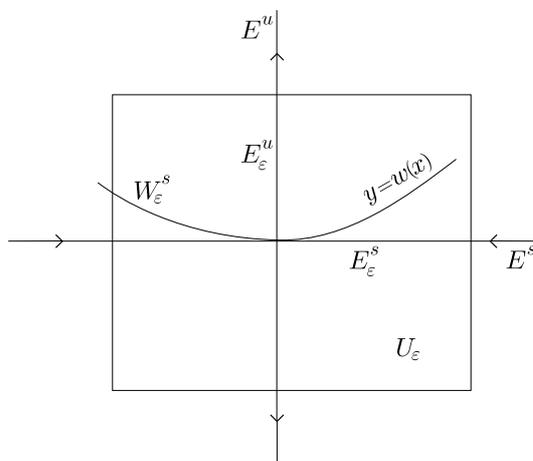


Figura 83: Il quadrato U_ε e la varietà stabile locale W_ε^s .

se supponiamo $z \in W^s$, allora certamente, da un certo t_0 sufficientemente grande in poi, si ha $\Phi^t(z) \in U_\varepsilon$; ma allora per il punto (iv) della proposizione risulta $\Phi^{t_0}(z) \in W_\varepsilon^s$, e dunque $z \in W^s$. Ogni tratto finito di W^s è così una curva regolare immersa in M , e non vi possono essere punti doppi perché non ve ne sono in W_ε^s (lo si dimostri formalmente). \square

Vediamo allora la dimostrazione del teorema della varietà stabile locale, limitandoci tuttavia alla regolarità in classe C^1 (ovvero dimostriamo che w è di classe C^1 se Φ è di classe C^1). Per semplificare la notazione supponiamo $a, b > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per eliminare il fastidio di lavorare nel dominio U_ε piccolo, conviene eseguire preliminarmente un riscaldamento che porti il dominio a dimensione uno. Per questo sfruttiamo la continuità delle derivate f'_x, f'_y, g'_x, g'_y , assieme alle (J.1), per dire che per η arbitrario, se ε è sufficientemente piccolo e $(x, y) \in U_\varepsilon$, allora

$$|f(x, y)|, |g(x, y)| < \varepsilon\eta, \quad |f'_x(x, y)|, \dots, |g'_y(x, y)| < \eta$$

(la seconda è banale, la prima è ovvia conseguenza della seconda, avendo scritto preliminarmente quest'ultima con $\eta/2$ al posto di η). Poniamo allora

$$x = \varepsilon\tilde{x}, \quad y = \varepsilon\tilde{y},$$

cosicché $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U_1$, e poi

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varepsilon^{-1}\Phi(\varepsilon\tilde{x}, \varepsilon\tilde{y}), \quad \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\varepsilon\eta)^{-1}f(\varepsilon\tilde{x}, \varepsilon\tilde{y}), \quad \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\varepsilon\eta)^{-1}g(\varepsilon\tilde{x}, \varepsilon\tilde{y}).$$

Si verifica immediatamente che la nuova mappa $\tilde{\Phi} : U_1 \rightarrow U_1$ ha la forma

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (a\tilde{x} + \eta\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}), b\tilde{y} + \eta\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y})), \tag{J.2}$$

e i termini non lineari \tilde{f} e \tilde{g} sono limitati assieme alle loro derivate, più precisamente si ha

$$\|\tilde{f}\|, \|\tilde{g}\|, \|\tilde{f}'_x\|, \dots, \|\tilde{g}'_y\| < 1, \tag{J.3}$$

con $\|\cdot\| = \text{sup-norma}$. Resta ovviamente vero che \tilde{f} e \tilde{g} si annullano nell'origine assieme alle derivate prime. Nel seguito sopprimeremo la tilde.

La Proposizione 26 (nella classe di regolarità nella quale ci siamo proposti di dimostrarla) si traduce ora nel modo seguente:

Per η sufficientemente piccolo esiste unica una funzione $w : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, di classe C^1 , tale che:

- i) $w(0) = 0, w'(0) = 0$;
- ii) il grafico $W_1^s = \{(x, y) \in U_1 : y = w(x)\}$ è invariante, ovvero $\Phi(x, w(x)) \in W_1^s$ per ogni $x \in [-1, 1]$;
- iii) per ogni $x \in [-1, 1]$ risulta $\Phi^t(x, w(x)) \rightarrow (0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$;
- iv) se $(x, y) \in U_1$ e $y \neq w(x)$, allora esiste $t > 0$ tale che $\Phi^t(x, y) \notin U_1$.

La dimostrazione si articola in quattro passi.

Primo passo: L'esistenza di w si riporta alla soluzione di una opportuna equazione funzionale. Per questo osserviamo che grazie all'espressione (J.2) di Φ , la proprietà (ii) di w si può così riformulare:

$$w(x) = b^{-1}[w(ax + \eta f(x, w(x))) - \eta g(x, w(x))] . \quad (\text{J.4})$$

La funzione w si presenta allora come soluzione dell'equazione funzionale

$$v = \mathcal{F}v , \quad (\text{J.5})$$

nella quale \mathcal{F} denota l'operatore che agisce sulle funzioni $v : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ nel modo seguente:

$$(\mathcal{F}v)(x) = b^{-1}[v(ax + \eta f(x, v(x))) - \eta g(x, v(x))] . \quad (\text{J.6})$$

Si osservi che per η piccolo la quantità $ax + \eta f(x, v(x))$, ad argomento di v , non supera in modulo $a + \eta < 1$ (si ricordi $\|f\| < 1$), dunque \mathcal{F} è ben definito. Si osservi anche che per $\eta = 0$ la (J.5) è risolta da $w(x) = 0$ (in assenza di nonlinearità la varietà stabile coincide con il sottospazio contraente).

Secondo passo: Mostriamo che se η è piccolo l'insieme di funzioni

$$\mathcal{V} = \{v \in C^1([-1, 1]) : \|v\| \leq 1, \|v'\| \leq 1\}$$

è invariante sotto \mathcal{F} , ovvero che $v \in \mathcal{V}$ implica $\|\mathcal{F}v\| \leq 1$ e $\|(\mathcal{F}v)'\| \leq 1$, e inoltre che esiste $\mu < 1$ tale che

$$\|\mathcal{F}v_2 - \mathcal{F}v_1\| \leq \mu \|v_2 - v_1\| \quad (\text{J.7})$$

per ogni scelta di $v_2, v_1 \in \mathcal{V}$ (\mathcal{F} è una contrazione in norma C^0). Quest'ultima proprietà vale (ci sarà utile) in ipotesi poco più generali, precisamente per $v_2 \in \mathcal{V}$ ma $v_1 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ non necessariamente differenziabile. Vediamolo:

- a) se $v \in \mathcal{V}$ e $|x| \leq 1$, allora dalle (J.3) segue subito, per η piccolo,

$$|\mathcal{F}v(x)| \leq b^{-1}|v(ax + \eta f(x, v(x))) - \eta g(x, v(x))| \leq b^{-1}(1 + \eta) \leq 1 ,$$

ovvero $\|\mathcal{F}v\| \leq 1$.

- b) In modo analogo si procede per la derivata, la cui espressione è [notazione breve: $f = f(x, v(x))$, $g = g(x, v(x))$]

$$(\mathcal{F}v)'(x) = b^{-1}\{v'(ax + \eta f)[a + \eta(f'_x + v'(x)f'_y)] - \eta(g'_x + v'(x)g'_y)\} . \quad (\text{J.8})$$

Procedendo con pazienza come sopra, si trova $|v'(ax + \eta f)| \leq 1$, $|f'_x + v'(x)f'_y| \leq 2$, $|g'_x + v'(x)g'_y| \leq 2$, e infine

$$\|(\mathcal{F}v)'\| \leq b^{-1}(a + 4\eta) \leq 1 .$$

- c) Si ha [notazione breve: $f_i := f(x, v_i(x))$, $g_i := g(x, v_i(x))$, $i = 1, 2$]

$$\mathcal{F}v_2 - \mathcal{F}v_1 = b^{-1}[v_2(ax + \eta f_2) - v_1(ax + \eta f_1) - \eta g_2 + \eta g_1] ;$$

aggiungendo e togliendo entro la parentesi quadra $v_2(ax + \eta f_1)$, e sfruttando il fatto che f, g, v_2 hanno tutte le derivate in modulo inferiori a uno, segue subito (dal teorema della media)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}v_2 - \mathcal{F}v_1\| &\leq b^{-1}[\eta\|f_2 - f_1\| + \|v_2 - v_1\| + \eta\|g_2 - g_1\|] \\ &\leq b^{-1}(1 + 2\eta)\|v_2 - v_1\| , \end{aligned}$$

e dunque la (J.7) è soddisfatta con $\mu = b^{-1}(1 + 2\eta) < 1$. Non si è usata, si osservi, la differenziabilità di v_1 .

Terzo passo: Mostriamo⁴⁶ che la successione v_0, v_1, \dots definita da

$$v_0(x) = 0 , \quad v_{k+1} = \mathcal{F}v_k \quad (\text{J.9})$$

(si osservi che la prima approssimazione della varietà stabile è l'asse x) converge a una funzione $w \in \mathcal{V}$, che risolve la (J.5) e soddisfa $w(0) = w'(0) = 0$.

Per questo osserviamo innanzitutto che per il punto precedente risulta $\|v_k\| \leq 1$ per ogni k , e inoltre

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \mu^k \|v_1 - v_0\| ;$$

questo basta per la convergenza puntuale della successione a una funzione limite w , con $\|w\| \leq 1$. Dalla forma di \mathcal{F} si vede poi che se $v_k(0) = 0$ allora $v_{k+1}(0) = 0$, pertanto tutte le v_k si annullano nell'origine, e di conseguenza $w(0) = 0$. Proviamo ora che il limite w della successione soddisfa l'equazione funzionale (J.5), ovvero che si ha $w = \mathcal{F}w$; poiché $w = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}v_k$, basta mostrare che risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}v_k = \mathcal{F}w .$$

Ma dal passo precedente, con v_k al posto di v_2 e w (che ancora non abbiamo dimostrato essere differenziabile) al posto di v_1 , sappiamo che

$$\|\mathcal{F}v_k - \mathcal{F}w\| \leq \mu \|v_k - w\| ;$$

prendendo il limite $k \rightarrow \infty$ la conclusione è immediata.

Veniamo ora alla differenziabilità di w . Con evidenza, il gioco sarebbe fatto *se sapessimo che la successione delle derivate v'_k converge uniformemente*: infatti allora saremmo sicuri che la

⁴⁶La proprietà (J.7) dimostrata al punto precedente non consente purtroppo una conclusione rapida basata sul lemma della contrazione: infatti l'insieme \mathcal{V} in cui stiamo lavorando, e nel quale cerchiamo la soluzione della (J.5), è di classe C^1 , mentre la contrazione sopra dimostrata è solo in norma C^0 .

differenziabilità delle v_k si porta al limite $k \rightarrow \infty$, ovvero che la funzione limite w è derivabile e la sua derivata w' è il limite di v'_k , il che implica in particolare anche $w'(0) = 0$. Questo non lo sappiamo dimostrare: ma a ben guardare basta un po' di meno, precisamente la convergenza uniforme anche solo di una sottosuccessione v'_{k_i} (basta evidentemente restringersi a quella sottosuccessione delle v_{k_i}); e questo riusciamo a garantirlo grazie a un provvidenziale risultato, noto come *teorema di Ascoli-Arzelà*, che estende a successioni di funzioni l'ovvia proprietà delle successioni numeriche, per cui da una successione limitata si può sempre estrarre una sottosuccessione convergente. Il teorema, per la cui dimostrazione si rinvia ai testi di analisi, afferma precisamente che

per ogni successione di funzioni $u_0, u_1, \dots, u_k, \dots$ equicontinua (ovvero continua uniformemente in k oltre che in x) e equilimitata (ciascuna u_k è limitata da una costante indipendente da k), esiste una sottosuccessione $u_{k_i}, i \in \mathbb{N}$, che converge uniformemente.

Il teorema si usa per $u_k = v'_k$, e per questo bisogna verificare che la successione delle v'_k è effettivamente equicontinua (che sia equilimitata lo sappiamo già: $\|v'_k\| \leq 1$ per ogni k). Una volta che ciò sia stabilito, resta allora assicurata la differenziabilità di w , assieme anche a $w'(0) = \lim_{i \rightarrow \infty} v'_{k_i}(0) = 0$.

Per verificare che la successione delle v'_k è equicontinua consideriamo innanzitutto f'_x, \dots, g'_y ; esse sono continue in $[-1, 1]$, dunque per ogni $\rho > 0$ esiste $\delta = \delta(\rho) > 0$ tale che, se uno o entrambi gli argomenti di f'_x, \dots, g'_y variano al più di δ , allora ciascuna funzione varia al più di ρ . Mostriamo che con la stessa δ indipendente da k , e per ogni k , risulta anche

$$|v'_k(x + \xi) - v'_k(x)| < \rho \quad \text{se} \quad |\xi| < \delta .$$

Per $k = 0$ la proprietà è banalmente verificata; supposta vera per k , dimostriamola per $k + 1$. Usiamo per questo l'espressione (J.8) di $(\mathcal{F}v)'$, per $v = v_k$. Si vede facilmente (ripetendo ancora una volta le stesse stime) che per incremento ξ alla variabile x , $|\xi| < \delta$,

$v_k(x)$	varia meno di	δ	($ v'_k < 1$)
$ax + \eta f(x, v_k(x))$		$(a + 2\eta)\delta < \delta$	($ f'_x , f'_y < 1$)
$v'_k(ax + \eta f(x, v_k(x)))$		ρ	(ipotesi induttiva)
$f'_x(x, v_k(x)), \dots, g'_y(x, v_k(x))$		ρ	(ipotesi su $\delta(\rho)$)

Se ne deduce senza difficoltà⁴⁷

$$|v'_{k+1}(x + \xi) - v'_{k+1}(x)| \leq b^{-1}[\rho(a + 2\eta) + 3\eta\rho + 3\eta\rho] < \rho .$$

Quarto passo: Fino ad ora abbiamo dimostrato l'esistenza (non ancora l'unicità) di una funzione w , di classe C^1 , che soddisfa i primi due punti della proposizione. Concludiamo allora la dimostrazione provando il punto (iv), che a sua volta come già si è osservato implica l'unicità di w , e per ultimo il punto (iii).

⁴⁷Si usa, per i prodotti, la proprietà banale, valida per funzioni α e β qualsiasi,

$$|\alpha(x + \xi)\beta(x + \xi) - \alpha(x)\beta(x)| \leq \|\alpha\| \|\beta(x + \xi) - \beta(x)\| + \|\beta\| |\alpha(x + \xi) - \alpha(x)| .$$

A questo scopo, diciamo che un segmento $[z_1, z_2]$, con estremi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ in U_1 , è “di tipo verticale”, o semplicemente verticale, se $|y_2 - y_1| > |x_2 - x_1|$. Si verifica facilmente che Φ manda segmenti verticali in segmenti verticali: infatti, posto $(x'_i, y'_i) = \Phi(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, e introdotte le notazioni agili

$$\Delta_x = |x_2 - x_1|, \quad \Delta_y = |y_2 - y_1|, \quad \Delta'_x = |x'_2 - x'_1|, \quad \Delta'_y = |y'_2 - y'_1|,$$

si trova subito

$$\begin{aligned} \Delta'_x &\leq a\Delta_x + \eta|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq a\Delta_x + \eta(\Delta_x + \Delta_y) \\ \Delta'_y &\geq b\Delta_y - \eta|g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)| \geq b\Delta_y - \eta(\Delta_x + \Delta_y) \end{aligned}$$

(si usa $x'_2 - x'_1 = a(x_2 - x_1) + \eta[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)]$, e similmente si fa per y), e dunque

$$\Delta'_y - \Delta'_x \geq (b - 2\eta)\Delta_y - (a + 2\eta)\Delta_x > \Delta_y - \Delta_x.$$

Anzi: si vede anche che se un segmento è verticale, allora la sua componente y cresce, precisamente si trova

$$\Delta'_y \geq \sigma \Delta_y, \quad \text{con } \sigma = (b - 2\eta) > 1.$$

Il quarto punto è ora immediato: se infatti $y \neq w(x)$, allora il segmento di estremi $z_1 = (x, y)$ e $z_2 = (x, w(x))$, ovviamente verticale, resta con un estremo su W_ε^s (che già sappiamo essere invariante), ma iterando Φ la sua lunghezza cresce illimitatamente, dunque prima o poi l'altro estremo esce da U_1 .

Infine, mostriamo che per ogni $z \in W_\varepsilon^s$ l'iterato $\Phi^t(z)$ converge all'origine. Per questo osserviamo che il segmento che congiunge l'origine a $\Phi^t(z)$ non può essere verticale: altrimenti, per quanto detto sopra, la sua lunghezza crescerebbe illimitatamente, e W_ε^s non sarebbe invariante. Posto dunque $\Phi^t(z) = (x_t, y_t)$, si ha sempre $y_t \leq x_t$. Ma allora

$$|x_{t+1}| = |ax_t + \eta f(x_t, y_t)| \leq (a + 2\eta)|x_t|,$$

e la conclusione è immediata. □

Per concludere la dimostrazione del teorema della varietà stabile dobbiamo ancora studiare la dipendenza regolare da un parametro, e mostrare che

PROPOSIZIONE 27 *Se si ha una mappa Φ_μ che dipende in modo regolare da un parametro μ , e ammette un punto fisso iperbolico $z^*(\mu)$, allora la varietà stabile $W^s(\mu)$ di $z^*(\mu)$ dipende in modo regolare da μ .*

DIMOSTRAZIONE. Con evidenza basta dimostrare la regolarità di $W^s(\mu)$ in un intorno del punto fisso, ovvero verificare la regolarità in μ della varietà stabile locale W_ε^s (infatti, qualunque porzione finita di W^s si ottiene da W_ε^s con un numero finito di applicazioni di Φ_μ^{-1} , pertanto la regolarità di W_ε^s si trasferisce, benché ovviamente senza uniformità, a tutta W^s). Inoltre, per studiare W_ε^s ci si può mettere in coordinate adattate per ogni μ , senza perdere di regolarità in μ (infatti, sia $z^*(\mu)$, su cui si trasla l'origine, sia $E^s(\mu)$ e $E^u(\mu)$, che si prendono come assi coordinati, dipendono con regolarità da μ). In definitiva, se denotiamo con w^μ la funzione il cui grafico è la varietà stabile locale, si tratta di dimostrare che tale funzione è regolare anche in μ .

Se ci si limita alla regolarità in classe C^1 , bastano modesti ritocchi alla dimostrazione vista sopra del teorema della varietà stabile locale. Precisamente al terzo passo, dopo aver definito per ogni μ la successione (J.9):

$$v_0^\mu(x) = 0, \quad v_{k+1}^\mu = \mathcal{F}^\mu v_k^\mu$$

(con ovvia definizione di \mathcal{F}^μ), si osserva che ciascuna funzione eredita dalla precedente la differenziabilità anche in μ ; usando allora, con identica procedura, il teorema di Ascoli–Arzelà, si conclude senza difficoltà che la funzione limite w^μ è differenziabile anche in μ . □