Qualche esercizio risolto

(non è ben ricontrollato, possono esserci sviste)

Esercizio 1 *Per quali scelte di $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ la trasformazione*

$$p = aI^\alpha \cos^\beta \varphi \ , \qquad q = bI^\alpha \sin^\gamma \varphi$$

è strettamente canonica?

Soluzione

Basta imporre $\{q, p\} = 1$. Si calcola subito

$$\{q, p\} = a\, b\, \alpha\, I^{2\alpha+1} \sin^{\gamma-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi\, (\gamma \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) \ .$$

Perchè il membro di destra sia costante in I e φ deve essere $\alpha = 1/2$ e $\gamma = \beta = 1$. Perché la costante sia 1 deve essere $ab = 2$. In conclusione, l'unica possibilità è

$$p = c\sqrt{2I} \cos \varphi \ , \qquad q = c^{-1}\sqrt{2I} \sin \varphi \ ,$$

con c costante arbitraria.

Esercizio 2 *Si consideri la trasformazione di coordinate*

$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega q}{p} \ .$$

a) Si dimostri che è strettamente canonica, usando una a scelta delle condizioni n. e s.

b) Se ne determini una funzione generatrice $S(p, \varphi)$.

Soluzione

Con le parantesi di Poisson: l'unica verifica significativa è $\{\varphi, I\} = 1$; il calcolo dà

$$\left\{ \arctan \frac{\omega q}{p}, \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \right\} = \frac{\frac{\omega}{p}}{1 + \frac{\omega^2 pq^2}{p^2}} \frac{p}{\omega} - \frac{-\frac{\omega q}{p}}{1 + \frac{\omega^2 pq^2}{p^2}} \omega q = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2 q^2} + \frac{p^2}{p^2 + \omega^2 q^2} = 1 \ .$$

Poco più complicato è verificare che la jacobiana è simplettica oppure che è preservata la 1-forma di Liouville.

Per quanto riguarda la generatrice, dobbiamo riscrivere la trasformazione in forma mista, usando come variabili indipendenti p e φ. L'espressione di φ si inverte subito in $q = \frac{p}{\omega} \tan \varphi$, che sostituita nell'espressione di I dà poi $I = \frac{p^2}{2\omega}(1 + \tan^2 \varphi)$. Serve dunque $S(p, \varphi)$ tale che

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{p}{\omega} \tan \varphi \ , \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{p^2}{2\omega} (1 + \tan^2 \varphi) \ .$$

La soluzione evidente è

$$S(p,\varphi) = \frac{p^2}{2\omega}\,\tan\varphi\ ;$$

se proprio la si vuole dedurre, allora si integra ad esempio la prima trovando $S(p,\varphi) = \frac{p^2}{2\omega}\,\tan\varphi + f(\varphi)$ con f arbitraria, e derivando rispetto a φ si vede che la seconda è soddisfatta con $f = 0$.

Esercizio 3 *Si scriva la funzione generatrice $S(I,q)$ della trasformazione (inversa di quella all'esercizio precedente)*

$$p = \sqrt{2I\omega}\,\cos\varphi\ , \qquad q = \sqrt{2I/\omega}\,\sin\varphi\ .$$

Soluzione

Questa volta dobbiamo riscrivere la trasformazione usando come variabili indipendenti I e q. Invertendo la prima equazione si trova $\sin\varphi = \omega q/\sqrt{2I\omega}$, $\varphi = \arcsin(\omega q/\sqrt{2I\omega})$, che sostituita nella seconda dà $p = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}$. Serve perciò $S(I,q)$ tale che

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2I\omega}}\ , \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}\ .$$

Dalla seconda si ottiene banalmente S come integrale:

$$S(I,q) = \int_0^q \sqrt{2I\omega - \omega^2 x^2}\,\mathrm{d}x + f(\varphi)\ ,$$

con f arbitraria; sostituendo nella prima si trova l'integrale dell'arcoseno e si vede che l'equazione è soffisfatta con $f = 0$. L'integrale naturalmente si potrebbe calcolare in termini di funzioni elementari, ma non ne vale la pena.

Esercizio 4 *Si consideri l'hamiltoniana*

$$H_\varepsilon(I_1,I_2,I_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon[\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)]\ .$$

Per quali valori di $\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ è soddisfatto il principio della media, e per quali invece non è soddisfatto? (Entrambe le situazioni vanno motivate.)

Soluzione

E' questo uno degli "esercizi scuola" in cui si sa scrivere la soluzione esatta $I(t), \varphi(t)$, e si constata su di essa se il principio della media sia o no soddisfatto; non è molto interessante, ma serve a imparare. La possibilità di scrivere senza fatica la soluzione deriva dal fatto che il sistema imperturbato è isocrono, e inoltre la perturbazione

$$f(\varphi) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)$$

non dipende da I, cosicché anche il sistema perturbato H_ε è esattamente isocrono:

$$\dot\varphi = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I} = \omega\ .$$

In questa situazione eccezionale si ha

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0 + \omega_i t \ , \qquad i = 1,2,3 \ ;$$

corrispondentemente anche le equazioni di Hamilton per le I divengono banali: si ha infatti

$$\dot I_i = -\,\varepsilon \, \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(\varphi^0 + \omega t) \ ,$$

e dunque l'integrazione delle equazioni differenziali si riduce all'integrazione ordinaria:

$$I_i(t) = I^0 - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(\varphi^0 + \omega t') \, \mathrm{d}t' \ .$$

Utilizzando elementari identità trigonometriche si dà a f l'espressione

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 1 - \cos(2\varphi_2 - 4\varphi_3)] \ ,$$

e gli integrali si fanno a vista: ad esempio per I_1 si ha

$$I_1(t) = I_1^0 - \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t [\,\cos(\varphi_1^0 + \varphi_2^0 + (\omega_1 + \omega_2)t') + \cos(\varphi_1^0 - \varphi_2^0 + (\omega_1 - \omega_2)t')\,] \, \mathrm{d}t' \ ,$$

e espressioni simili (contenenti anche, nella funzione integranda, $\sin(2\varphi_2^0 - 4\varphi_3^0 + (2\omega_2 - 4\omega_3)t'))$ si ottengono per I_2 e I_3. Si vede bene che:

- se risulta
$$\omega_1 + \omega_2 \neq 0 \ , \qquad \omega_1 - \omega_2 \neq 0 \ , \qquad \omega_2 - 2\omega_3 \neq 0 \ ,$$
allora tutti gli integrali sono limitati in t e corrispondentemente (per ogni t, non solo per $t = 1/\varepsilon$) ciascuna $I_i(t)$ si discosta da I_i^0 di una quantità piccola con ε;

- se invece almeno una relazione di risonanza è soddisfatta compaiono (in aggiunta a quantità limitate) termini secolari: per esempio per I_1, se $\omega_1 + \omega_2 = 0$, compare il termine
$$-\frac{1}{2}\,\varepsilon\, t\, \cos(\varphi_1^0 + \varphi_2^0) \ ,$$
e al tempo $t = 1/\varepsilon$ la quantità $I_1(t) - I_1^0$ *non* è piccola con ε.

Si conclude che se nessuna delle tre relazioni di risonanza è soddisfatta, allora il principio della media è soddisfatto (alla grande, per ogni t); in caso contrario, a causa dei termini secolari, il principio della media non è più soddisfatto.

Esercizio 5 *Si consideri l'hamiltoniana integrabile* $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - I_2^2)$*. Dove si ha, nel piano* $I_1 I_2$*, una risonanza con* $k = (1, 2)$*? E con* $k = (1, -4)$*?*

Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) + \varepsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) \ .$$

Per quali dati iniziali si trovano moti che non *soddisfano il principio della media? Si scrivano in dettaglio questi particolari moti.*

Soluzione

Si ha

$$\omega(I) = (4I_1, -I_2) \ ,$$

pertanto per $k = (1, 2)$ si ha risonanza sulla retta r di equazione $k \cdot \omega(I) = 0$ ovvero $2I_1 - I_2 = 0$; per $k = (1, -4)$ la risonanza è invece sulla retta r' di equazione $I_1 + I_2 = 0$.

La perturbazione $f = \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)$ contiene l'armonica $k = (1, 2)$; è dunque sulla retta r che la combinazione di angoli $k \cdot \varphi = \varphi_1 + 2\varphi_2$ è lenta:

$$(k \cdot \varphi)^{\cdot} = k \cdot \omega(I) = 0 \qquad \text{per} \qquad I \in r \ .$$

D'altra parte, le equazioni di Hamilton per le I,

$$\dot{I}_1 = \varepsilon \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) \ , \qquad \dot{I}_2 = 2\varepsilon \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) \ ,$$

mostrano che la retta r (così come tutte le rette ad essa parallele, $2I_1 - I_2 = c$) è invariante: infatti

$$(2I_1 - I_2)^{\cdot} = 0 \ , \qquad \text{e dunque} \qquad 2I_1(t) - I_2(t) = 2I_1^0 - I_2^0 = 0 \ .$$

I moti con dato iniziale su r pertanto restano su r, e per essi, come si è detto sopra, $\varphi_1 + 2\varphi_2$ è costante:

$$\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) = \varphi_1^0 + 2\varphi_2^0 \ .$$

Segue che I_1, I_2 soddisfano le equazioni

$$\dot{I}_1 = \varepsilon \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ , \qquad \dot{I}_2 = 2\varepsilon \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ ,$$

con soluzione

$$I_1(t) = I_1^0 + \varepsilon\, t \, \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ , \qquad I_2(t) = I_2^0 + \varepsilon\, t \, \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ , \quad I_2^0 = 2I_1^0 \ .$$

Le equazioni di Hamilton per φ_1, φ_2 si integrano immediatamente e si trova

$$\varphi_1(t) = \varphi_1^0 + 4I_1^0 t + 2\varepsilon\, t^2 \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ , \qquad \varphi_1(t) = \varphi_2^0 - I_2^0 t - \tfrac{1}{2}\varepsilon\, t^2 \sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \ .$$

Si vede così che per $I^0 \in r$, e naturalmente per $\sin(\varphi_1^0 + 2\varphi_2^0) \neq 0$, il principio della media *non* è soddisfatto.

E' un'utile verifica (non necessaria però) sostituire le espressioni trovate per $I(t), \varphi(t)$ nelle equazioni di Hamilton, osservando che sono soddisfatte.

Esercizio 6 *Si consideri l'hamiltoniana perturbata*

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2) + \varepsilon\cos(5\varphi_1 + 3\varphi_2) \ .$$

a) Si determini, tra le combinazioni lineari delle azioni I_1 e I_2, una costante del moto.

b) Si determinino a e b per cui esistono nel sistema moti che non soddisfano il principio della media. Si scrivano questi particolari moti:

$$I(t) = \ldots \qquad\qquad \varphi(t) = \ldots$$

Soluzione

Scriviamo innanzitutto le equazioni di Hamilton:

$$\dot I_1 = 5\varepsilon\sin 5\varphi_1 + 3\varphi_2 \ , \qquad \dot I_2 = 3\varepsilon\sin 5\varphi_1 + 3\varphi_2 \ , \qquad \dot\varphi_1 = aI_1 \ , \qquad \dot\varphi_2 = bI_1 \ .$$

Con evidenza la combinazione lineare $3I_1 - 5I_2$ è costante, e dunque le rette

$$3I_1 - 5I_2 = c \ , \qquad c \in \mathbb{R}$$

sono invarianti.

Ci si aspetta che possano esservi difficoltà con il principio della media quando la combinazione di angoli $5\varphi_1 + 3\varphi_2$, che entra nelle equazioni del moto, è lenta, $5\dot\varphi_1 + 3\dot\varphi_2 = 0$, ovvero sulla retta

$$5aI_1 + 3bI_2 = 0 \ .$$

Il principio in effetti è violato quando la retta lenta è una delle rette invarianti, ovvero quando $(5a, 3b) \parallel (3, -5)$. La condizione di parallelismo dà

$$25a + 9b = 0 \ , \qquad b/a = -25/9 \ ; \tag{$*$}$$

compaiono, si osservi, i quadrati dei coefficienti della combinazione lineare di angoli e *i coefficienti a e b hanno obbligatoriamente segno opposto.* Se la $(*)$ è soddisfatta, e il dato iniziale è tale che

$$3I_1^o - 5I_2^o = 0 \ ,$$

allora per ogni t si ha

$$5\dot\varphi_1(t) + 3\dot\varphi_2(t) = 5\dot\varphi_1^o + 3\dot\varphi_2^o \ , \tag{$**$}$$

e l'integrazione delle equazioni differenziali per le azioni diventa banale:

$$I_1(t) = I_1^o + 5\varepsilon t\sin 5\varphi_1 + 3\varphi_2 \ , \qquad I_2(t) = I_2^o + 3\varepsilon t\sin 5\varphi_1 + 3\varphi_2 \ ;$$

il principio della media è palesemente violato. La soluzione si completa subito sugli angoli:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_1^o + atI_1^o + \frac{5}{2}\varepsilon at^2\sin 2\varphi_1 + 3\varphi_2 \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^o + btI_2^o + \frac{3}{2}\varepsilon bt^2\sin 2\varphi_1 + 3\varphi_2 \ . \end{aligned}$$

Come controprova (non necessaria però), si può verificare che la $(**)$ è effettivamente soddisfatta a ogni t, o meglio ancora che le soluzioni trovate per I e φ soddisfano effettivamente le equazioni di Hamilton.

Esercizio 7 *Si consideri l'hamiltoniana*

$$H_\varepsilon(I_1,I_2,I_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2-\varphi_3)] \ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(-1,1,3)$, $\Omega \neq 0$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1,1,1)$, $\Omega \neq 0$.

Soluzione

Denotando come sempre $H_\varepsilon = h + \varepsilon f$, si trova subito per f la forma di polinomio di Fourier

$$f(I,\varphi) = \frac{1}{2} I_1 I_2 [1 + \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) + \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)] \ .$$

In f compaiono pertanto la media e le armoniche di Fourier $\pm k^1,\ldots,\pm k^3$ con

$$k^1 = (2,-2,0) \ , \qquad k^2 = (1,2,-1) \ , \qquad k^3 = (1,-2,1) \ .$$

(a) La forma normale non risonante si può scrivere se le corrispondenti combinazioni lineari delle ω non si annullano, ovvero se

$$\omega_1 - \omega_2 \neq 0 \ , \qquad \omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 \neq 0 \ , \qquad \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 \neq 0 \ .$$

Tale forma normale è

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = h(\tilde I) + \frac{1}{2}\varepsilon \tilde I_1 \tilde I_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

(b) Per $\omega = \Omega(-1,1,3)$ si ha $k^3\cdot\omega = 0$. In questo caso l'ultima armonica di f non si elimina e la forma normale risonante che si può costruire è

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = h(\tilde I) + \frac{1}{2}\varepsilon \tilde I_1 \tilde I_2 [1 + \sin(\tilde\varphi_1 - 2\tilde\varphi_2 + \tilde\varphi_3)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Se trascuriamo i termini $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, vediamo che le azioni evolvono tutte individualmente con velocità di ordine ε, ma in una direzione ben precisa, precisamente la direzione parallela a k^3. Si conservano pertanto tutte le combinazioni lineari delle azioni $\alpha\cdot\tilde I$ con $k^3\cdot\alpha = 0$. Se ne trovano due di indipendenti: ad esempio $\alpha = \omega$ e $\alpha = (2,1,0)$; le corrispondenti quantità quasi conservate sono $h(\tilde I)$ e $2\tilde I_1 + \tilde I_2$. Data la vicinanza delle I alle $\tilde I$, si conclude che si conservano altrettanto bene (per tempi molto minori di $1/\varepsilon^2$, si intende) $h(I)$ e $2I_1 + I_2$.

(c) Si ha una risonanza doppia se risulta contemporaneamente $k\cdot\omega = 0$ con due dei tre k^j presenti in f. Vi sono dunque tre casi:

$$\begin{array}{rcl}
\omega_1 - \omega_2 = 0 \ , \quad \omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = 0 & \Rightarrow & \omega = \Omega(1,1,3) \\
\omega_1 - \omega_2 = 0 \ , \quad \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 = 0 & \Rightarrow & \omega = \Omega(1,1,1) \\
\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = 0 \ , \quad \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 = 0 & \Rightarrow & \omega = \Omega(0,1,2) \ .
\end{array}$$

Per $\omega = \Omega(1,1,1)$ si elimina la sola armonica k^2 e la forma normale risonante è

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = h(\tilde I) + \frac{1}{2}\varepsilon \tilde I_1 \tilde I_2 [1 + \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) + \sin(\tilde\varphi_1 - 2\tilde\varphi_2 + \tilde\varphi_3)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Esercizio 8 *Si consideri l'hamiltoniana a 4 gradi di libertà*

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = \omega \cdot I + 2\varepsilon[I_1 I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\varphi_3 + I_1 I_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + I_2 I_4 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_4)] \ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ si può costruire, al primo ordine in ε, la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1,2,1,1)$, $\Omega \neq 0$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scelga a piacere una ω con una risonanza doppia, si scriva la corrispondente forma normale risonante, e si spieghi quali quantità approssivamente si conservano per H_ε.

d) Per quali ω il sistema ha una risonanza tripla?

Soluzione

Denotando come sempre $H_\varepsilon = h + \varepsilon f$, si trova subito per f la forma di polinomio di Fourier

$$f(I,\varphi) = I_2 I_4 + (I_1 I_2 + I_1 I_3)\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + I_1 I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) - I_2 I_4 \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_4) \ .$$

In f compaiono pertanto la media e le componenti di Fourier $\pm k^1, \ldots, \pm k^3$ con

$$k^1 = (1,-1,1,0) \ , \qquad k^2 = (1,-1,-1,0) \ , \qquad k^3 = (0,2,0,-2) \ .$$

(a) La forma normale non risonante si può scrivere se le corrispondenti combinazioni lineari delle ω non si annullano, ovvero se

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 \neq 0 \ , \qquad \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \neq 0 \ , \qquad \omega_2 - \omega_4 \neq 0 \ .$$

Tale forma normale è

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = h(\tilde I) + \varepsilon \tilde I_2 \tilde I_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

(b) Per $\omega = \Omega(1,2,1,1)$ si ha $k^1 \cdot \omega = 0$. In questo caso la componente k^1 non si elimina e la forma normale risonante che si può costruire è

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = h(\tilde I) + \varepsilon[\tilde I_2 \tilde I_4 + (I_1 I_2 + I_1 I_3)\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Se trascuriamo i termini $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, vediamo che le azioni evolvono individualmente con velocità di ordine ε, ma in una direzione ben precisa, precisamente la direzione parallela a k^1. Si conservano pertanto le combinazioni lineari delle azioni

$$J_\alpha = \alpha \cdot \tilde I \qquad \text{con} \qquad k^1 \cdot \alpha = 0 \ .$$

Se ne trovano tre di indipendenti: ad esempio

$$\begin{aligned} \alpha &= (1,1,0,0) \ , & J_\alpha &= \tilde I_1 + \tilde I_2 \\ &= (0,1,1,0) \ , & &= \tilde I_2 + \tilde I_3 \\ &= (0,0,0,1) \ , & &= \tilde I_4 \ . \end{aligned}$$

Dal momento che le I e le $\tilde{I}$ sono ε–vicine, si conservano anche le corrispondenti combinazioni lineari delle I. Una scelta possibile sarebbe stata anche $\alpha = \omega$: come è ovvio, dal momento che il presupposto della costruzione risonante è proprio $k^1 \cdot \omega = 0$. La corrispondente quantità conservata è $h(\tilde{I})$, ovvero anche $h(I)$.

(c) Si ha una risonanza doppia se risulta contemporaneamente $k \cdot \omega = 0$ con due dei tre k^j presenti in f. Vi sono dunque tre casi:

$$\begin{array}{llcllll} 1+2: & \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = 0 & \text{e} & \omega_2 - \omega_3 = 0\ , & \text{ovvero} & \omega = (\omega_1, \omega_1, 0, \omega_4) \\ 1+3: & \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = 0 & \text{e} & \omega_2 - \omega_4 = 0\ , & \text{ovvero} & \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_2 - \omega_1, \omega_2) \\ 2+3: & \omega_2 - \omega_3 = 0 & \text{e} & \omega_2 - \omega_4 = 0\ , & \text{ovvero} & \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_2)\ . \end{array}$$

Per ciascuna risonanza doppia si conservano $4 - 2 = 2$ combinazioni lineari indipendenti $J_\alpha = \alpha \cdot \tilde{I}$ delle azioni, con α perpendicolare ai due k^j che determinano la risonanza.

Una ω che risuona con k^1 e k^2 è $\omega = \Omega(1, 1, 0, \sqrt{2})$; scelte indipendenti di α sono corrispondentemente, ad esempio,

$$\begin{aligned} \alpha &= (1, 1, 0, 0)\ , \qquad & J_\alpha &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \\ &= (0, 0, 0, 1)\ , & &= \tilde{I}_4\ , \end{aligned}$$

e naturalmente anche le corrispondenti combinazioni lineari delle I. Si sarebbe anche potuto prendere $\alpha = \omega$, che è *sempre* una scelta possibile.

(d) Si ha una risonanza tripla se $k^j \cdot \omega = 0$ per $j = 1, 2, 3$. La scelta si restringe a $\omega = \Omega(1, 1, 0, 1)$, $\Omega \neq 0$.

Esercizio 9 *Si consideri l'hamiltoniana*

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\sin 2\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)]\ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_2 = 2\omega_1$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si sviluppino i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza in particolare i termini contenenti nuove armoniche.)

Soluzione

Denotiamo $h(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$, $f(I, \varphi) = 2[\sin 2\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)]$. Elementari formule trigonometriche danno a f la forma di polinomio di Fourier:

$$f(I, \varphi) = I_1^2 + \sin(2\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + I_1^2 \cos(4\varphi_1 - 2\varphi_2)\ .$$

Sono dunque presenti le armoniche k^0, $\pm k^1$, $\pm k^2$, $\pm k^3 \in \mathbb{Z}^2$, con

$$k^0 = (0,0) \ , \qquad k^1 = (2,1) \ , \qquad k^2 = (2,-1) \ , \qquad k^3 = (4,-2) \ ;$$

si osservi però che $k^3 \parallel k^2$, pertanto le risonanze indipendenti sono due.

(a) La forma normale risonante si costruisce in assenza di risonanze con k^1, k^2, k^3, dunque per

$$2\omega_1 + \omega_2 \neq 0 \ , \qquad 2\omega_1 - \omega_2 \neq 0 \ ,$$

ed è

$$\tilde{H}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon I_1^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

(b) Per $\omega_2 = 2\omega_1$ si ha $k^2 \cdot \omega = 0$ e anche $k^3 \cdot \omega = 0$. Le corrispondenti armoniche sopravvivono nella forma normale risonante che dunque è

$$\tilde{H}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon[\tilde{I}_1^2 + \sin(2\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) + I_1^2 \cos(4\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Questa forma normale ci dice che benché individualmente $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ evolvano con velocità ε, una loro particolare combinazione lineare, precisamente $\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2$ (proporzionale a $h(\tilde{I})$) evolve solo con velocità ε^2, e dunque entro $t \sim 1/\varepsilon$ oscilla al più di ε. Tenendo conto che le nuove e le vecchie azioni sono ε–vicine tra loro, se ne deduce che anche $I_1 + 2I_2$ oscilla al più di ε sulla scala di tempo $1/\varepsilon$ e evolve significativamente solo su tempi di ordine $1/\varepsilon^2$.

(c) L'hamiltoniana χ che realizza la trasformazione canonica contiene un'armonica di Fourier per ogni armonica presente in f, tolta la media; precisamente per ogni coseno in f c'è un seno in χ e viceversa. Si può così scrivere

$$\chi = A\cos(2\varphi_1 + \varphi_2) + B\cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + C\sin(4\varphi_1 - 2\varphi_2) \ ,$$

e determinare A, B, C in modo che risulti $\omega \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = f - f_0$, ove $f_0 = I_1^2$ denota la media di f. Il risultato è

$$\chi(I, \varphi) = -\frac{\cos(2\varphi_1 + \varphi_2)}{2\omega_1 + \omega_2} - \frac{\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{I_1^2 \sin(4\varphi_1 - 2\varphi_2)}{4\omega_1 - 2\omega_2} \ .$$

A denominatore compaiono, come deve essere, i "piccoli divisori" $k^i \cdot \omega$.

(d) La teoria insegna che il termine di ordine ε^2 della nuova perturbazione è $f_2 = \frac{1}{2}\{f + f_0, \chi\}$. Scriviamo

$$f + f_0 = 2f_0 + \alpha + \beta + \gamma \ , \qquad \chi = a + b + c \ ,$$

ove α, β, γ e a, b, c denotano i termini di f e rispettivamente χ nell'ordine in cui appaiono sopra. Denotando $\delta = 2f_0$ risulta allora

$$f_2 = \{\alpha, a\} + \ \cdots \ + \{\delta, c\} \ .$$

Sono 12 termini, che con pazienza si trovano uno per uno; sulla destra di ciascun termine sono messe in evidenza le armoniche di Fourier.

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha, a\} = 0 \\
&\{\alpha, b\} = 0 \\
&\{\alpha, c\} = \frac{2I_1}{2\omega_1 - \omega_2}\cos(2\varphi_1 + \varphi_2)\sin(4\varphi_1 - 2\varphi_2) && (6,-1),\ (2,-3) \\
&\{\beta, a\} = 0 \\
&\{\beta, b\} = 0 \\
&\{\beta, c\} = \frac{2I_1}{2\omega_1 - \omega_2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)\sin(4\varphi_1 - 2\varphi_2) && (6,-3),\ (2,-1) \\
&\{\gamma, a\} = -\frac{4I_1}{2\omega_1 + \omega_2}\sin(2\varphi_1 + \varphi_2)\cos(4\varphi_1 - 2\varphi_2) && (6,-1),\ (2,-3) \\
&\{\gamma, b\} = -\frac{4I_1}{2\omega_1 - \omega_2}\sin(2\varphi_1 - \varphi_2)\cos(4\varphi_1 - 2\varphi_2) && (6,-3),\ (2,-1) \\
&\{\gamma, c\} = -\frac{4I_1^3}{2\omega_1 - \omega_2} \\
&\{\delta, a\} = -\frac{8I_1}{2\omega_1 + \omega_2}\sin(2\varphi_1 + \varphi_2) && (2,1) \\
&\{\delta, b\} = -\frac{8I_1}{2\omega_1 - \omega_2}\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) && (2,-1) \\
&\{\delta, c\} = -\frac{8I_1^3}{2\omega_1 - \omega_2}\cos(4\varphi_1 - 2\varphi_2) && (4,-2)
\end{aligned}
$$

Le nuove armoniche sono così

$$
k = (6,-1)\,,\ (2,-3)\,,\ (6,-3)\,,\ (2,-1)\ ,
$$

combinazioni delle precedenti.