Prova scritta di Meccanica Analitica

9 gennaio 2004

1. Si enuncino (senza dimostrazioni) le principali condizioni necessarie e sufficienti per la canonicità stretta di un cambiamento di variabili.

   Per quali scelte di c, α, β, γ la trasformazione

   $$p = c\tilde{p}^{\alpha}\, e^{\gamma\tilde{q}} \ , \qquad q = c\tilde{p}^{\beta}\, e^{-\gamma\tilde{q}}$$

   è strettamente canonica? (Motivare la risposta.)

2. Si consideri l'hamiltoniana

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

   Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è soddisfatto il principio della media? (Motivare la risposta)

3. Si consideri l'hamiltoniana

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_2 \sin^2 \varphi_2] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 - 2\omega_2 = 0$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, eseguendo i calcoli nei limiti del tempo a disposizione.)

Prova scritta di Meccanica Analitica

21 luglio 2004

1. Per quali scelte di a, b, α, β la trasformazione

$$p = aI^\alpha \cos^\beta \varphi \ , \qquad q = bI^\alpha \sin^\beta \varphi \ ,$$

è strettamente canonica?

2. Si illustri brevemente il principio della media. Considerata poi l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \ ,$$

si dica per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ il principio è soddisfatto.

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + I_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, eseguendo i calcoli nei limiti del tempo a disposizione; si mettano in evidenza, se il tempo lo consente, le nuove armoniche).

Prova scritta di Meccanica Analitica

15 dicembre 2004

1. Per quali scelte di c, α, β, γ la trasformazione

$$p = c\,\tilde{p}^{\alpha}\, e^{-\beta\tilde{q}} \ , \qquad q = c\,\tilde{p}^{\gamma}\, e^{\beta\tilde{q}}$$

   è strettamente canonica?

2. Il principio della media:

   a) breve illustrazione, esempi elementari;

   b) si verifichi che l'hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \varepsilon \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

   non soddisfa il principio della media.

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + I_1 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (E' sufficiente impostare il risultato; se il tempo lo consente si eseguano i calcoli e si mettano in evidenza le nuove armoniche).

Prova scritta di Meccanica Analitica

12 gennaio 2005

1. Si dia la definizione di trasformazione strettamente canonica e si enuncino, *senza dimostrazioni,* le principali condizioni che assicurano la canonicità stretta di una trasformazione (indipendente dal tempo).

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ .$$

   Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è soddisfatto il principio della media? (Motivare la risposta.)

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + I_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale? E nel caso risonante?

   d) Nel caso non risonante, qual è all'ordine ε^2 la nuova perturbazione? E nel caso risonante? (E' sufficiente impostare la soluzione, senza eseguire in dettaglio i calcoli).

Prova scritta di Meccanica Analitica

7 settembre 2005

1. Si dia la definizione di trasformazione strettamente canonica e di trasformazione canonica. Si dica brevemente cosa sono le funzioni generatrici e si determini la funzione generatrice della trasformazione
$$p = \sqrt{2\omega I}\cos\varphi\ , \qquad q = \sqrt{2I/\omega}\sin\varphi\ .$$

2. Si verifichi che l'hamiltoniana
$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
non soddisfa il principio della media.

3. Si consideri l'hamiltoniana
$$\begin{aligned} H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = {}& \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ & + \varepsilon I_1^2[\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)]\ . \end{aligned}$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, 1, 1)$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni?

Prova scritta di Meccanica Analitica

24 settembre 2005

1. Si illustri brevemente il metodo di Lie per la generazione di trasformazioni canoniche prossime all'identità e si dica come si trasforma la funzione $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2)$ se la hamiltoniana generatrice della trasformazione è $\chi = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

   e si dica per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è soddisfatto il principio della media.

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ &\quad + \varepsilon I_1^2 [\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos^2(\varphi_1 - \varphi_3) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \ . \end{aligned}$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, 1, 1)$; che cosa ci insegna questa forma normale sul comportamento delle azioni?

Prova scritta di Meccanica Analitica

25 luglio 2006

1. Si enuncino (senza dimostrazioni) le principali condizioni necessarie e sufficienti per la canonicità stretta di un cambiamento di variabili. Per quali valori delle costanti α_i, β_i, la dilatazione

$$p_i = \alpha_i \tilde{p}_i \ , \qquad q_i = \beta_i \tilde{q}_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

è strettamente canonica? Per quali è canonica? E in questo caso, come si trasforma una generica $H(p, q)$?

2. Si consideri l'hamiltoniana integrabile $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - 4I_2^2)$. Dove si ha, nel piano $I_1 I_2$, una risonanza con $k = (2, 1)$? E con $k = (4, 1)$?

   Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) - \varepsilon \sin(2\varphi_1 + \varphi_2) \ .$$

   Si mettano in evidenza dei moti che *non* soddisfano il principio della media (si scrivano esplicitamente tali moti).

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon I_1 I_2 [\cos^2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, \sqrt{2}, 1)$, $\Omega \neq 0$. Che cosa ci insegna questa forma normale risonante sul comportamento delle azioni?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scriva la forma normale risonante per queste ω. Che cosa ci insegna questa forma normale sul comportamento delle azioni?

Prova scritta di Meccanica Analitica

7 settembre 2007

1. Si dia la definizione di trasformazione strettamente canonica. Si dica brevemente cosa sono le funzioni generatrici e si determini la funzione generatrice $S(p,\varphi)$ della trasformazione

$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega q}{p} \ .$$

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon[\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)] \ .$$

Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ è soddisfatto il principio della media?

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ &\quad + \varepsilon I_1^2[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)] \ . \end{aligned}$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, 1, \sqrt{2})$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia?

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

25 giugno 2008

Esercizi:

1. Si consideri l'hamiltoniana integrabile $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - 9I_2^2)$. Dove si ha, nel piano $I_1 I_2$, una risonanza con $k = (3, 1)$? E con $k = (-4, 1)$?

   Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) + \varepsilon \cos(3\varphi_1 + \varphi_2) \ .$$

   Per quali dati iniziali si trovano moti risonanti, che *non* soddisfano il principio della media? Si scrivano questi particolari moti.

2. Si consideri l'hamiltoniana

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon I_1 I_2 [1 + 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, 1, \sqrt{2})$, $\Omega \neq 0$. Che cosa ci insegna questa forma normale risonante sul comportamento delle azioni?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia? Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(2, 1, 1)$, $\Omega \neq 0$. Che cosa ci insegna questa forma normale risonante sul comportamento delle azioni?

Teoria:

3. Trasformazioni canoniche e 1–forma di Liouville (con dimostrazione); applicazione: il completamento canonico delle trasformazioni puntuali $q = v(\tilde{q})$.

4. Nozione di sistema integrabile; il corpo rigido di Eulero come sistema hamiltoniano integrabile.

5. Nozione di invariante adiabatico ed esempi (senza dimostrazioni).

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

18 luglio 2008

1. Nozione di trasformazione canonica e strettamente canonica; canonicità stretta e simpletticità delle matrice jacobiana della trasformazione (con dimostrazione).

   Esercizio: per quali scelte di c, α, β, γ la trasformazione

   $$p = cI^\gamma \cos^\alpha \varphi \ , \qquad q = cI^\gamma \sin^\beta \varphi$$

   è strettamente canonica?

2. Nozione di sistema integrabile; il corpo rigido di Eulero come sistema integrabile (costanti del moto, la descrizione di Poinsot, le variabili di Andoyer–Deprit...)

3. Il principio della media; un esempio e un controesempio significativi.

4. Esercizio: Si consideri l'hamiltoniana

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + I_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione; si mettano in evidenza, se il tempo lo consente, le nuove armoniche).

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

24 settembre 2008

Esercizi

1. Si verifichi che la trasformazione

$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega q}{p}$$

è strettamente canonica:
   a) verificando che la matrice jacobiana della trasformazione è simplettica;
   b) facendo riferimento alle parentesi di Poisson;
   c) mostrando che la 1–forma di Liouville è preservata a meno del differenziale di una opportuna funzione $f(p,q)$.

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon I_1 [2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.
   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?
   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?
   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (E' sufficiente impostare il risultato. Facoltativamente, se il tempo lo consente, si sviluppino i calcoli, mettendo in evidenza la presenza nuove armoniche).

Teoria

3. Il principio della media: illustrazione generale; un esempio e un controesempio significativi.

4. La costruzione delle variabili di azione–angolo per il pendolo.

5. Una (sola), a scelta, tra le seguenti domande:
   a) la conservazione del volume nello spazio delle fasi;
   b) il flusso hamiltoniano come trasformazione canonica;
   c) trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo.

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

10 gennaio 2009

Esercizi:

1. Per quali scelte di c, α, β, γ la trasformazione

$$p = cI^\gamma \sin^\alpha \varphi \ , \qquad q = I^\gamma \cos^\beta \varphi$$

è strettamente canonica?

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos(3\varphi_1 - 2\varphi_2)] \ .$$

Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è soddisfatto il principio della media?

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + I_1 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione; si mettano in evidenza, se il tempo lo consente, le nuove armoniche).

Teoria:

4. Si enunci e si dimostri la proposizione in cui la canonicità stretta di una trasformazione di variabili è connessa a una rilevante proprietà della matrice jacobiana dalla trasformazione.

5. Le variabili di azione–angolo per il pendolo.

6. Nozione di invariante adiabatico ed esempi (senza dimostrazioni).

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

30 giugno 2009

Esercizi:

1. Per quali valori di α, β, γ e c la trasformazione
$$p = I^\alpha \sin^\gamma \varphi \ , \qquad q = c\, I^\beta \cos^\gamma \varphi \ ,$$
è strettamente canonica? Per quali è canonica?

2. Si consideri l'hamiltoniana
$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione; si mettano in evidenza, se il tempo lo consente, le nuove armoniche).

Teoria:

3. Trasformazioni canoniche e 1–forma di Liouville (con dimostrazione); applicazione: il completamento canonico delle trasformazioni puntuali $q = v(\tilde{q})$.

4. Si illustri il principio della media e con riferimento ad esso si spieghi la differenza tra i sistemi hamiltoniani
$$H_\varepsilon^+(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
e
$$H_\varepsilon^-(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

5. Nozione di invariante adiabatico. Esempio (senza dimostrazione) dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) la conservazione del volume nello spazio delle fasi;

   b) il flusso hamiltoniano come trasformazione canonica;

   c) trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo.

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

17 luglio 2009

Esercizi:

1. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega q}{p} \ .$$

   a) Si dimostri che è strettamente canonica, usando una a scelta delle condizioni n. e s.

   b) Se ne determini una funzione generatrice $S(p, \varphi)$.

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon[\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] \ .$$

   Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è soddisfatto il principio della media, e per quali invece non è soddisfatto? (Entrambe le situazioni vanno motivate.)

3. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[I_1^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato, sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione; si mettano in evidenza, se il tempo lo consente, le nuove armoniche).

Teoria:

4. Si illustri la differenza tra trasformazioni strettamente canoniche e trasformazioni soltanto canoniche.

5. Nozione di sistema integrabile; il corpo rigido di Eulero come sistema hamiltoniano integrabile.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) il flusso hamiltoniano come trasformazione canonica;

   b) l'equazione di Hamilton–Jacobi;

   c) enunciato commentato del teorema KAM.

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

15 settembre 2009

Esercizi:

1. Si consideri la trasformazione puntuale

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\sin\theta \ ,$$

e la si estenda canonicamente ai momenti (si denotino con p_x, p_y, p_r, p_θ i momenti coniugati rispettivamente a x, y, r, θ).

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[I_1^2\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\varphi_1\cos\varphi_2] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = \omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza in particolare le nuove armoniche.)

Teoria:

3. Il flusso Hamiltoniano come trasformazione canonica (con dimostrazione); applicazione: il metodo di Lie.

4. Nozione di sistema integrabile; esempio: il corpo rigido di Eulero–Poinsot e (nel caso simmetrico) le sue variabili di azione–angolo.

5. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo;

   b) l'equazione di Hamilton–Jacobi;

   c) enunciato commentato del teorema KAM.

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

14 giugno 2010

Esercizi:

1. Per quali valori delle costanti c, α, β, γ e δ la trasformazione

$$p = c\,\tilde{p}^{\alpha}\, e^{-\beta\tilde{q}}\ , \qquad q = c\,\tilde{p}^{\gamma}\, e^{\delta\tilde{q}}$$

è strettamente canonica?

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\sin 2\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)]\ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_2 = 2\omega_1$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si sviluppino i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza in particolare i termini contenenti nuove armoniche.)

Teoria:

3. Il flusso Hamiltoniano come trasformazione canonica (con dimostrazione); il metodo di Lie.

4. Si illustri il principio della media e con riferimento ad esso si spieghi la differenza tra i sistemi hamiltoniani

$$H_\varepsilon^+(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) - \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

e

$$H_\varepsilon^-(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) - \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ .$$

5. Nozione di invariante adiabatico. Esempio (senza dimostrazione) dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

a) funzioni generatrici di trasformazioni canoniche;

b) enunciato commentato del teorema KAM;

c) [per i fisici] il corpo rigido simmetrico: proprietà principali, la descrizione di Poinsot;

[per i matematici] il passaggio dalle equazioni di Lagrange alle equazioni di Hamilton

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

1 luglio 2010

Esercizi:

1. Si consideri l'hamiltoniana integrabile $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - 9I_2^2)$. Dove si ha, nel piano $I_1 I_2$, una risonanza con $k = (3, 2)$? E con $k = (-3, 1)$?

   Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

   $$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) + \varepsilon \cos(3\varphi_1 + 2\varphi_2) \ .$$

   Per quali dati iniziali si trovano moti risonanti, che *non* soddisfano il principio della media? Si scrivano questi particolari moti.

2. Si consideri l'hamiltoniana

   $$\begin{aligned} H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ &\quad + \varepsilon I_1^2 [\sin\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \ . \end{aligned}$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, \sqrt{2}, 1)$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia?

Teoria:

3. Trasformazioni canoniche e 1–forma di Liouville (con dimostrazione); applicazione: il completamento canonico delle trasformazioni puntuali $q = v(\tilde{q})$.

4. Nozione di sistema integrabile; le variabili di azione–angolo per il pendolo.

5. Un passo perturbativo per sistemi isocroni perturbati.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo;

   b) enunciato commentato del teorema di Nekhoroshev;

   c) [per i fisici] il corpo rigido simmetrico: proprietà principali, la descrizione di Poinsot;

      [per i matematici] il passaggio dalle equazioni di Lagrange alle equazioni di Hamilton.

Prova scritta + orale di Meccanica Analitica

22 luglio 2010

Esercizi:

1. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos(\varphi_2 - 2\varphi_3)] \ .$$

Per quali valori di $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ è soddisfatto il principio della media, e per quali invece non è soddisfatto? (Entrambe le situazioni vanno motivate.)

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\sin\varphi_1 \cos 3\varphi_2 + I_1^2 \sin^2(\varphi_1 - 3\varphi_2)] \ .$$

a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = 3\omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si sviluppino i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza in particolare i termini contenenti nuove armoniche.)

Teoria:

3. Si enunci e si dimostri la proposizione in cui la canonicità stretta di una trasformazione di variabili è connessa a una rilevante proprietà della matrice jacobiana dalla trasformazione.

4. Il flusso hamiltoniano come trasformazione canonica: illustrazione (senza dimostrazione); il metodo di Lie.

5. Nozione di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con traccia della dimostrazione.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

a) Le variabili di Andoyer–Deprit per il corpo rigido

b) Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo: idee generali; esempio: il passaggio a coordinate rotanti nel piano

c) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol.

Prova di Meccanica Analitica

29 giugno 2011

Esercizi:

1. Si consideri l'hamiltoniana integrabile $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(16I_1^2 - 9I_2^2)$. Dove si ha, nel piano I_1I_2, una risonanza con $k = (3, 4)$? E con $k = (-9, 16)$?

   Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) + \varepsilon \cos(3\varphi_1 + 4\varphi_2) \ .$$

   Per quali dati iniziali si trovano moti che *non* soddisfano il principio della media? Si scrivano esplicitamente questi particolari moti.

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ &\quad + 2\varepsilon I_1 I_2 I_3 [\sin(\varphi_1 - \varphi_3)\cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)] \ . \end{aligned}$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(3, 2, 2)$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia?

Teoria:

3. Trasformazioni canoniche e 1–forma di Liouville (con dimostrazione); applicazione: il completamento canonico delle trasformazioni puntuali $q = v(\tilde{q})$.

4. Un passo perturbativo per sistemi isocroni perturbati (trattazione ampia).

5. Nozione di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile (enunciato senza dimostrazione).

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) funzioni generatrici di trasformazioni canoniche;

   b) le variabili di Andoyer–Deprit per il corpo rigido;

   c) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol.

Prova di Meccanica Analitica

13 luglio 2011

Esercizi:

1. Per quali valori delle costanti c, α, β, γ e δ la trasformazione
$$p = c\,\tilde{p}^{\alpha}\, e^{-\beta\tilde{q}}\ , \qquad q = c\,\tilde{p}^{\gamma}\, e^{\delta\tilde{q}}$$
è strettamente canonica?

2. Si consideri l'hamiltoniana
$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[I_1^2 \cos^2(\varphi_1 - 2\varphi_2) + \cos\varphi_1 \sin 2\varphi_2]$$
   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.
   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?
   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?
   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si imposti il risultato sviluppando i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza in particolare qualche termine contenente nuove armoniche.)

Teoria:

3. Si enunci e si dimostri la proposizione in cui la canonicità stretta di una trasformazione di variabili è connessa a una rilevante proprietà della matrice jacobiana dalla trasformazione.

4. Si illustri il principio della media e con riferimento ad esso si spieghi la differenza tra i sistemi hamiltoniani
$$H_\varepsilon^+(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) - \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
e
$$H_\varepsilon^-(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) - \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ .$$

5. Enunciato commentato del teorema KAM.

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:
   a) Il flusso hamiltoniano come trasformazione canonica.
   b) Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo: idee generali, il passaggio a coordinate rotanti nel piano.
   c) (per i fisici) Il corpo rigido di Eulero: le equazioni di Eulero, con analisi qualitativa delle soluzioni; la descrizione di Poinsot.

      (per i matematici) Enunciato dei primi due punti del teorema di Liouville–Arnol'd; dimostrazione per sommi capi.

Prova di Meccanica Analitica

17 settembre 2013

Esercizi:

1. Si verifichi che esistono costanti a, b tali che la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{p}_1 + \tilde{q}_1 \\ q_1 &= a\tilde{q}_1 + f(\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{q}_2) \\ p_2 &= \tilde{p}_2 + \tilde{q}_2 \\ q_2 &= \tilde{p}_2 + b\tilde{q}_2 + f(\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{q}_2) \end{aligned}$$

sia strettamente canonica per ogni scelta della funzione (regolare) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

2. Si consideri l'hamiltoniana integrabile $h(I_1, I_2) = \frac{1}{2}(16I_1^2 - 4I_2^2)$. Dove si ha, nel piano $I_1 I_2$, una risonanza con $k = (1, 2)$? E con $k = (-1, 4)$?

Si consideri poi l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(I_1, I_2) + \varepsilon \cos(3\varphi_1 + 6\varphi_2) \ .$$

Per quali dati iniziali si trovano moti risonanti che *non* soddisfano il principio della media? Si scrivano questi particolari moti: $I(t) = \ \dots \ , \ \varphi(t) = \ \dots$

Teoria:

3. Si enunci e si dimostri la proposizione in cui la canonicità stretta di una trasformazione di variabili è connessa a una rilevante proprietà della matrice jacobiana dalla trasformazione.
4. Nozione di sistema integrabile; enunciato del teorema di Liouville–Arnol'd.
5. Un passo perturbativo per sistemi isocroni perturbati (esposizione più completa possibile; la domanda è più pesante delle altre).
6. Una (sola), a scelta, tra le seguenti domande:
   a) funzioni generatrici di trasformazioni canoniche;
   b) il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol;
   c) nozione di invariante adiabatico; i due esempi svolti (senza dimostrazioni).

Prova di Meccanica Analitica

16 settembre 2014

1. Si consideri l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(cI_1^2 - I_2^2) + \varepsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) \ , \qquad c > 0 \ .$$

   a) Si determini, tra le combinazioni lineari delle azioni I_1 e I_2, una costante del moto.

   b) Si determini un valore di c per cui esistono nel sistema moti che *non* soddisfano il principio della media. Si scrivano questi particolari moti:

$$I(t) = \ \dots \qquad\qquad \varphi(t) = \ \dots$$

   (si raccomanda di motivare bene la risposta).

2. Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo: idee generali; esempio del passaggio a coordinate rotanti.

3. Il corpo rigido di Eulero come sistema integrabile (le costanti del moto, la descrizione di Poinsot, le variabili di Andoyer–Deprit...)

4. Un passo perturbativo per i sistemi isocroni perturbati (la costruzione non risonante, la costruzione risonante, i problemi che sorgono con perturbazione non polinomiale...).

5. Una (sola), a scelta, tra le seguenti domande:

   a) La deduzione dell'hamiltoniana del "terzo corpo", nel problema a tre corpi ristretto circolare.

   b) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol.

   c) L'equazione (ridotta) di Hamilton–Jacobi e il suo uso per dedurre le coordinate energia–tempo per il pendolo.

   d) enunciato commentato del teorema KAM; che cosa si intende per "diffusione di Arnol'd"?

Prova di Meccanica Analitica

24 febbraio 2015

1. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 \\ + 2\varepsilon I_1 I_2 I_3 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos\varphi_3 + \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(1, 1, 2)$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Che quantità approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

   c) Per quali ω il sistema ha una risonanza doppia?

2. Si consideri l'hamiltoniana dei rotatori:

$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \ , \qquad \varphi_{n+1} = \varphi_1 \ ,$$

   con $I \in B_R$ (palla di raggio R in $\mathbf{R}^n$) e $\varphi \in \mathbf{T}^n$.

   a) Si spieghi, qualitativamente, per quali R e ε il sistema si può considerare debolmente accoppiato.

   b) Si esegua un passo perturbativo in condizioni di non risonanza (con attenzione al dominio in cui il passo si può fare ed è significativo).

3. Definizione di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con traccia della dimostrazione.

4. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche; in particolare, la generazione di trasformazioni prossime all'identità.

   b) La deduzione dell'hamiltoniana del "terzo corpo", nel problema a tre corpi ristretto circolare.

   c) L'equazione di Hamilton–Jacobi e il suo uso per dedurre le coordinate energia–tempo per il pendolo.

Prova di Meccanica Analitica

14 luglio 2015

1. Si consideri l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - aI_2^2) + \varepsilon \cos(4\varphi_1 + 2\varphi_2) \ , \qquad a > 0 \ .$$

   a) Si determini, tra le combinazioni lineari delle azioni I_1 e I_2, una costante del moto.

   b) Si determini un valore di a per cui esistono nel sistema moti che *non* soddisfano il principio della media. Si scrivano questi particolari moti:

$$I(t) = \ \ldots \qquad\qquad \varphi(t) = \ \ldots$$

   (si raccomanda di motivare bene la risposta).

2. Si consideri l'hamiltoniana dei rotatori:

$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \ , \qquad \varphi_{n+1} = \varphi_1 \ ,$$

   con $I \in B_R$ (palla di raggio R in $\mathbf{R}^n$) e $\varphi \in \mathbf{T}^n$.

   a) Si spieghi per quali R e ε il sistema si può considerare debolmente accoppiato.

   b) Si esegua un passo perturbativo in condizioni di non risonanza (con attenzione al dominio in cui il passo si può fare ed è significativo).

3. Si enunci e si commenti il teorema di Liouville–Arnold, illustrandone l'applicazione al moto centrale.

4. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol.

   b) enunciato commentato del teorema KAM; che cosa si intende per "diffusione di Arnol'd"?

   c) Si continui l'esercizio 2 sui rotatori, discutendo la dinamica in condizioni di risonanza semplice o doppia (forma normale risonante; deduzioni che se ne possono trarre trascurando i termini $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, in particolare riguardo al principio della media).

Prova di Meccanica Analitica

14 giugno 2016

1. Si consideri l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - 9I_2^2) + \varepsilon \cos k \cdot \varphi \ , \qquad k \in \mathbf{Z}^2 \ .$$

   a) Per ogni fissato k si determini, tra le combinazioni lineari delle azioni I_1 e I_2, una costante del moto.

   b) Si determinino valori di k per cui esistono nel sistema moti che *non* soddisfano il principio della media. Per uno a scelta di tali valori si scrivano questi particolari moti:

$$I(t) = \ \dots \qquad\qquad \varphi(t) = \ \dots$$

   (si raccomanda di motivare bene la risposta).

2. Un passo perturbativo per sistemi isocroni perturbati.

3. Nozione (= definizione commentata) di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con traccia della dimostrazione.

4. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo: idee generali; esempio del passaggio a coordinate rotanti.

   b) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol: enunciato e dimostrazione (schematica) dell'esistenza di un ciclo limite attrattivo per $\varepsilon > 0$ piccolo.

   c) La descrizione di Poinsot e le variabili di Andoyer–Deprit per il corpo rigido simmetrico.

Prova di Meccanica Analitica

12 luglio 2016

1. Si consideri l'hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(9I_1^2 - 16I_2^2) + \varepsilon \cos k \cdot \varphi \ , \qquad k \in \mathbf{Z}^2 \ .$$

   a) Per ogni fissato k si determini, tra le combinazioni lineari delle azioni I_1 e I_2, una costante del moto.

   b) Si determinino valori di k per cui esistono nel sistema moti che *non* soddisfano il principio della media. Per uno a scelta di tali valori si scrivano esplicitamente questi particolari moti:

$$I(t) = \ \ldots \qquad\qquad \varphi(t) = \ \ldots$$

   (si raccomanda di motivare bene la risposta).

2. Si enunci e si commenti il teorema di Liouville–Arnold; si discuta l'applicabilità al moto centrale.

3. Definizione di invariante adiabatico; esempio del "gas unidimensionale"; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con dimostrazione (non è necesario riportare i dettagli dei calcoli).

4. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol: enunciato e dimostrazione (schematica) dell'esistenza di un ciclo limite attrattivo per $\varepsilon > 0$ piccolo.

   b) *Per i matematici:* la dimostrazione, schematica, dei primi due punti del teorema di Liouville–Arnol'd

   Per i fisici: il corpo rigido di Eulero: le equazioni di Eulero, la stabilità delle rotazioni proprie (caso triassiale), la descrizione di Poinsot nel caso simmetrico.

   c) Enunciato commentato del teorema di Nekhoroshev; un'analoga stima esponenziale per sistemi isocroni perturbati.

Prova di Meccanica Analitica

20 febbraio 2017

1. Si consideri la trasformazione di coordinate $(I, \varphi) = w(p, q)$ definita da
$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega q}{p} \ .$$
   a) Si verifichi che è strettamente canonica, usando una a scelta delle condizioni n. e s.

   b) Se ne determini una funzione generatrice $S(p, \varphi)$.

2. Si consideri l'hamiltoniana
$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\cos 2\varphi_1 \sin \varphi_2 + I_2^2 \sin^2(2\varphi_1 - \varphi_2)]$$
   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_2 = 2\omega_1$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si sviluppino i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza soprattutto le nuove armoniche).

3. Trasformazioni canoniche e 1–forma di Liouville (con dimostrazione); applicazione: il completamento canonico delle trasformazioni puntuali $q = v(\tilde{q})$.

4. Si illustri il principio della media e con riferimento ad esso si spieghi la differenza tra i sistemi hamiltoniani
$$H_\varepsilon^+(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
e
$$H_\varepsilon^-(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

5. Definizione di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con dimostrazione (schematica, senza riportare i dettagli dei calcoli).

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) La deduzione dell'hamiltoniana del "terzo corpo" nel problema a tre corpi ristretto circolare.

   b) Il ciclo limite per l'equazione di Van der Pol.

   c) La condizione diofantea di Siegel: espressione e proprietà rilevanti; il suo ruolo nella teoria delle perturbazioni.

   d) Si consideri la traslazione sul toro $\mathbf{T}^2$ definita da
$$\varphi_i(t) = \varphi_i^o + \omega_i t \ , \qquad i = 1, 2$$
   e si discutano le proprietà rilevanti del moto.

Prova di Meccanica Analitica

16 giugno 2017

1. Si consideri la trasformazione di coordinate
$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \ , \qquad \varphi = \arctan\frac{\omega q}{p} \ .$$
   a) Si dimostri che è strettamente canonica, usando una a scelta delle condizioni n. e s.

   b) Se ne determini una funzione generatrice $S(p, \varphi)$.

2. Si consideri l'hamiltoniana a quattro gradi di libertà
$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \omega_1 I_1 + \cdots + \omega_4 I_4 + 2\varepsilon[I_1 I_2 \cos\varphi_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + I_1 I_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_4) + I_2 I_3 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3)] \ .$$
   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_4)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante per $\omega = \Omega(-1, 2, 1, 3)$; che cosa ci dice questa forma normale sul comportamento delle azioni? Quali combinazioni lineari delle azioni approssimativamente si conservano, con questa ω, per il sistema di hamiltoniana H_ε?

   c) Si determini una ω per la quale il sistema ha una risonanza doppia e una per la quale ha una risonanza tripla.

3. Si enunci e si dimostri la proposizione in cui la canonicità stretta di una trasformazione di variabili è connessa a una rilevante proprietà della matrice jacobiana dalla trasformazione.

4. Si enunci il teorema di Liouville–Arnold; se ne discuta l'applicabilità al moto centrale piano.

5. Si consideri l'hamiltoniana dei rotatori:
$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \ , \qquad \varphi_{n+1} = \varphi_1 \ ,$$
   con $I \in B_R$ (palla di raggio R in $\mathbf{R}^n$) e $\varphi \in \mathbf{T}^n$.

   a) Si spieghi per quali R e ε il sistema si può considerare debolmente accoppiato.

   b) Si esegua un passo perturbativo in condizioni di non risonanza (con attenzione al dominio in cui il passo si puo' fare ed è significativo)).

6. Una (sola) a scelta tra le seguenti domande:

   a) La traslazione sul toro $\mathbf{T}^2$ definita da
$$\varphi_i(t) = \varphi_i^o + \omega_i t \ , \qquad i = 1, 2 \ .$$
   Si discutano le proprietà rilevanti del moto.

   b) La deduzione dell'hamiltoniana del "terzo corpo" nel problema a tre corpi ristretto circolare.

   c) il corpo rigido di Eulero: le equazioni di Eulero, la stabilità delle rotazioni proprie (caso triassiale).

   d) Si continui l'esercizio 3 sui rotatori, discutendo la dinamica in condizioni di risonanza semplice o doppia.

Prova di Meccanica Analitica

13 settembre 2017

1. Per quali valori di α, β, γ, c la trasformazione

$$p = c\, I^{\alpha} \cos^{\gamma} \varphi \ , \qquad q = I^{\beta} \sin^{\gamma} \varphi$$

è strettamente canonica?

2. Si consideri l'hamiltoniana

$$H_{\varepsilon}(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[I_1^2 \cos^2(\varphi_1 - 5\varphi_2) + \sin\varphi_1 \cos 5\varphi_2] \ .$$

   a) Per quali $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ si può costruire (al primo ordine in ε) la forma normale non risonante? Si scriva tale forma normale.

   b) Si scriva la forma normale risonante (al primo ordine in ε) nel caso $\omega_1 = 5\omega_2$. Che cosa ci dice sul comportamento delle azioni questa forma normale?

   c) Nel caso non risonante, qual è la funzione χ che realizza la trasformazione canonica che porta la nuova hamiltoniana in forma normale?

   d) Qual è, all'ordine ε^2, la nuova perturbazione? (Si sviluppino i calcoli nei limiti del tempo a disposizione, mettendo in evidenza soprattutto le nuove armoniche).

3. Trasformazioni canoniche e parentesi di Poisson.

4. Nozione di sistema integrabile; il corpo rigido di Eulero come sistema integrabile (costanti del moto, la descrizione di Poinsot, le variabili di Andoyer–Deprit...)

5. Definizione di invariante adiabatico; esempio dell'oscillatore armonico con ω lentamente variabile, con dimostrazione (non è necesario riportare i dettagli dei calcoli).

6. Una (sola), a scelta, tra le seguenti domande:

   a) Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche.

   b) La traslazione sul toro $\mathbf{T}^2$ definita da

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^o + \omega_i t \ , \qquad i = 1, 2 \ .$$

   Si discutano le proprietà rilevanti del moto.

   c) La condizione diofantea di Siegel: espressione e proprietà rilevanti; il suo ruolo nella teoria delle perturbazioni.