Introduzione alla serie di Fourier

ad uso del corso di Meccanica Analitica
a.a. 2008–2009

A. Funzioni di un solo angolo.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π, $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$; supporremo per semplicità, benché non sia affatto necessario, che f sia almeno differenziabile.[1] Le funzioni periodiche regolari più semplici sono le funzioni trigonometriche elementari

$$\cos k\varphi \ , \qquad \sin k\varphi \ , \qquad k \in \mathbb{N} \ ,$$

o equivalentemente gli esponenziali complessi

$$e^{ik\varphi} = \cos k\varphi + i \sin k\varphi \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

L'idea di Fourier[2] è che ogni f periodica si possa ben approssimare con somme di funzioni trigonometriche elementari di questo tipo, ovvero che si possano scrivere per f sviluppi in serie, sperabilmente convergenti, del tipo

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{0.1}$$

o equivalentemente

$$f(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \, e^{ik\varphi} \ . \tag{0.2}$$

La realtà di f implica che f_{-k} sia il complesso coniugato di f_k. La relazione tra i coefficienti nei due sviluppi si vede subito essere:

$$f_0 = a_0 \ , \qquad f_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \quad \forall k > 0 \ .$$

[1] Le serie di Fourier si studiano, ben più in generale, per funzioni anche soltanto a quadrato sommabile. L'esposizione tuttavia si fa necessariamente più complicata.

[2] A inizio '800 (il lavoro conclusivo, *Théore analitique de la chaleur,* è del 1822) Fourier lavora sulla legge di propagazione del calore che porta il suo nome; il caso più semplice è la propagazione del calore attraverso una parete con un lato a temperatuta fissata e l'altro a temperatura variabile nel tempo. La serie di Fourier, si potrebbe vedere, entra in modo naturale nel problema. Questa di Fourier è la prima teoria fisica formalizzata che prescinde dalla meccanica: una piccola rivoluzione copernicana, che toglieva alla meccanica, pur reduce dai successi mozzafiato ad opera soprattutto di Lagrange e Laplace (che erano assieme a Fourier a Parigi), l'assoluta centralità. Lo spodestamento della meccanica dal suo ruolo centrale si completò nel corso dell'800 con lo sviluppo della termodinamica e soprattutto dell'elettromagnetismo di Maxwell.

Per ogni $k, l \in \mathbb{Z}$ si ha con evidenza

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}\, e^{-il\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \,=\, \delta_{kl} \ ;$$

ne consegue che se lo sviluppo (0.2) ha senso, allora deve essere

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-k\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \tag{0.3}$$

(si moltiplichi la (0.2) per $e^{-il\varphi}$ e si integri, supponendo che si possa integrare termine a termine la serie). In particolare il coefficiente f_0 definito dalla (0.3) è la media $\langle f\rangle$ di f,

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \ . \tag{0.4}$$

Allo stesso modo si vede facilmente che, se lo sviluppo (0.1) ha senso, allora deve essere

$$a_0 = \langle f\rangle \ , \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, \mathrm{d}\varphi \ , \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, \mathrm{d}\varphi \ . \tag{0.5}$$

Definizione 1 *La serie a secondo membro della (0.2), con i coefficienti f_k definiti dalla (0.3), si dice* serie di Fourier complessa *della funzione f. La serie a secondo membro della (0.1), con i coefficienti a_k e b_k definiti dalla (0.5), si dice* serie di Fourier reale *della funzione f.*

Le principali proprietà delle serie di Fourier, nel caso di f regolare che stiamo studiando, sono contenute nella proposizione seguente, che scriviamo per la sola serie di Fourier complessa (la trasposizione alla serie reale è immediata).

Proposizione 1 *Sia f di classe $\mathcal{C}^s$, $s \geq 1$. Allora*

i) La serie di Fourier (0.2) di f converge uniformemente a f;

ii) esiste $C > 0$ tale che

$$|f_k| \leq \frac{C}{|k|^{s+1}} \ . \tag{0.6}$$

Se poi f è analitica,[3] *allora*

iii) esistono $C, \varrho > 0$ tali che

$$|f_k| \leq C\, e^{-\varrho|k|} \ . \tag{0.7}$$

Le proprietà ii) e iii) sono caratteristiche: se la successione f_k soddisfa la (0.6) (la (0.7)), allora le serie converge a f di classe $\mathcal{C}^s$ (analitica).

[3] Per chi ha familiarità con la nozione di funzione olomorfa: se f reale analitica si estende in modo olomorfo alla striscia $|\mathrm{Im}\,\varphi| < \varrho$ ed è ivi limitata, allora la costante ϱ che compare nelle proposizione è proprio la larghezza della striscia in cui f è olomorfa, e corrispondentemente si può prendere come C la sup–norma di f nella striscia.

L'ipotesi di differenziabilita di f si potrebbe in realtà indebolire moltissimo (non serve neanche la continuità), ma la convergenza si fa più debole e più complicata; si veda, per i dettagli, un qualunque testo di analisi che tratti l'argomento.

Se f dipende, oltre che da φ, da una o più variabili reali x, diciamo $f = f(\varphi, x)$, banalmente si possono ripetere le considerazioni fatte sopra per ogni valore di x, scrivendo sviluppi in serie del tipo

$$f(\varphi, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x)\, e^{ik\varphi} \ , \qquad \text{con} \quad f_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi, x)\, e^{-ik\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \ , \tag{0.8}$$

e similmente per la serie reale.

B. Funzioni di più angoli.

Supponiamo che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia regolare e periodica di periodo 2π in ciascuna variabile:

$$f(\varphi_1 + 2k_1\pi, \varphi_2 + 2k_2\pi) = f(\varphi_1, \varphi_2) \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \ .$$

Per ogni fissato φ_2 si può scrivere la serie di Fourier in φ_1

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} f_{k_1}(\varphi_2)\, e^{ik_1\varphi_1} \ .$$

A sua volta ogni coefficiente f_{k_1} può essere sviluppato in serie di Fourier di φ_2; la convergenza uniforme delle serie, più forte della convergenza assoluta, consente di non curarsi dell'ordine dei termini e conduce alla *serie di Fourier doppia*

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} f_{k_1k_2}\, e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)} \ ,$$

con

$$f_{k_1,k_2} = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \varphi_2)\, e^{-i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)}\, \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \ .$$

L'estensione a n angoli, a questo punto ovvia, è oggetto della seguente proposizione:

Proposizione 2 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π in ciascuna variabile, è di classe $\mathcal{C}^s$, allora*

i) f è sviluppabile in serie di Fourier multipla, precisamente posto $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, si ha

$$f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\, e^{ik\cdot\varphi} \ ,$$

con

$$f_k = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \int_0^{2\pi}\!\!\cdots\int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-ik\cdot\varphi}\, \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_n \ ,$$

e la serie converge uniformemente;

ii) esiste $C > 0$ tale che $|f_k| \le C/|k|^{s+1}$.

Se poi f è analitica,[4] *allora*

[4] Come sopra, se f reale analitica ha estensione olomorfa nella striscia $|\mathrm{Im}\, \varphi_j| < \varrho$, $j = 1, \dots, n$, ed è ivi limitata, allora la costante ϱ nella (0.9) è proprio l'ampiezza della striscia di analiticità e corrispondentemente si può prendere come C la sup–norma di f nella striscia.

iii) *esistono* $C, \varrho > 0$ *tali che*

$$|f_k| \le C\, e^{-\varrho |k|} \ , \tag{0.9}$$

avendo posto $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$.

Si osservi che anche nel caso di n angoli f_0 è la media di f, ovvero

$$f_0 = \langle f \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \!\!\cdots \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_n \ .$$