

Giancarlo Benettin

Eserciziario
per il corso di Fisica Matematica

Settore di Ingegneria dell'Informazione

a. a. 2016–2017

Queste note, ancora non in forma definitiva, raccolgono gli esercizi più significativi relativi al corso di Fisica Matematica per studenti di Ingegneria del settore di Ingegneria dell'Informazione. In testa a ciascun problema sono segnalate le tematiche affrontate. Ringrazio gli studenti che avranno la pazienza di segnalarmi sviste ed errori, che temo siano ancora presenti in abbondanza.

G.B.

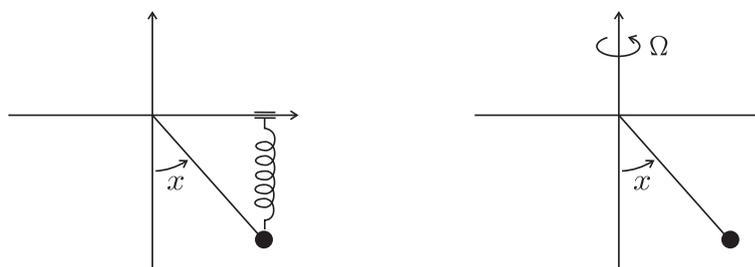
Problema 1 (*punti singolari e biforcazioni*)

Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x$$

(due possibili realizzazioni fisiche sono illustrate in figura).

1. Si determinino e si classifichino i punti singolari, tracciando anche il grafico della biforcazione e il ritratto in fase nelle diverse condizioni.
2. Si supponga poi che vi sia un termine aggiuntivo $-2\mu\dot{x}$, $\mu > 0$, a secondo membro dell'equazione, e si ridiscuta la classificazione dei punti singolari.

**Soluzione**

L'equazione si riscrive come sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = f(x), \quad f(x) = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x;$$

il potenziale corrispondente a f è

$$V(x) = -\omega^2 \cos x + \frac{1}{2}\Omega^2 \cos^2 x.$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli i punti del piano xv del tipo $(x^*, 0)$, con x^* tale che $f(x^*) = 0$. Con evidenza f si annulla per

$$\sin x = 0, \quad x^* = 0, \pi$$

e anche per

$$\cos x = \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad x^* = \pm \arccos \frac{\omega^2}{\Omega^2},$$

purché però sia soddisfatta la condizione di esistenza

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} \leq 1.$$

Si osservi che per $\Omega^2 = \omega^2$ si ha $x^* = 0$ (i punti coincidono con una delle soluzioni precedenti) mentre per $\Omega^2 \rightarrow \infty$ si ha $x^* \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$.

Veniamo alla classificazione. La matrice A dell'equazione linearizzata in $(x^*, 0)$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x^*) & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(x) = -\omega^2 \cos x + \Omega^2(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Risulta $\text{Tr } A = 0$, dunque si ha un centro se $\det A > 0$, ovvero se $f'(x^*) < 0$ e corrispondentemente V ha un minimo in x^* , e si ha invece una sella se $\det A < 0$, ovvero se $f'(x^*) > 0$ e V ha un massimo. (Non discuteremo il caso “eccezionale” $\det A = 0$.)

- (a) Per $x^* = 0$ si ha $f' = -\omega^2 + \Omega^2$, dunque si ha un centro per $\Omega^2 < \omega^2$, una sella per $\Omega^2 > \omega^2$.
- (b) Per $x^* = \pi$ si ha $f' = \omega^2 + \Omega^2 > 0$ sempre, dunque si ha sempre una sella.
- (c) Per $\Omega^2 > \omega^2$ e $x^* = \pm \arccos(\omega^2/\Omega^2)$, usando $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ si trova subito

$$f' = \frac{\omega^4}{\Omega^2} - \Omega^2 ;$$

si vede che f' è sempre negativa per $\Omega^2 > \omega^2$, cioè quando la condizione di esistenza è soddisfatta (con la disuguaglianza stretta). Questi altri punti dunque, non appena esistono distinti da $x^* = 0$, sono centri.

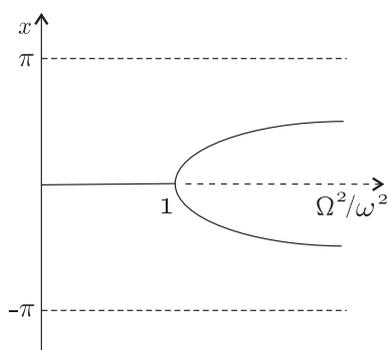


figura a

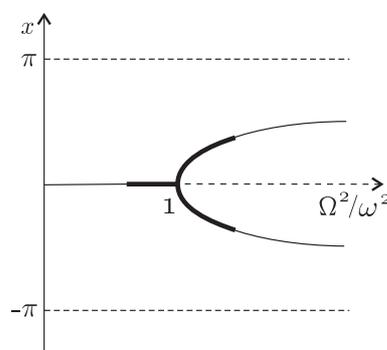


figura b

Il grafico della biforcazione è in figura a; si è usato come parametro il rapporto adimensionale Ω^2/ω^2 . Si osservi che: (i) la funzione arccos ha tangente verticale quando l'argomento vale uno, cioè alla biforcazione; (ii) per ogni valore del parametro, muovendosi verticalmente centri e selle si alternano. *Deve essere così*, perché questo corrisponde all'alternarsi di minimi e massimi nella funzione V . Anzi: che le soluzioni $x^* = \pm \arccos(\omega^2/\Omega^2)$ siano centri lo si può dedurre dalla necessità di questa alternanza, anche senza il brevissimo calcolo di f' sopra riportato.

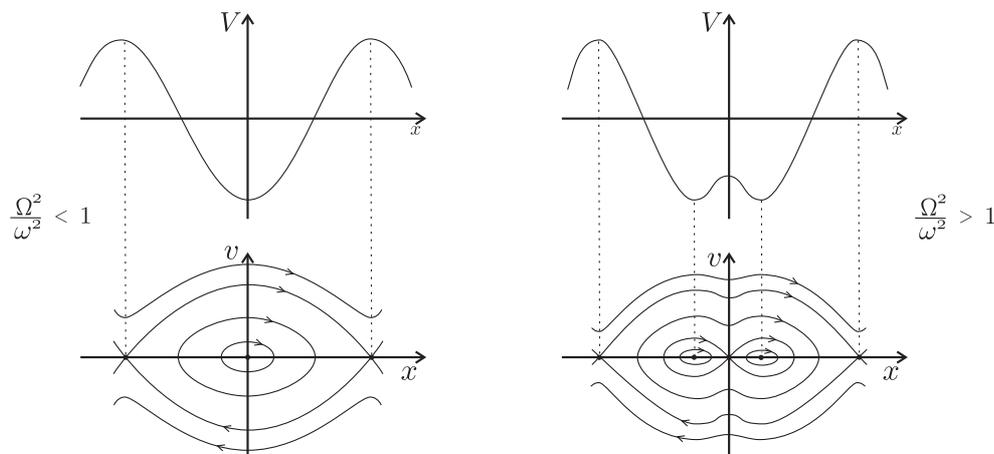


figura c

figura d

Il grafico del potenziale e il ritratto in fase, per $\Omega^2 < \omega^2$, sono qualitativamente simili al caso del pendolo (figura c): la struttura dei massimi e minimi di V , e corrispondentemente i punti singolari

e la loro classificazione, non cambiano. Invece non appena $\Omega^2 > \omega^2$, il minimo di V in $x = 0$ diventa un massimo e contemporaneamente si formano due minimi ai lati (figura d). Per la costruzione del ritratto in fase in questa situazione conviene tracciare innanzitutto le separatrici che connettono $(-\pi, 0)$ e $(+\pi, 0)$; queste sono qualitativamente simili al caso $\Omega^2 < \omega^2$, a parte un'ondulazione in prossimità di $x = 0$. Poi è bene tracciare le altre separatrici, relative alla sella in $(0, 0)$: sono “a laccio chiuso” sia a destra che a sinistra, come in ogni doppia buca. Le curve per energie diverse da quelle critiche si tracciano poi facilmente.

Aggiungendo il termine dissipativo il sistema del primo ordine diviene

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = f(x) - 2\mu v.$$

I punti di equilibrio, essendo per essi necessariamente $v = 0$, restano gli stessi. Per la classificazione invece va riconsiderata la matrice A , che diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x^*) & -2\mu \end{pmatrix}.$$

Si vede che il determinante non cambia, mentre la traccia è diventata negativa, $\text{Tr } A = -2\mu < 0$. Pertanto:

- (a) $x^* = 0$ rimane una sella se $\Omega^2 > \omega^2$; invece per $\Omega^2 < \omega^2$ si trova, al posto del centro, un fuoco o un nodo rispettivamente per $\det A$ maggiore o minore di $\frac{1}{4}(\text{Tr } A)^2$. Si ha così:

un fuoco per	$\Omega^2 < \omega^2 - \mu^2$
un nodo per	$\omega^2 - \mu^2 < \Omega^2 < \omega^2$
una sella per	$\omega^2 < \Omega^2$.

- (b) $x^* = \pi$ era e resta una sella.

- (c) $x^* = \pm \arccos(\omega^2/\Omega^2)$ è un fuoco o un nodo rispettivamente per μ^2 minore o maggiore di $(\Omega^2 - \omega^4/\Omega^2)$.

E' interessante seguire il comportamento del sistema al variare di Ω a ω e μ fissati, con $\mu < \omega$. Si vede che $x^* = 0$ è un fuoco per Ω piccolo, $\Omega^2 < \sigma^2 = \omega^2 - \mu^2$; poi diventa un nodo per $\sigma^2 < \Omega^2 < \omega^2$; infine è una sella per $\omega^2 < \Omega^2$. Quando quest'ultima condizione è realizzata esistono le altre soluzioni, che sono nodi finché $\Omega^2 - \omega^4/\Omega^2 < \mu^2$ e poi diventano fuochi. Usando una linea continua leggera per i fuochi, e una linea più spessa per i nodi, il diagramma della biforcazione diviene quello della figura b.

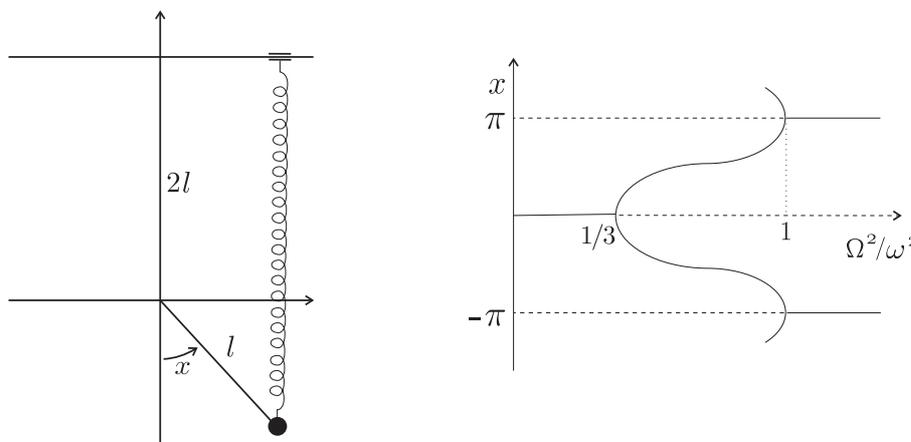
Problema 2 (*punti singolari e biforcazioni*)

Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2(2 + \cos x) \sin x$$

(una possibile realizzazione fisica è illustrata in figura).

Si determinino e si classifichino i punti singolari, tracciando anche il grafico della biforcazione. Che cosa cambia se si aggiunge una piccola dissipazione?

**Soluzione**

L'equazione si riscrive come sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = f(x), \quad f(x) = -\omega^2 \sin x + \Omega^2(2 + \cos x) \sin x;$$

il potenziale corrispondente a f è

$$V(x) = -\omega^2 \cos x + \frac{1}{2} \Omega^2 (2 + \cos x)^2.$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli i punti del piano xv del tipo $(x^*, 0)$, con x^* tale che $f(x^*) = 0$.

La funzione f si annulla per

$$\sin x^* = 0, \quad x^* = 0, \pi$$

e per

$$2 + \cos x^* = \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad x^* = \pm \arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 2\right),$$

purché però sia soddisfatta la condizione di esistenza

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\Omega^2}{\omega^2} \leq 1; \quad (*)$$

si osservi che per $\Omega^2/\omega^2 = 1/3$ si ha $x^* = 0$ mentre per $\Omega^2/\omega^2 = 1$ si ha $x^* = \pi$.

Veniamo alla classificazione. La matrice A dell'equazione linearizzata in $(x^*, 0)$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x^*) & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(x) = -\omega^2 \cos x + \Omega^2(2 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x).$$

Risulta $\text{Tr } A = 0$, dunque si ha un centro se $\det A > 0$, ovvero se $f'(x^*) < 0$ e corrispondentemente V ha un minimo in x^* , e si ha invece una sella se $\det A < 0$, ovvero se $f'(x^*) > 0$ e V ha un massimo.

- (a) Per $x^* = 0$ si ha $f' = -\omega^2 + 3\Omega^2$, dunque si ha un centro per $\Omega^2/\omega^2 < 1/3$, una sella per $\Omega^2/\omega^2 > 1/3$.
- (b) Per $x^* = \pi$ si ha $f' = \omega^2 - \Omega^2$, dunque si ha un centro per $\Omega^2/\omega^2 > 1$, una sella per $\Omega^2/\omega^2 < 1$.
- (c) Quando la (*) è soddisfatta, per la regola dell'alternanza (si veda l'esercizio precedente) si hanno necessariamente centri. La verifica basata sul segno di f' è comunque facile.

Il grafico della biforcazione è in figura. Con l'aggiunta di una piccola dissipazione, i punti di equilibrio non cambiano; i centri, per valori di Ω^2/ω^2 prossimi alla biforcazione, sono mutati in nodi; le selle restano selle.

Problema 3 (biforcazioni in sistemi non meccanici)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy$$

(Lotka–Volterra modificato) per $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$, ε piccolo. Si determinino e si classifichino i punti singolari, e si tracci il ritratto in fase del sistema.

Soluzione

I punti singolari si trovano uguagliando a zero \dot{x} e \dot{y} . Si vede immediatamente che \dot{x} si annulla sulle rette $x = 0$ e $\alpha - \beta y - \varepsilon x = 0$ (rette tratteggiate in figura a), mentre \dot{y} si annulla sulle rette $y = 0$ e $x = \gamma/\delta$ (rette a tratto continuo in figura a). I punti di equilibrio sono allora tre:

$$\mathbf{c}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{c}_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\varepsilon\gamma}{\beta\delta} \right), \quad \mathbf{c}_3 = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0 \right)$$

(le tre intersezioni di una retta tratteggiata con una continua). Si osservi che per ε piccolo ($\varepsilon < \alpha\delta/\gamma$) il punto \mathbf{c}_2 ha ordinata positiva.

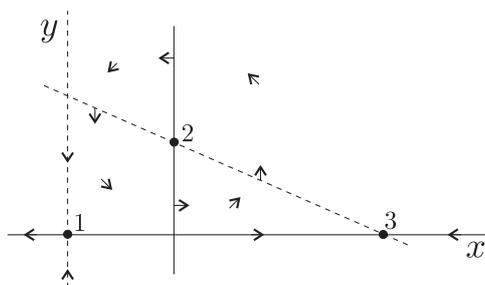


figura a

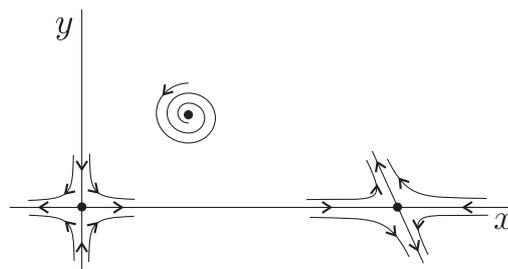


figura b

Vale la pena di osservare già qui che le quattro rette singolari, su cui si annullano \dot{x} o \dot{y} , dividono il piano xy in regioni sulle quali il campo vettoriale $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ ha orientamento definito in uno dei quattro quadranti del piano; si vedano le piccole frecce in figura *a*. Sulle rette stesse il campo è orizzontale o verticale: verticale sulle tratteggiate ($\dot{x} = 0$), verso l'alto o verso il basso a seconda del segno di \dot{y} ; orizzontale sulle rette piene ($\dot{y} = 0$), a destra o a sinistra a seconda del segno di \dot{x} .

Per classificare i punti singolari ci serve innanzitutto la matrice jacobiana del sistema, che si trova subito essere

$$J(x, y) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y - 2\varepsilon x & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

La classificazione di \mathbf{c}_i , $i = 1, 2, 3$, dipende da traccia e determinante della matrice $A_i = J(\mathbf{c}_i)$.

Punto \mathbf{c}_1 : si ha

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

e poiché $\det A_1 = -\alpha\gamma < 0$, il punto \mathbf{c}_1 è una sella. (Si osservi che i valori dei coefficienti $\beta, \varepsilon, \delta$ dei termini quadratici sono irrilevanti per la classificazione dell'origine \mathbf{c}_1 .) Gli autovettori sono i versori degli assi, precisamente $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ corrisponde all'autovalore $\alpha > 0$, mentre $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ corrisponde all'autovalore $-\gamma < 0$. L'andamento locale attorno a \mathbf{c}_1 è allora quello tracciato in figura *b* (l'andamento è coerente con le considerazioni fatte sopra sull'orientamento di \mathbf{v} sulle rette critiche e nelle diverse regioni).

Punto \mathbf{c}_2 : si trova

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon\gamma}{\delta} & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} - \frac{\varepsilon\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\text{Tr } A_2 = -\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\delta} < 0, \quad \det A_2 = \alpha\gamma - \frac{\varepsilon\gamma^2}{\delta}.$$

Per ε sufficientemente piccolo si ha con evidenza $\det A_2 > 0$ e inoltre $\Delta = (\text{Tr } A_2)^2 - 4\det A_2 < 0$, perciò il punto \mathbf{c}_2 è un fuoco stabile. (Non poteva essere né un nodo né una sella trattandosi, per ε piccolo, di una piccola modifica della matrice

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

che dà un centro; la sola osservazione che per $\varepsilon > 0$ si ha $\text{Tr } A_2 < 0$ era allora sufficiente a concludere che il centro si modificava in fuoco stabile.) Il verso di rotazione attorno al fuoco è antiorario; il modo più semplice di vederlo è osservare che questo verso è coerente con l'andamento di \mathbf{v} sopra messo in evidenza.

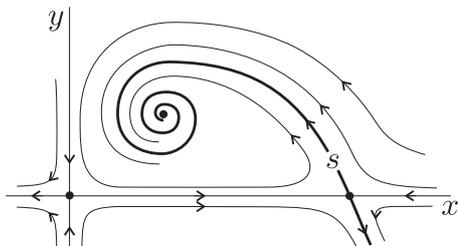
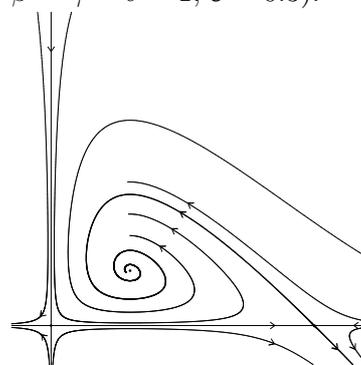
Punto \mathbf{c}_3 : si trova

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon} \\ 0 & -\gamma + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

e con evidenza per ε piccolo si ha $\det A_3 < 0$, ovvero il punto \mathbf{c}_3 è una sella. Uno degli autovettori è $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, con autovalore $-\alpha < 0$; l'altro autovettore, con autovalore $-\gamma + \alpha\delta/\varepsilon > 0$, è trasverso, e si trova facilmente, con un piccolo calcolo, che la sua direzione è approssimativamente quella indicata in figura *b*. L'andamento delle traiettorie attorno a \mathbf{c}_3 è allora quello indicato in figura.

Per tracciare il ritratto in fase, manca lo strumento aggiuntivo che si ha quando c'è una quantità conservata, e ci si deve in qualche modo arrangiare con considerazioni qualitative *ad hoc*. In sostanza, vanno connessi tra loro gli andamenti locali, in modo da rispettare l'orientazione qualitativa di $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ indicata dalle frecce in figura *a*.

Un'osservazione facile e utile è che i due assi coordinati x e y sono invarianti (infatti se $x = 0$ allora $\dot{x} = 0$, e analogamente per y) e i moti su di essi hanno il verso indicato dalle frecce. Conviene poi considerare la traiettoria in uscita da \mathbf{c}_3 , rivolta nel semipiano $y > 0$ (questa e gli assi coordinati sono l'analogo delle separatrici, che al solito fanno da regia del ritratto in fase). Un minimo di riflessione mostra che tale traiettoria, denotata s in figura c (curva spessa) va avvolgendosi a spirale attorno a \mathbf{c}_2 , e che i moti su di essa convergono a \mathbf{c}_2 per $t \rightarrow \infty$ (questo in realtà andrebbe dimostrato; lo accettiamo qui come fatto intuitivo). A questo punto l'andamento complessivo dei moti si fa chiaro: ad esempio si può osservare che moti con dato iniziale poco a destra di s , per $t > 0$ vanno avvolgendosi con s attorno a \mathbf{c}_2 , mentre per $t < 0$ (moto a ritroso) vanno spiraleggiando in fuori, e si ritrovano a sinistra di s . In il ritratto in fase, in definitiva, ha l'aspetto disegnato "a mano" in figura c . Un'immagine realistica, ottenuta mediante integrazione numerica delle equazioni del moto, è riprodotta in figura d (valori dei parametri: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, $\varepsilon = 0.3$).

figura c figura d

Problema 4 (*stabilità dell'equilibrio e biforcazioni in sistemi lagrangiani*)

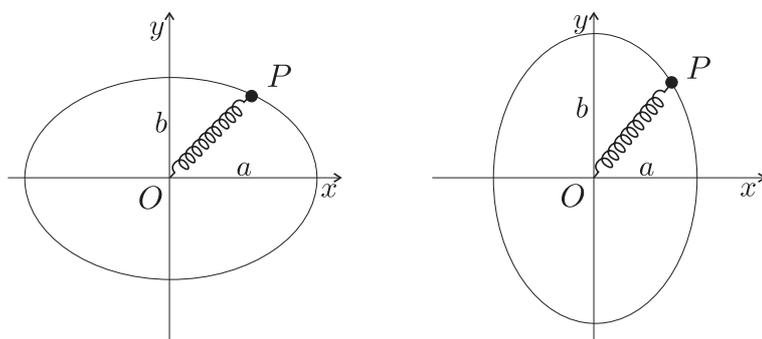
Un punto materiale P di massa m è vincolato a un'ellisse, giacente nel piano xy verticale con asse y verticale ascendente, di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

P è soggetto alla gravità e a una forza elastica, di costante elastica k , che lo lega all'origine. Con riferimento alla parametrizzazione dell'ellisse $x = a \cos \vartheta$, $y = b \sin \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$,

1. si determinino le posizioni di equilibrio e la relativa stabilità, tracciando anche il grafico della biforcazione;
2. si traccino il grafico del potenziale e il ritratto di fase nelle diverse condizioni;
3. si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ quando queste sono stabili.

Si distinguano, nel rispondere, i casi $a > b$ e $a < b$, riportati in figura rispettivamente a sinistra e a destra.



Soluzione

In termini del parametro ϑ (da non confondersi con l'angolo geometrico tra il vettore $P-O$ e l'asse x) si trova subito per il potenziale V l'espressione

$$V(\vartheta) = \frac{k}{2}(a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta) + mgb \sin \vartheta .$$

Le configurazioni di equilibrio sono date allora da

$$V'(\vartheta) = -k(a^2 - b^2) \sin \vartheta \cos \vartheta + mgb \cos \vartheta = 0 ,$$

pertanto si ha equilibrio per

$$\cos \vartheta = 0 , \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{2} ,$$

e inoltre per

$$\sin \vartheta = \frac{b}{a^2 - b^2} \frac{mg}{k} ,$$

cioè per

$$\vartheta = \arcsin \left(\frac{b}{a^2 - b^2} \frac{mg}{k} \right) , \quad \vartheta = \pi - \arcsin \left(\frac{b}{a^2 - b^2} \frac{mg}{k} \right) ,$$

a condizione che sia soddisfatta la condizione di esistenza

$$\frac{b}{|a^2 - b^2|} \frac{mg}{k} \leq 1 .$$

Per lo studio della stabilità, scriviamo la derivata seconda di V :

$$V''(\vartheta) = -k(a^2 - b^2)(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) - mgb \sin \vartheta .$$

A questo punto è indispensabile distinguere tra il caso $a > b$ e il caso $a < b$.

Caso $a > b$.

- Per $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ si ha $V'' = k(a^2 - b^2) + mgb$, pertanto il potenziale V è sempre minimo e l'equilibrio è sempre stabile.
- Per $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$ si ha invece $V'' = k(a^2 - b^2) - mgb$. Il potenziale V è minimo, e corrispondentemente l'equilibrio è stabile, se

$$\frac{k}{mg} > \frac{b}{a^2 - b^2} ;$$

se invece è soddisfatta la disuguaglianza opposta, V è massimo e l'equilibrio è instabile.

- Quando le due ulteriori soluzioni esistono, certamente V in esse è massimo (ciascuna configurazione è infatti compresa tra due minimi; è una verifica utile, ma a rigore non necessaria, calcolare V''). Pertanto queste configurazioni quando esistono sono instabili.

Caso $a < b$.

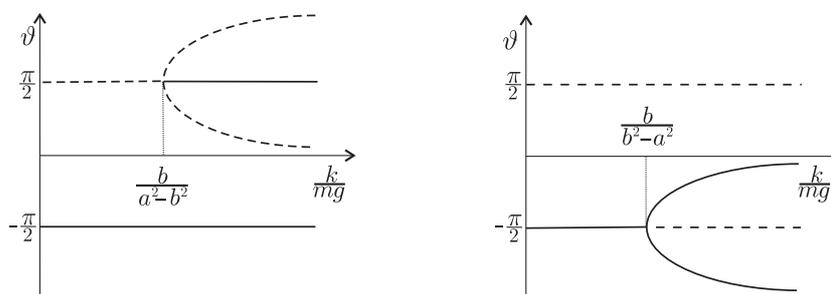
- Per $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ si ha $V'' = -k(b^2 - a^2) + mgb$; V è minimo, e l'equilibrio è stabile, se

$$\frac{k}{mg} < \frac{b}{b^2 - a^2};$$

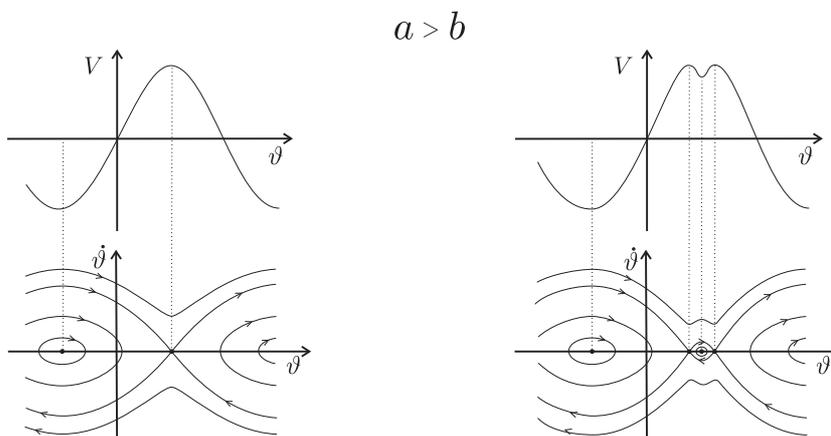
invece V è massimo, e l'equilibrio è instabile, se è soddisfatta la disuguaglianza opposta.

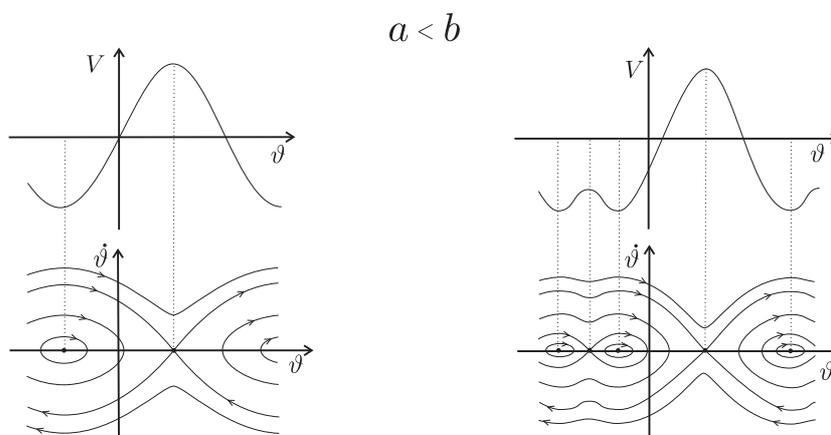
- Per $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$ il potenziale V è sempre massimo e corrispondentemente l'equilibrio è sempre instabile.
- Quando le due ulteriori soluzioni esistono, certamente V in esse è minimo (ciascuna configurazione è infatti compresa tra due massimi). Pertanto queste configurazioni quando esistono sono stabili.

Il grafico della biforcazione nei due casi è riportato nella figura qui sotto: a sinistra per $a > b$, a destra per $a < b$.



Il grafico del potenziale e il ritratto in fase hanno l'aspetto riportato qui sotto: al crescere di k , per $a > b$ un massimo di V diventa un minimo, e si formano due minimi a fianco; per $a < b$ un minimo di V diventa un massimo e si formano due minimi vicini. Sono i due tipi fondamentali di biforcazione a forchetta.





La pulsazione delle piccole oscillazioni attorno a una configurazione di equilibrio stabile ϑ^* è data, in questo problema a un solo grado di libertà, da

$$\omega^2 = \frac{V''(\vartheta^*)}{\mathcal{A}(\vartheta^*)},$$

ove $\mathcal{A}(\vartheta)$ è il coefficiente di $\dot{\vartheta}^2$ nell'espressione dell'energia cinetica (la matrice cinetica 1×1 , che non possiamo denotare come al solito a per il conflitto di notazione col semiasse dell'ellisse). L'energia cinetica si trova subito essere

$$K(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)\dot{\vartheta}^2,$$

pertanto $\mathcal{A}(\vartheta) = m(a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)$. Segue allora:

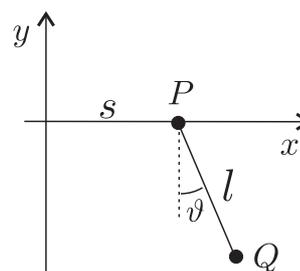
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{gb}{a^2} \quad \text{per } \vartheta^* = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \frac{a^2 - b^2}{a^2} - \frac{gb}{a^2} \quad \text{per } \vartheta^* = +\frac{\pi}{2}$$

e le espressioni sono positive, come è necessario che siano, quando V'' è positivo, cioè quando l'equilibrio è stabile.

Problema 5 (*equazioni di Lagrange*)

Un punto materiale P di massa m_P è vincolato all'asse x di un piano cartesiano xy verticale, con asse y verticale ascendente. Un secondo punto materiale Q di massa m_Q è vincolato al medesimo piano e a mantenere distanza fissa l da P . Sul sistema agisce la gravità. Si scrivano la matrice cinetica a del sistema, verificando che è definita positiva, e le equazioni di Lagrange.



Soluzione

Si ha evidentemente $K_P = \frac{1}{2}m_P\dot{s}^2$; da $x_Q = s + l \sin \vartheta$, $y_Q = -l \cos \vartheta$ segue poi, derivando e poi quadrando e sommando, $K_Q = \frac{1}{2}m_Q(\dot{s}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l \cos \vartheta \dot{s}\dot{\vartheta})$, e pertanto

$$K = \frac{1}{2}[(m_P + m_Q)\dot{s}^2 + m_Q l^2 \dot{\vartheta}^2 + 2m_Q l \cos \vartheta \dot{s}\dot{\vartheta}] , \quad a = \begin{pmatrix} m_P + m_Q & m_Q l \cos \vartheta \\ m_Q l \cos \vartheta & m_Q l^2 \end{pmatrix} .$$

Ricordiamo che per una matrice simmetrica $a \ 2 \times 2$:

- (i) se $\det a > 0$, allora la matrice è definita (positiva o negativa);
- (ii) la matrice è poi definita positiva o negativa a seconda che gli elementi diagonali (che in questo caso hanno necessariamente lo stesso segno) siano positivi o negativi.

La matrice a scritta sopra è definita positiva (non lo sarebbe per $m_P = 0$; non lo sarebbe se, per errore, fosse rimasto un fattore 2 sugli elementi non diagonali).

L'energia potenziale è $V = m_Q g y_Q = -m_Q g l \cos \vartheta$, perciò la lagrangiana $L = K - V$ è

$$L(s, \vartheta, \dot{s}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}[(m_P + m_Q)\dot{s}^2 + m_Q l^2 \dot{\vartheta}^2 + 2m_Q l \cos \vartheta \dot{s}\dot{\vartheta}] + m_Q g l \cos \vartheta$$

(L in realtà non dipende da s). Segue

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = (m_P + m_Q)\dot{s} + m_Q l \cos \vartheta \dot{\vartheta} , \quad \frac{\partial L}{\partial s} = 0 ,$$

da cui

$$(m_P + m_Q)\ddot{s} + m_Q l \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - m_Q l \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 = 0 ;$$

allo stesso modo si trova

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_Q l^2 \dot{\vartheta} + m_Q l \cos \vartheta \dot{s} , \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -m_Q l \sin \vartheta \dot{s}\dot{\vartheta} - m_Q g l \sin \vartheta ,$$

da cui (attenzione alla semplificazione dei termini in $\dot{s}\dot{\vartheta}$)

$$m_Q l^2 \ddot{\vartheta} + m_Q l \cos \vartheta \ddot{s} + m_Q g l \sin \vartheta = 0 .$$

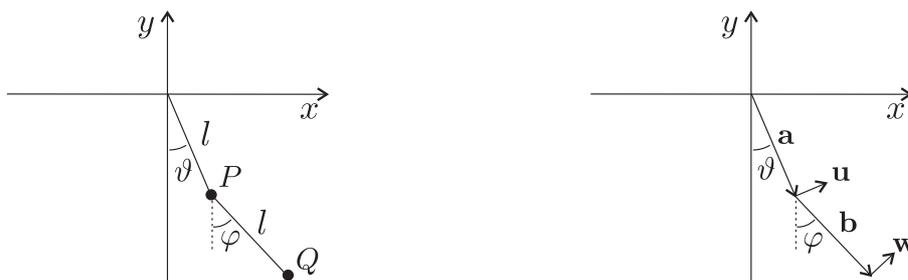
Si osservi che la coppia di equazioni ha la forma

$$a \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \text{termini che non contengono le derivate seconde} ;$$

così infatti è previsto dalla teoria (e per l'invertibilità di a siamo certi di poter passare alla forma normale). Il fatto che a non sia diagonale è responsabile del fatto che entrambe le equazioni contengono entrambe le derivate seconde.

Problema 6 (equazioni di Lagrange)

Un punto materiale P di massa m è vincolato a un piano cartesiano verticale xy , con asse y verticale ascendente, e inoltre a mantenere distanza fissata l dall'origine. Un secondo punto materiale Q di ugual massa è vincolato al medesimo piano e inoltre a mantenere distanza l da P (pendolo doppio, o bipendolo). Sul sistema agisce la gravità. Con riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ e φ indicate in figura, si scrivano la matrice cinetica e le equazioni del moto.

**Soluzione**

Si ha evidentemente $K_P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2$. Da

$$x_Q = l(\sin \vartheta + \sin \varphi), \quad y_Q = -l(\cos \vartheta + \cos \varphi)$$

segue poi

$$\dot{x}_Q = l(\cos \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \varphi \dot{\varphi}), \quad \dot{y}_Q = l(\sin \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \varphi \dot{\varphi}),$$

e quadrando e sommando:

$$v_Q^2 = l^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2(\cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}) = l^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}).$$

L'energia cinetica complessiva è allora

$$K = \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}), \quad a = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & \cos(\vartheta - \varphi) \\ \cos(\vartheta - \varphi) & 1 \end{pmatrix}.$$

L'energia cinetica di Q si calcola più in fretta osservando che si ha (si guardi la figura) $Q - O = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, da cui

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} = l\dot{\vartheta} \mathbf{u} + l\dot{\varphi} \mathbf{w},$$

con \mathbf{u} e \mathbf{w} versori trasversi (ortogonali, precisamente ruotati di $\frac{\pi}{2}$) rispettivamente ad \mathbf{a} e \mathbf{b} . Segue subito, quadrando,

$$v^2 = l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w},$$

e poiché $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos(\vartheta - \varphi)$ si ritrova l'espressione calcolata precedentemente.

L'energia potenziale è

$$V = -mgl(2\cos \vartheta + \cos \varphi),$$

pertanto la lagrangiana del sistema è

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}) + mgl(2\cos \vartheta + \cos \varphi);$$

le equazioni di Lagrange risultano essere

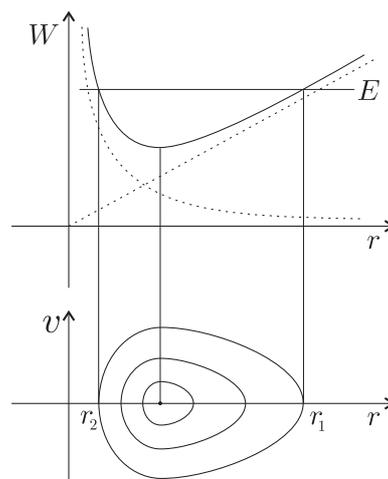
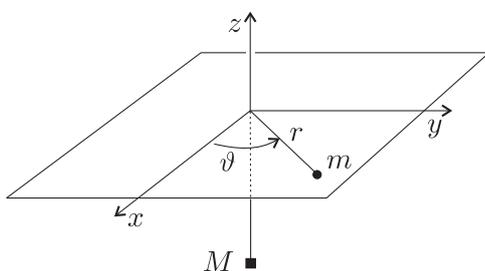
$$\begin{aligned} 2\ddot{\vartheta} + \cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\varphi} + \sin(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi}^2 + 2\omega^2 \sin \vartheta &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\vartheta} - \sin(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

con $\omega^2 = g/l$. Si osservi come i termini in $\dot{\vartheta}\dot{\varphi}$ si semplifichino in entrambe le equazioni.

Problema 7 (*coordinate ignorabili e riduzione*)

Il sistema meccanico illustrato in figura è costituito da una massa m , vincolata al piano xy orizzontale di un sistema cartesiano $Oxyz$, e da una seconda massa M , vincolata a scorrere sull'asse z verticale. Un filo inestensibile, passante per l'origine come illustrato in figura, lega tra loro le due masse. Sul sistema agisce la gravità.

1. Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari r e ϑ di m , si scrivano la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Si riduca il problema a un solo grado di libertà per la coordinata r , scrivendo Lagrangiana ed equazione del moto, per un valore assegnato p_ϑ del momento della quantità di moto.
3. Per $p_\vartheta > 0$ fissato si traccino il grafico del potenziale e il ritratto di fase del sistema ridotto; si verifichi che per ogni valore di energia il raggio r oscilla tra due valori positivi limitati r_1 e r_2 .
4. Si determinino i dati iniziali $r_0, \vartheta_0, \dot{r}_0, \dot{\vartheta}_0$ in corrispondenza ai quali il moto di m è circolare e si calcoli il periodo del moto.

**Soluzione**

La coordinata z di M è legata a r dal vincolo

$$z = r + \text{cost} , \quad \dot{z} = \dot{r} ;$$

l'energia cinetica del sistema è allora $K = \frac{1}{2}[(M + m)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2]$, e la lagrangiana del sistema (a meno di una costante) è

$$L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}[(M + m)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2] - Mgr .$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange sono

$$(M + m)\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + Mg = 0 , \quad mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} = 0 .$$

La lagrangiana non contiene la coordinata ϑ , pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}$$

(la seconda equazione di Lagrange altro non è che $\dot{p}_\vartheta = 0$). Per utilizzare p_ϑ al posto di $\dot{\vartheta}$, così da ridursi a un solo grado di libertà, si effettua innanzitutto l'inversione

$$\dot{\vartheta} = u(r, p_\vartheta) = \frac{p_\vartheta}{mr^2}$$

(qui u eccezionalmente non dipende da \dot{r} ; il motivo è che la matrice cinetica è diagonale, cosicché $p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$ non contiene \dot{r}). La lagrangiana ridotta L' si trova poi, secondo la teoria, sostituendo $\dot{\vartheta}$ in L , e aggiungendo il termine correttivo $-p_\vartheta u$:

$$\begin{aligned} L'(r, \dot{r}; p_\vartheta) &= L(r, \dot{r}, u(r, p_\vartheta)) - p_\vartheta u(r, p_\vartheta) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \frac{p_\vartheta^2}{(mr^2)^2} - V(r) - \frac{p_\vartheta^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 - W(r, p_\vartheta) \end{aligned}$$

ove il “potenziale efficace” W , contenente p_ϑ come parametro costante, è dato da

$$W(r, p_\vartheta) = V(r) + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} = Mgr + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} .$$

L'equazione di Lagrange corrispondente è

$$(M+m)\ddot{r} + Mg - \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} = 0 .$$

Per $p_\vartheta \neq 0$ il “termine centrifugo” $\frac{p_\vartheta^2}{2mr^2}$ in L' diverge per $r \rightarrow 0$ e così tiene r fuori dall'origine. In effetti, il grafico del potenziale si vede subito essere quello rappresentato in figura (le linee tratteggiate rappresentano $V(r)$ e il termine centrifugo, che sommati danno W). Il ritratto in fase corrispondente è elementare: c'è un solo punto di equilibrio r^* , corrispondente al minimo di W , e per ogni livello di energia si ha una curva chiusa tra due estremi r_1 e r_2 dipendenti da E (e da p_ϑ).

Il punto di equilibrio r^* del problema ridotto si trova imponendo $\frac{\partial W}{\partial r} = 0$; il risultato è

$$r^*(p_\vartheta) = \left(\frac{p_\vartheta^2}{mMg} \right)^{1/3} .$$

Si trova un moto circolare del problema completo in corrispondenza all'equilibrio del sistema ridotto. Bisogna allora prendere dati iniziali $r_0, \vartheta_0, \dot{r}_0, \dot{\vartheta}_0$ tali che $\dot{r}_0 = 0$ e $r_0 = r^*(p_\vartheta)$, badando però anche a sostituire p_ϑ , nell'espressione di r^* , in termini di r_0 e $\dot{\vartheta}_0$,

$$p_\vartheta = mr_0^2 \dot{\vartheta}_0 .$$

Si trovano così moti circolari per $\dot{r}_0 = 0$ e $r_0, \dot{\vartheta}_0$ legati da

$$mr_0 \dot{\vartheta}_0^2 = Mg ,$$

mentre ϑ_0 è libero. Il risultato si legge facilmente osservando che in equilibrio il filo esercita la forza Mg (per sostenere M) e questa è anche la forza centripeta necessaria a mantenere m in moto circolare. Il moto circolare è uniforme, come segue da

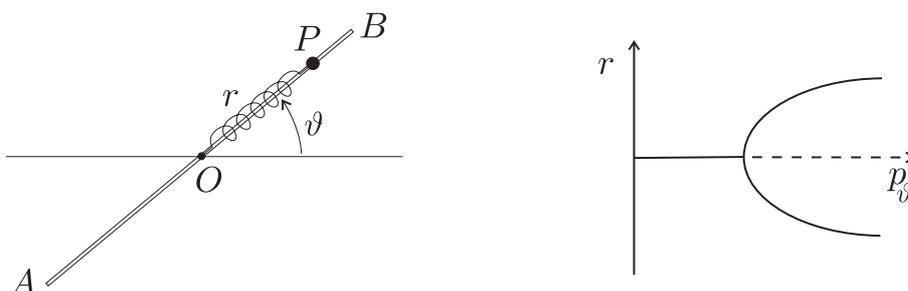
$$\dot{\vartheta}(t) = \frac{p_\vartheta}{mr(t)^2} = \frac{p_\vartheta}{mr_0^2} = \dot{\vartheta}_0 ,$$

e il suo periodo è $2\pi/\dot{\vartheta}_0$.

Problema 8 (*coordinate ignorabili e riduzione*)

Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza l è libera di ruotare in un piano orizzontale attorno al suo punto medio O . Un punto materiale P di ugual massa m , libero di scorrere sulla retta dell'asta, è legato ad O da una forza elastica di costante elastica k . Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa r di P su AB e l'angolo ϑ che AB forma con una direzione prefissata,

1. si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange;
2. si riduca il problema a un solo grado di libertà per la coordinata r , scrivendo lagrangiana ed equazione del moto, per un valore assegnato $p_\vartheta > 0$ del momento della quantità di moto;
3. si studi, per il problema ridotto, la stabilità del punto di equilibrio $r = 0$, pensando p_ϑ come parametro variabile, e in caso di stabilità si calcoli la pulsazione delle piccole oscillazioni;
4. si tracci il ritratto in fase del sistema ridotto nelle diverse condizioni;
5. si determinino i punti di equilibrio del sistema di partenza a due gradi di libertà e se ne discuta la stabilità.

**Soluzione**

Vale la pena di osservare preliminarmente che (r, ϑ) *non* sono le coordinate polari di P , in quanto r è qui un'ascissa sulla retta AB che può essere anche nulla o negativa; le configurazioni (r, ϑ) e $(-r, \vartheta + \pi)$ del sistema sono diverse. L'energia cinetica del punto P tuttavia è la stessa del punto in coordinate polari piane, $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$.

Detto $I = \frac{1}{12}ml^2$ il momento di inerzia dell'asta (relativo all'asse ortogonale passante per O), si trova facilmente

$$L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}[m\dot{r}^2 + (mr^2 + I)\dot{\vartheta}^2] - \frac{1}{2}kr^2,$$

con equazioni del moto

$$m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + kr = 0, \quad (mr^2 + I)\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} = 0.$$

La lagrangiana non dipende da ϑ , pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = (mr^2 + I)\dot{\vartheta}.$$

Per inversione si trova

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2 + I},$$

e la lagrangiana ridotta risulta essere

$$\begin{aligned} L'(r, \dot{r}, p_\vartheta) &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(mr^2 + I)\frac{p_\vartheta^2}{(mr^2 + I)^2} - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{p_\vartheta^2}{mr^2 + I} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - W(r, p_\vartheta) \end{aligned}$$

con

$$W(r, p_\vartheta) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{p_\vartheta^2}{2(mr^2 + I)} .$$

Si osservi che il secondo termine in W (“termine centrifugo”) è repulsivo, ma (grazie a $I > 0$) non diverge per $r \rightarrow 0$. L'equazione del moto corrispondente a L' è

$$m\ddot{r} + kr - \frac{mrp_\vartheta^2}{(mr^2 + I)^2} = 0 .$$

Gli equilibri del sistema ridotto si determinano imponendo $W' = 0$. Si trova

$$W' = kr - \frac{mrp_\vartheta^2}{(mr^2 + I)^2} ,$$

e dunque si ha equilibrio:

(a) per $r = 0$;

(b) per

$$k - \frac{mp_\vartheta^2}{(mr^2 + I)^2} = 0 , \quad r^2 = \frac{p_\vartheta}{\sqrt{km}} - \frac{I}{m} ,$$

purché sia soddisfatta la condizione di esistenza

$$p_\vartheta \geq I\Omega , \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Per quanto riguarda la stabilità di $r = 0$, risulta

$$W''(0) = k - \frac{mp_\vartheta^2}{I^2} ,$$

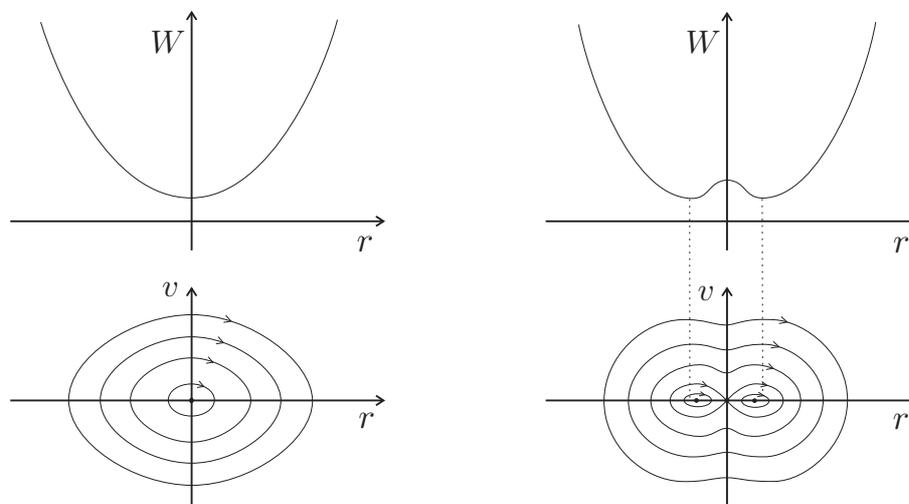
perciò il punto di equilibrio $\mathbf{c} = (0, 0)$, nel piano di fase del sistema ridotto, è

$$\begin{aligned} \text{un centro per } & p_\vartheta < I\Omega \quad (\text{un solo punto di equilibrio}) \\ \text{una sella per } & p_\vartheta > I\Omega \quad (\text{tre punti di equilibrio}) . \end{aligned}$$

Quando la configurazione di equilibrio $r = 0$ è stabile, la pulsazione è data da

$$\omega^2 = W''(0)/m = \Omega^2 - \frac{p_\vartheta^2}{I^2} .$$

Per la regola dell'alternanza tra massimi e minimi di W si deduce, anche senza fare il calcolo di W'' , che quando $r = 0$ diventa un massimo le nuove soluzioni sono minimi (si osservi anche che $W \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow \pm\infty$). Il grafico di W e il ritratto in fase del sistema ridotto, per p_ϑ piccolo e grande, sono riportati in figura.



Per il sistema completo, le configurazioni di equilibrio si ottengono imponendo $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$, con $V(r, \vartheta) = \frac{1}{2}kr^2$. La prima equazione dà $r = 0$, mentre la seconda, visto che V è costante in ϑ , non pone condizioni. Le configurazioni di equilibrio del sistema completo sono dunque infinite, precisamente sono le coppie (r^*, ϑ^*) con $r^* = 0$ e ϑ^* qualsiasi; i corrispondenti punti di equilibrio nello spazio degli stati (a quattro dimensioni) sono

$$\mathbf{c} = (0, \vartheta^*, 0, 0), \quad \vartheta^* \text{ qualsiasi.}$$

Per determinarne la stabilità, non giova in questo caso analizzare la matrice delle derivate seconde di V ,

$$V'' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

né sarebbe utile tentare di guardare le derivate di ordine più elevato. Ma è facile vedere, sulla base della stessa definizione di stabilità, che gli equilibri sono tutti instabili (anche quando $r = 0$ è equilibrio stabile del sistema ridotto): infatti, un qualunque intorno \mathcal{V} di \mathbf{c} contiene necessariamente un punto $(0, \vartheta^*, 0, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo; il moto che ne segue, come in tutti i problemi di equilibri relativi, è uniforme, precisamente

$$(r(t), \vartheta(t)) = (0, \vartheta^* + \varepsilon t)$$

(si verifichi esplicitamente che questa espressione è soluzione delle equazioni del moto) e al crescere di t tale moto *non* resta confinato attorno a \mathbf{c} .

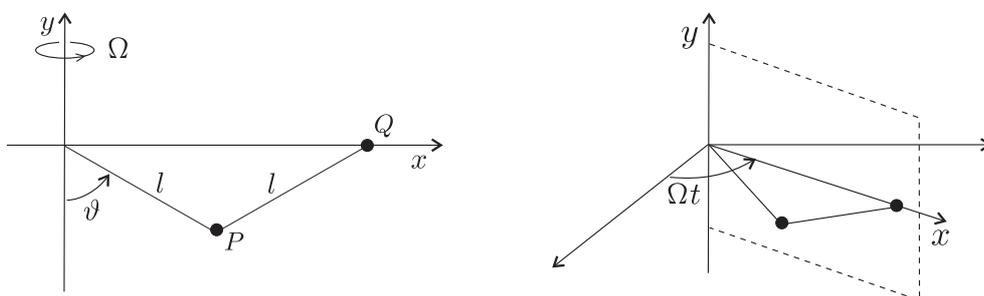
Problema 9 (equazioni di Lagrange e moti relativi)

Il sistema meccanico rappresentato in figura è costituito da due punti materiali P e Q di ugual massa m , vincolati nel modo seguente: P giace nel piano xy , verticale con asse y verticale ascendente, e mantiene distanza l fissata dall'origine; Q è vincolato all'asse x , e mantiene distanza l da P . Il piano xy ruota attorno all'asse y con velocità angolare Ω costante. Sul sistema agisce la gravità. Ci si metta nel sistema solidale al piano rotante, e con riferimento alla coordinata lagrangiana ϑ indicata in figura

1. si scrivano la lagrangiana e l'equazione del moto;
2. si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità, tracciando anche il grafico della biforcazione;
3. si calcoli la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

Ci si metta poi in un sistema di riferimento inerziale, e

4. si calcoli la lagrangiana \tilde{L} in questo sistema.



Soluzione

Si ha $K_P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2$, mentre da $x_Q = 2l \sin \vartheta$ segue $K_Q = \frac{1}{2}m(2l)^2 \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2$, pertanto

$$K = \frac{1}{2}ml^2(1 + 4 \cos^2 \vartheta)\dot{\vartheta}^2 .$$

L'energia potenziale è somma di un termine gravitazionale $-mgl \cos \vartheta$ e di un termine centrifugo

$$-\frac{1}{2}m\Omega^2[(l \sin \vartheta)^2 + (2l \sin \vartheta)^2] = -\frac{5}{2}m\Omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta ,$$

pertanto

$$V = -mgl \cos \vartheta - \frac{5}{2}m\Omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta$$

e dunque

$$L = \frac{1}{2}ml^2(1 + 4 \cos^2 \vartheta)\dot{\vartheta}^2 + mgl \cos \vartheta + \frac{5}{2}m\Omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta .$$

L'equazione del moto risulta essere

$$(1 + 4 \cos^2 \vartheta)\ddot{\vartheta} - 4 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \hat{\omega}^2 \sin \vartheta - 5\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 ,$$

avendo posto $\hat{\omega}^2 = g/l$.

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $V'(\vartheta) = 0$. Si vede che V' si annulla

- (a) per $\sin \vartheta = 0$, $\vartheta = 0, \pi$
- (b) per $\cos \vartheta = \frac{\hat{\omega}^2}{5\Omega^2}$, purché $\hat{\omega}^2/\Omega^2 \leq 5$.

La stabilità si determina guardando il segno di

$$V''(\vartheta) = mgl \cos \vartheta - 5m\Omega^2 l^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) ;$$

si trova $V''(0) = mgl - 5m\Omega^2 l^2$, perciò $\vartheta = 0$ è stabile per $\Omega^2/\hat{\omega}^2 < \frac{1}{5}$, instabile per $\Omega^2/\hat{\omega}^2 > \frac{1}{5}$. Si trova poi $V''(\pi) = -mgl - 5m\Omega^2 l^2 < 0$, perciò $\vartheta = \pi$ è sempre instabile. Per quanto riguarda le soluzioni di tipo (b), la regola dell'alternanza, o il calcolo di

$$V'' = 5ml^2\Omega^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{\omega}^2}{5\Omega^2} \right)^2 \right],$$

dicono che tali soluzioni, quando esistono, sono stabili. Si ha così una classica biforcazione a forchetta.

Per quanto riguarda le piccole oscillazioni, trattandosi di un problema a un solo grado di libertà, nella generica configurazione di equilibrio ϑ^* si ha $\omega^2 = V''(\vartheta^*)/a(\vartheta^*)$, ove si è denotato con

$$a(\vartheta) = ml^2(1 + 4\cos^2 \vartheta)$$

il coefficiente di $\dot{\vartheta}^2$ nell'energia cinetica (la matrice cinetica 1×1). Con qualche calcolo si trova, rispettivamente per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \arccos \frac{\hat{\omega}^2}{5\Omega^2}$,

$$\omega^2 = \frac{1}{5}\hat{\omega}^2 - \Omega^2 \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{5\Omega^2(1 - (\frac{\hat{\omega}^2}{5\Omega^2})^2)}{1 + 4(\frac{\hat{\omega}^2}{5\Omega^2})^2}.$$

Nel sistema inerziale l'energia cinetica ha dei termini in più dovuti alla rotazione attorno all'asse y . Precisamente, denotando con \mathbf{v}_P la velocità di P nel sistema rotante e con $\tilde{\mathbf{v}}_P$ la velocità nel sistema inerziale, si ha

$$\tilde{\mathbf{v}}_P = \mathbf{v}_P + \Omega l \sin \vartheta \mathbf{u},$$

e poichè \mathbf{v}_P e \mathbf{u} sono ortogonali segue

$$\tilde{v}_P^2 = v_P^2 + \Omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta,$$

e similmente per Q ; la nuova energia cinetica è allora

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}ml^2(1 + 4\cos^2 \vartheta)\dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{2}m\Omega^2 l^2 \sin^2 \vartheta.$$

La nuova energia potenziale ha solo il termine gravitazionale:

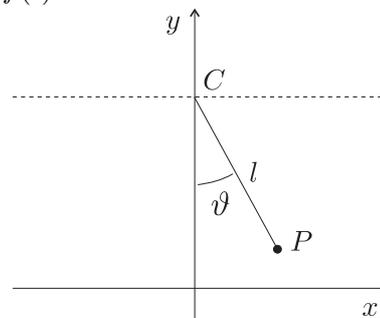
$$\tilde{V} = -mgl \cos \vartheta.$$

in conclusione si ha $\tilde{L} = L$, e l'unica differenza (se differenza la si vuol chiamare) è l'interpretazione di un termine come cinetico anziché come potenziale. (Non è però sempre così: si veda l'esercizio successivo).

Problema 10 (equazioni di Lagrange e moti relativi; invarianza di gauge)

Si consideri un pendolo semplice di massa m e lunghezza l , il cui punto di sospensione C si muove lungo l'asse y (verticale ascendente) di moto assegnato, $y_C = f(t)$.

Facendo riferimento alla consueta coordinata libera ϑ del pendolo, si scrivano la lagrangiana e l'equazione per ϑ (a) nel sistema inerziale, (b) nel sistema accelerato che trasla solidalmente al punto di sospensione del pendolo. Si confrontino i risultati ottenuti nei due modi.

**Soluzione**

Nel sistema di riferimento inerziale si ha

$$\mathbf{v} = l\dot{\vartheta} \mathbf{u} + \dot{f}(t) \mathbf{j} ,$$

ove \mathbf{u} è il versore trasverso a $P - C$ e \mathbf{j} è il versore dell'asse y . Quadrando segue subito

$$v^2 = l^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{f}(t)^2 + 2l\dot{f} \sin \vartheta \dot{\vartheta}$$

(si è usato $\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \sin \vartheta$). In altro modo, poco più complicato:

$$x = l \sin \vartheta , \quad y = f(t) - l \cos \vartheta ;$$

derivando, quadrando e sommando si trova lo stesso risultato. In conclusione

$$K = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{f}(t)^2 + 2l\dot{f} \sin \vartheta \dot{\vartheta}) .$$

L'energia potenziale è poi $V = mgy$, ovvero

$$V = mg(f(t) - l \cos \vartheta) ,$$

pertanto

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{f}(t)^2 + 2l\dot{f} \sin \vartheta \dot{\vartheta}) - mg(f(t) - l \cos \vartheta) .$$

L'equazione del moto corrispondente è

$$\ddot{\vartheta} + (\omega^2 + \ddot{f}/l) \sin \vartheta = 0$$

(si osservi che i termini dipendenti da t ma non da ϑ o $\dot{\vartheta}$ non contribuiscono all'equazione).

Nel sistema di riferimento solidale invece l'energia cinetica è quella solita del pendolo,

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 ,$$

mentre l'energia potenziale contiene, oltre al termine consueto $-mgl \cos \vartheta$, un termine aggiuntivo

$$m\ddot{f}y = -m\ddot{f}(t)l \cos \vartheta$$

responsabile della “forza fittizia” di trascinamento $-m\ddot{f}\mathbf{j}$. Si ha così

$$\tilde{V}(\vartheta) = -m(g + \ddot{f})l \cos \vartheta$$

e dunque

$$\tilde{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + m(g + \ddot{f})l \cos \vartheta .$$

Si vede che \tilde{L} non è uguale a L , ma è immediato verificare che l'equazione del moto è la stessa (cosa ovvia: ϑ si muove in un modo solo, indipendentemente da chi guarda!). In effetti la differenza $L_0 = L - \tilde{L}$ è

$$L_0 = ml\dot{f}(t) \sin \vartheta \dot{\vartheta} - m\ddot{f}l \cos \vartheta + g(t) , \quad g(t) = \frac{1}{2}m\dot{f}(t)^2 - mgf(t) ,$$

e si vede facilmente che si ha

$$L_0 = \frac{dF}{dt} , \quad F(\vartheta, t) = -ml\dot{f}(t) \cos \vartheta + G(t) ,$$

ove G è una primitiva di g . Pertanto L_0 non contribuisce alle equazioni del moto.

Problema 11 (calcolo di reazioni vincolari)

Un pendolo semplice di massa m e lunghezza l , descritto dalla consueta coordinata lagrangiana ϑ (v. figura), è messo in moto con velocità nulla nella configurazione $\vartheta = \pi/2$.

Si determini la reazione vincolare Φ quando il pendolo passa per una generica configurazione ϑ e si verifichi che è soddisfatta la condizione di idealità del vincolo.

Soluzione

La reazione vincolare è data dal secondo principio della meccanica, nella forma

$$\Phi = m\mathbf{a} - \mathbf{F}$$

ove \mathbf{a} è l'accelerazione di m e \mathbf{F} è la forza attiva su m . La forza è nota: $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$, ove \mathbf{j} denota il versore verticale ascendente. L'accelerazione è quella di un moto circolare (non uniforme):

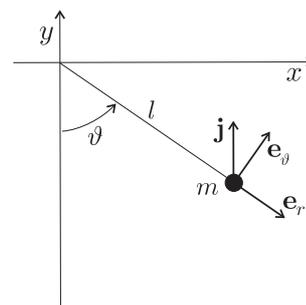
$$\mathbf{a} = -l\dot{\vartheta}^2 \mathbf{e}_r + l\ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta .$$

Entrambi i termini a secondo membro si scrivono facilmente in funzione di ϑ . Per il primo di essi si usa l'equazione del moto:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta .$$

Per il secondo si sfrutta la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta = 0$$



(l'energia cinetica e potenziale iniziali sono entrambe nulle), ottenendo

$$l\dot{\vartheta}^2 = 2g \cos \vartheta .$$

Mettendo assieme si trova

$$\Phi = -2mg \cos \vartheta \mathbf{e}_r - mg \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + mg \mathbf{j} .$$

Convien decomporre \mathbf{j} in parte radiale e trasversa:

$$\mathbf{j} = -\cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta . \quad (*)$$

Si vede allora che la parte trasversa di Φ si annulla esattamente, mentre la sua parte radiale è

$$\Phi_r = -3mg \cos \vartheta .$$

Essendo puramente radiale, Φ è perpendicolare alla circonferenza, a riprova che il vincolo è ideale.

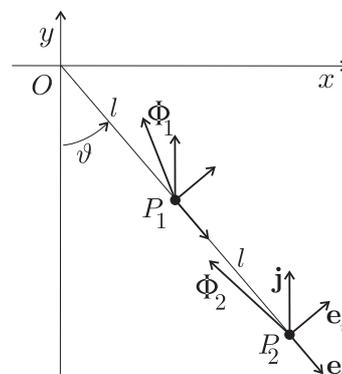
Problema 12 (calcolo di reazioni vincolari)

Un pendolo composto è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di ugual massa m , vincolati a giacere in un piano verticale e a stare allineati rispetto al punto di sospensione O , a distanza rispettivamente l e $2l$ da esso (v. figura).

1. Si scrivano le equazioni del vincolo e si verifichi che si tratta di un buon sistema olonomo a un grado di libertà (ci si restringa fin dall'inizio al piano xy).

Si supponga che il vincolo sia ideale e si assuma che l'unica forza attiva agente sul sistema sia la gravità; con riferimento alla coordinata lagrangiana ϑ indicata in figura, si consideri il moto con dato iniziale $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$.

2. Si determinino le reazioni vincolari Φ_1 , Φ_2 in corrispondenza a un generico angolo ϑ , e si verifichi a posteriori che la condizione di idealità del vincolo è soddisfatta.



Soluzione

Le equazioni del vincolo sono tre e si possono scrivere nella forma

$$x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0 , \quad x_2 - 2x_1 = 0 , \quad y_2 - 2y_1 = 0 ; \quad (*)$$

la matrice con le derivate delle tre espressioni rispetto alle quattro coordinate dei punti è

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sulla varietà vincolare, ovvero dove le (*) sono soddisfatte, la matrice ha sempre rango 3: si ha infatti una caduta di rango solo per $x_1 = y_1 = 0$, ma per la prima delle (*) x_1 e y_1 non possono annullarsi contemporaneamente.

Per ciascun punto materiale la reazione vincolare è data (come nel problema precedente) da

$$\Phi_i = m \mathbf{a}_i + mg \mathbf{j} ,$$

con \mathbf{j} versore verticale ascendente, inoltre si ha

$$\mathbf{a}_1 = l\ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - l\dot{\vartheta}^2 \mathbf{e}_r , \quad \mathbf{a}_2 = 2 \mathbf{a}_1 .$$

Procedendo come nel problema precedente, usiamo l'equazione di Lagrange per il primo termine a secondo membro di \mathbf{a}_1 e la conservazione dell'energia, unita alla conoscenza del dato iniziale, per il secondo termine. La lagrangiana del sistema è

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{5}{2} ml^2 \dot{\vartheta}^2 + 3mgl \cos \vartheta ,$$

e corrispondentemente l'equazione del moto si scrive

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{3}{5} \frac{g}{l} \sin \vartheta .$$

Dalla conservazione dell'energia si ricava poi subito

$$l\dot{\vartheta}^2 = \frac{6}{5} g \cos \vartheta .$$

Mettendo assieme, usando per \mathbf{j} la decomposizione (*) del problema precedente, si trova facilmente

$$\Phi_1 = mg \left[-\frac{11}{5} \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \frac{2}{5} \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \right] , \quad \Phi_2 = mg \left[-\frac{17}{5} \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \frac{1}{5} \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \right] .$$

A differenza del precedente problema 11, le due forze non sono puramente radiali, dunque non sono individualmente perpendicolari alle circonferenze su cui stanno P_1 e P_2 . Del resto, non è questa la condizione di idealità del vincolo, che non richiede che (per ogni moto virtualmente compatibile col vincolo) siano singolarmente nulle le potenze delle reazioni vincolari (come sarebbe se Φ_1 e Φ_2 fossero puramente radiali), ma solo che sia nulla la potenza complessiva. Questa si scrive

$$W = \Phi_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \Phi_2 \cdot \mathbf{u}_2 .$$

Tenendo conto che per ogni moto compatibile coi vincoli le velocità \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono entrambe trasverse, e inoltre $\mathbf{u}_2 = 2 \mathbf{u}_1$, è immediato verificare che effettivamente risulta $W = 0$.

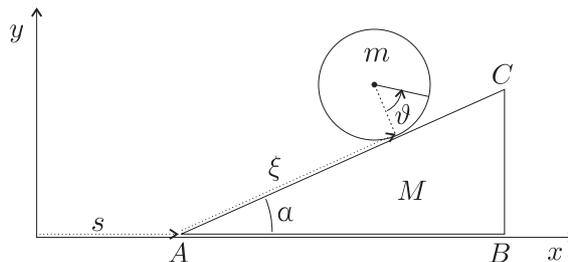
- La presenza di reazioni vincolari trasverse ci mette di fronte a un fatto non banale, gli “sforzi di taglio”, che non potrebbero essere sopportati da un filo flessibile ma richiedono invece un'asticella rigida, sebbene di spessore trascurabile. L'asticella non si flette grazie a momenti non nulli, che nel limite (delicato) di asticella di spessore trascurabile richiedono forze che divergono come l'inverso dello spessore.

Problema 13 (*costanti del moto in sistemi lagrangiani*)

Un triangolo rettangolo ABC di massa M può scivolare in un piano xy verticale, con asse y verticale ascendente, mantenendo il cateto AB appoggiato all'asse x ; l'ipotenusa AC forma con il cateto AB un angolo assegnato α . Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'ipotenusa, mantenendosi anch'esso nel piano xy . Sul sistema agisce la gravità.

Con riferimento alle coordinate libere s e ξ indicate in figura,

1. si scriva la lagrangiana del sistema;
2. si determinino due costanti del moto, scrivendone l'espressione analitica in termini delle coordinate libere.

**Soluzione**

L'energia cinetica di M è con evidenza $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$. Per il disco dobbiamo usare il teorema di König. Per l'energia del baricentro, denotando con \mathbf{v} la velocità del suo centro e con \mathbf{u} il versore dell'ipotenusa, si trova

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{i} + \dot{\xi} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}^2 = \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 + 2 \cos \alpha \dot{s} \dot{\xi};$$

per l'energia del moto relativo al baricentro, qui la rotazione del disco attorno all'asse centrale, ricordando la relazione cinematica di puro rotolamento $\dot{\xi} + R\dot{\vartheta} = 0$ si trova

$$\frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{\xi}^2.$$

L'energia cinetica del sistema è allora

$$K = \frac{1}{2}[(M + m)\dot{s}^2 + \frac{3}{2}m\dot{\xi}^2 + 2m \cos \alpha \dot{s} \dot{\xi}].$$

L'energia potenziale è poi

$$V = mg \sin \alpha \xi + \text{cost}$$

e la lagrangiana è $L = K - V$. Si osserva che:

- (a) L non contiene la coordinata s ; corrispondentemente si conserva il momento coniugato ad s ,

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = (M + m)\dot{s} + m \cos \alpha \dot{\xi},$$

che con evidenza rappresenta la componente x della quantità di moto del sistema.

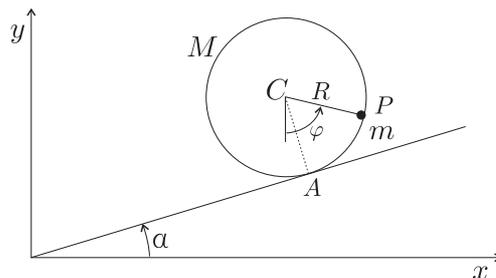
- (b) L non dipende da t , perciò si conserva l'energia

$$E = K + V.$$

Problema 14 (stabilità dell'equilibrio in sistemi lagrangiani; biforcazioni)

Un disco di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su di un piano inclinato caratterizzato da un angolo di inclinazione α ; un punto materiale P di massa m è fissato al bordo del disco (v. figura). Sul sistema agisce la gravità. Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo φ tra la verticale discendente e il raggio del disco corrispondente a P , come illustrato in figura.

1. Per M , m , R fissati, e α variabile nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità, tracciando il grafico della biforcazione.
2. Si tracci, schematicamente, il ritratto in fase nelle diverse condizioni: $\alpha = 0$, $|\alpha|$ sufficientemente piccolo, $|\alpha|$ sufficientemente grande.

**Soluzione**

Tutte le domande riguardano l'equilibrio, perciò basta considerare la forma dell'energia potenziale mentre la parte cinetica della lagrangiana non gioca alcun ruolo (servirebbe invece l'espressione della matrice cinetica se, ad esempio, fosse chiesto di fare un calcolo della pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile).

Denotiamo con C il centro del disco, con A il punto di contatto tra il disco e il piano inclinato, con s un'ascissa lungo il piano inclinato. Per la condizione di puro rotolamento si ha evidentemente $s_A = -R\varphi + \text{cost}$ e dunque $y_A = -R\varphi \sin \alpha + \text{cost}$; ma $y_C = y_A + \text{cost}$, perciò

$$y_C = -R\varphi \sin \alpha + \text{cost} .$$

Per il punto P si ha poi $y_P = y_C - R \cos \varphi$; segue subito per l'energia potenziale $V = Mgy_C + mgy_P$ l'espressione

$$V(\varphi) = -(M + m)gR \sin \alpha \varphi - mgR \cos \varphi .$$

Si osservi che l'energia potenziale non è periodica in φ — se φ avanza di 2π il sistema non riprende la configurazione iniziale — ma è periodica la derivata prima

$$V'(\varphi) = -(M + m)gR \sin \alpha + mgR \sin \varphi ,$$

perciò le configurazioni di equilibrio saranno periodiche.

Le configurazioni di equilibrio si ottengono azzerando V' . Si trova

$$\sin \varphi = \frac{M + m}{m} \sin \alpha ,$$

pertanto vi sono soluzioni se

$$|\sin \alpha| \leq \frac{m}{M + m} ,$$

ovvero per

$$-\alpha^* \leq \alpha \leq \alpha^* \quad \text{ove} \quad \alpha^* = \arcsin \frac{m}{M + m} ,$$

e le soluzioni a loro volta sono

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^*(\alpha) + 2k\pi & \text{(a)} \\ \pi - \varphi^*(\alpha) + 2k\pi & \text{(b)} \end{cases}$$

con

$$\varphi^*(\alpha) = \arcsin\left(\frac{M+m}{m} \sin \alpha\right).$$

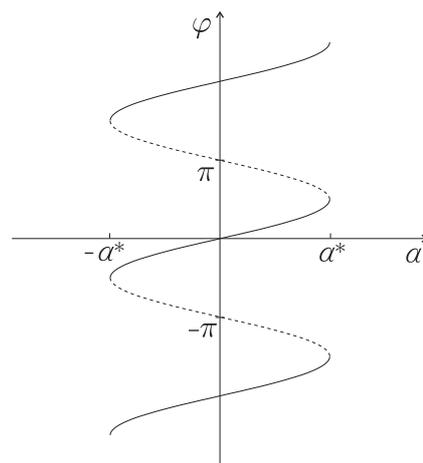
Per $\alpha = \pm\alpha^*$, le soluzioni di tipo (a) e (b) coincidono in $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

La stabilità di queste soluzioni si studia guardando il segno della derivata seconda di V ,

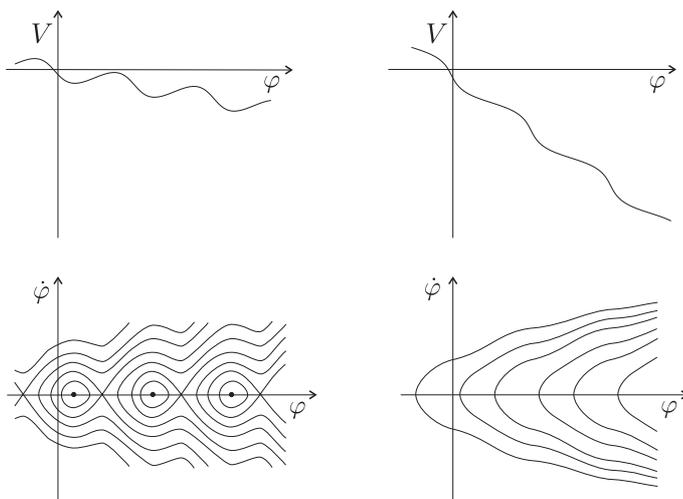
$$V''(\varphi) = mgr \cos \varphi.$$

Si vede che l'equilibrio è stabile se $\cos \varphi > 0$, mentre è instabile se $\cos \varphi < 0$; la teoria non dà invece una risposta immediata nel caso limite $\cos \varphi = 0$.

Sono allora stabili le soluzioni di tipo (a), e instabili le soluzioni di tipo (b), quando sono distinte, mentre resta incerto il caso limite $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$ in cui coincidono. Il grafico della biforcazione ha la forma curiosa riportata nella figura qui di fianco; la figura è ottenuta connettendo tra loro i diversi rami della funzione \arcsin (con la solita convenzione di tracciare curve piene per gli equilibri stabili e tratteggiate per quelli instabili). Si osservi che per $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ vi sono biforcazioni tangenti, dirette e inverse.



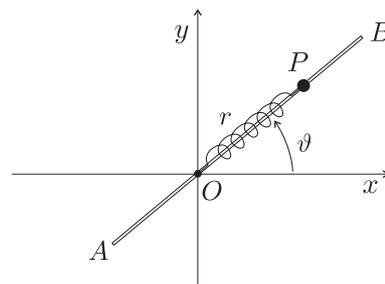
Per $\alpha = 0$, potenziale e ritratto in fase sono esattamente quelli del pendolo, perciò non li tracciamo. La figura qui sotto, a sinistra e destra, riproduce invece il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase rispettivamente per $0 < \alpha < \alpha^*$ e per $\alpha^* < \alpha$. In entrambi i casi il potenziale è la somma di una sinusoidale con una retta. Quando la pendenza della retta è bassa, la curva risultante mantiene la struttura a massimi e minimi della sinusoidale; quando è più alta, massimi e minimi scompaiono. Più precisamente, come è tipico della biforcazione tangente, massimi e minimi collasano insieme a formare un flesso orizzontale; il corrispondente punto di equilibrio (sul quale, come già si è osservato, l'analisi della derivata seconda di V non dice niente) è con evidenza instabile. Per esercitarsi sulla nozione di stabilità, si suggerisce di dimostrarlo formalmente.



Problema 15 (*stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione*)

Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $3l$ è libera di ruotare in un piano verticale xy , con asse y verticale ascendente, attorno a un asse fisso passante per il punto O a distanza l da un suo estremo. Un punto materiale P di ugual massa m , libero di scorrere sulla retta dell'asta, è legato a O da una forza elastica di costante elastica k . Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane $r =$ ascissa di P su AB e $\vartheta =$ angolo tra l'asse x e AB ,

1. si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità;
2. per $k = mg/l$ si calcolino le pulsazioni dei modi normali di oscillazione attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

**Soluzione**

Per determinare le configurazioni di equilibrio è sufficiente scrivere l'energia potenziale, che comprende due termini gravitazionali (per l'asta e per P) e un termine elastico. Si trova subito, ricordando che il baricentro dell'asta si trova a distanza $\frac{1}{2}l$ da O ,

$$V(r, \vartheta) = mg\left(\frac{1}{2}l + r\right) \sin \vartheta + \frac{1}{2}kr^2 .$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$, ovvero

$$mg \sin \vartheta + kr = 0 , \quad mg\left(\frac{1}{2}l + r\right) \cos \vartheta = 0 .$$

La seconda equazione è risolta da

$$\cos \vartheta = 0 , \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{2} ,$$

oppure da

$$r = -\frac{l}{2} .$$

Nel primo caso, sostituendo ϑ nella prima equazione, si trova subito r , e si hanno le due soluzioni

$$(r, \vartheta) = \left(-\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right) .$$

Nel secondo caso, sostituendo r nella prima equazione, si trova

$$\sin \vartheta = \frac{kl}{2mg} ,$$

e purché sia soddisfatta la condizione di esistenza $\frac{kl}{2mg} \leq 1$ si trovano le altre due soluzioni

$$(r, \vartheta) = \left(-\frac{1}{2}l, \vartheta^*\right), \left(-\frac{1}{2}l, \pi - \vartheta^*\right), \quad \vartheta^* = \arcsin \frac{kl}{2mg} .$$

Per l'analisi della stabilità si calcola innanzitutto la matrice hessiana V'' di V , che risulta essere

$$V''(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} k & mg \cos \vartheta \\ mg \cos \vartheta & -mg\left(\frac{1}{2}l + r\right) \sin \vartheta \end{pmatrix} .$$

Segue allora:

$$V''\left(\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\left(\frac{l}{2} + \frac{mg}{k}\right) \end{pmatrix};$$

la matrice è chiaramente definita positiva, dunque V in questo punto ha un minimo, e l'equilibrio è stabile, per ogni valore dei parametri. Si ha poi

$$V''\left(-\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mg\left(\frac{l}{2} - \frac{mg}{k}\right) \end{pmatrix},$$

da cui si vede che V in questo punto ha un minimo per $\frac{kl}{2mg} < 1$ mentre ha una sella (la matrice è indefinita) per $\frac{kl}{2mg} > 1$; nel primo caso l'equilibrio è stabile, nel secondo è instabile. Vale la pena di osservare che nel primo caso il baricentro di tutto il sistema sta sotto il punto di sospensione O , nel secondo sta sopra.

Infine si ha

$$V''\left(-\frac{l}{2}, \vartheta^*\right) = \begin{pmatrix} k & mg \cos \vartheta^* \\ mg \cos \vartheta^* & 0 \end{pmatrix},$$

dunque V in questo punto ha una sella e l'equilibrio è instabile. Lo stesso risultato vale evidentemente per $(-\frac{l}{2}, \pi - \vartheta^*)$.

Per calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni occorre la matrice cinetica. Si trova subito

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + (I + mr^2)\dot{\vartheta}^2), \quad a = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I + mr^2 \end{pmatrix},$$

avendo denotato con I il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione; per il teorema di Steiner si ha

$$I = \frac{1}{12}m(3l)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2.$$

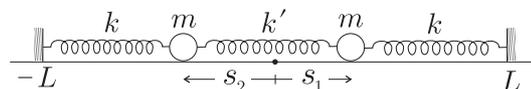
Poiché sia a che V'' nelle configurazioni di equilibrio interessanti sono diagonali, il calcolo delle pulsazioni è banale, e i due modi normali consistono in oscillazioni della sola r o della sola ϑ attorno al valore di equilibrio. Le pulsazioni, per $k = mg/l$, si trovano essere

$$\begin{aligned} \omega_r^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\vartheta^2 = \frac{3g}{4l} & \quad \text{nel punto} \quad \left(\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \omega_r^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\vartheta^2 = \frac{g}{2l} & \quad \text{nel punto} \quad \left(-\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Problema 16 (stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione)

Il sistema meccanico rappresentato in figura è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 vincolati a una retta, su cui agiscono tre forze elastiche: due di esse, di ugual costante elastica k , legano P_1 e P_2 ai punti di ascissa $\pm L$, mentre la terza, di costante elastica k' , lega tra loro i due punti. Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane s_1 e s_2 indicate in figura, si determini la configurazione di equilibrio del sistema, si verifichi che essa è stabile, si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad essa e si descrivano i modi normali di oscillazione. Si scriva infine la soluzione generale

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \dots \\ s_2(t) &= \dots \end{aligned}$$



Soluzione

L'energia potenziale è

$$V = \frac{1}{2}k(L - s_1)^2 + \frac{1}{2}k(L - s_2)^2 + \frac{1}{2}k'(s_1 + s_2)^2 .$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $\frac{\partial V}{\partial s_h} = 0$, ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = -k(L - s_1) + k'(s_1 + s_2) = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial s_2} = -k(L - s_2) + k'(s_1 + s_2) = 0 ;$$

la soluzione è $s_1 = s_2 = s^*$,

$$s^* = \frac{k}{k + 2k'} L .$$

La matrice hessiana di V è

$$V'' = \begin{pmatrix} k + k' & k' \\ k' & k + k' \end{pmatrix}$$

costante, cosicché non è necessario andarla a valutare nella configurazione di equilibrio. La matrice è definita (infatti $\det V'' > 0$) ed è definita positiva perchè la diagonale è positiva. Pertanto (s^*, s^*) è un minimo di V e l'equilibrio è stabile.

Per studiare le piccole oscillazioni occorre la matrice cinetica. L'energia cinetica è con evidenza $K = \frac{m}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2)$, pertanto

$$a = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} .$$

Le matrici A e B che entrano nell'equazione agli autovalori generalizzata

$$B \mathbf{u} = \lambda A \mathbf{u}$$

coincidono rispettivamente con a e V'' costanti. Gli autovalori sono soluzione dell'equazione secolare $\det(B - \lambda A) = 0$, ovvero

$$(k + k' - \lambda m)^2 - k'^2 = 0 , \quad \text{cioè} \quad k + k' - \lambda m = \pm k' ,$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} , \quad \lambda_2 = \frac{k + 2k'}{m} .$$

Le pulsazioni sono allora $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2$. L'autovettore $\mathbf{u}^{(1)}$ corrispondente all'autovalore λ_1 è soluzione di $(B - \lambda_1 A) \mathbf{u}^{(1)} = 0$,

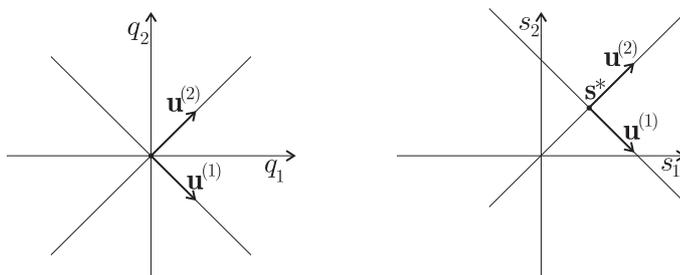
$$\begin{pmatrix} k' & k' \\ k' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} ;$$

si trova

$$\mathbf{u}^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

con c opportuna costante utilizzabile per la normalizzazione. Imponendo $A \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 1$ si trova subito $c = 1/\sqrt{2m}$, ma il valore di c è a tutti i fini irrilevante (prendere $c = 1$, rinunciando alla normalizzazione, non ha alcuna conseguenza significativa). Allo stesso modo si trova facilmente

$$\mathbf{u}^{(2)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



Denotando $q_i = s_i - s^*$ (cioè spostando l'origine delle coordinate libere sulla configurazione di equilibrio) i due modi normali di oscillazione sono

$$\mathcal{A}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \mathbf{u}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

con \mathcal{A}_i, φ_i costanti arbitrarie. Pertanto la soluzione generale (contenente quattro costanti arbitrarie) si scrive

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \mathbf{u}^{(2)},$$

ovvero (prendendo $c = 1$)

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2(t) &= -\mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

nelle coordinate q_1, q_2 , e

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s^* + \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ s_2(t) &= s^* - \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

nelle coordinate originali s_1, s_2 . I modi normali di oscillazione, sia nel piano $q_1 q_2$ che nel piano $s_1 s_2$, sono rettilinei; si veda la figura. Si osservi che applicando questa procedura si trova, in generale, solo la soluzione del problema linearizzato, e non la soluzione esatta: ma in questo caso la lagrangiana è già una forma quadratica, senza bisogno di troncamento, e le corrispondenti equazioni di Lagrange sono già lineari; pertanto la soluzione trovata è anche la soluzione generale del problema di partenza.

Commenti.

I modi normali si interpretano facilmente: il primo ($\mathcal{A}_1 \neq 0, \mathcal{A}_2 = 0$) ha $s_1(t) + s_2(t) = 2s^*$ costante, dunque questo particolare moto ci sarebbe anche nel problema soggetto all'ulteriore vincolo $s_1(t) + s_2(t) = 2s^*$ (un'asticella di massa trascurabile tiene i due punti a distanza fissata $2s^*$). Ma per questo problema, denotando $s = s_1$, si ha banalmente $K = \frac{1}{2}(2m)\dot{s}^2$, $V = \frac{1}{2}(2k)s^2$, e dunque $\omega^2 = k/m$. Per il secondo modo normale si ha invece $s_1(t) = s_2(t)$, pertanto il punto centrale della "molla" intermedia è sempre sull'origine. Ma allora lo stesso movimento esiste nel problema in cui, al posto di un'unica forza elastica di costante k' che lega tra loro i due punti, vi sono due forze elastiche di costante $2k'$ ciascuna, che legano separatamente P_1 e P_2 all'origine (la costante elastica raddoppia, perchè la stessa forza si deve ora ottenere con spostamento dimezzato; mezza molla ha costante elastica doppia di una molla intera). Ciascuno dei due punti è allora soggetto a un potenziale $V = \frac{1}{2}(k + 2k')s^2$, e la pulsazione è $\omega = \sqrt{(k + 2k')/m}$.

Un modo alternativo di risolvere il problema, che sfrutta la sua simmetria, consiste nello scrivere le equazioni del moto per q_1 e q_2 , che sappiamo essere¹

$$A \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ovvero

$$m\ddot{q}_1 = -kq_1 + k'(q_2 + q_1) , \quad m\ddot{q}_2 = -kq_2 + k'(q_2 + q_1) .$$

Sommando e sottraendo, le equazioni si disaccoppiano:

$$m(q_1 + q_2)'' = -(k + 2k')(q_1 + q_2) , \quad m(q_1 - q_2)'' = -k(q_1 - q_2) ;$$

si hanno allora le soluzioni

$$q_1(t) + q_2(t) = \mathcal{A}_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) , \quad q_1(t) - q_2(t) = \mathcal{A}_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) ,$$

e dunque

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2} [\mathcal{A}_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \mathcal{A}_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} [\mathcal{A}_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \mathcal{A}_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)] . \end{aligned}$$

Con ovvia identificazione delle costanti la soluzione coincide con quella trovata precedentemente.

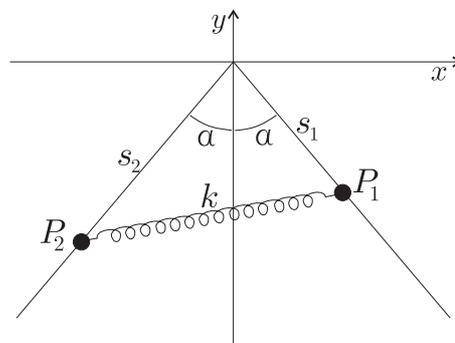
Problema 17 (stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione)

Il sistema meccanico illustrato in figura è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di ugual massa m , vincolati a due semirette giacenti in un piano verticale Oxy con asse y verticale ascendente, con origine in O , formanti angoli $\pm\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, con il semiasse y negativo. Sul sistema agiscono la gravità e una forza elastica, di costante elastica k , che lega tra loro i due punti.

Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane s_1 e s_2 indicate in figura,

1. si mostri che il sistema ha un'unica configurazione di equilibrio che risulta essere stabile e si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad essa;
2. si scriva l'integrale generale del sistema:

$$s_1(t) = \dots , \quad s_2(t) = \dots$$



¹Lo si sa dalla teoria. Oppure: si scrivono le equazioni di lagrange per s_1, s_2 e si sostituisce $s_i = s^* + q_i$; i termini costanti necessariamente si annullano, perché $q_1 = q_2 = 0$ deve essere soluzione.

Soluzione

L'energia potenziale del sistema è

$$V = -mg \cos \alpha (s_1 + s_2) + \frac{1}{2} k d^2$$

ove d è la distanza tra P_1 e P_2 ,

$$d^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos 2\alpha .$$

Pertanto

$$V = -mg \cos \alpha (s_1 + s_2) + \frac{1}{2} k (s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos 2\alpha) .$$

La configurazione di equilibrio si determina uguagliando a zero le due derivate parziali di V rispetto a s_1 e s_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_1} &= -mg \cos \alpha + k(s_1 - s_2 \cos 2\alpha) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial s_2} &= -mg \cos \alpha + k(s_2 - s_1 \cos 2\alpha) = 0 . \end{aligned}$$

Il sistema è lineare e ammette un'unica soluzione, precisamente

$$s_1^* = s_2^* = \frac{mg}{k} \frac{\cos \alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

(giustamente per $\alpha \rightarrow 0$ si ha $s_1^*, s_2^* \rightarrow \infty$). La matrice delle derivate seconde di V è costante e risulta essere

$$B = k \begin{pmatrix} 1 & -\cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix} ;$$

grazie alla condizione $0 < \alpha < \pi/2$, B è definita positiva, pertanto la configurazione di equilibrio è stabile.

Per trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni ci occorre anche la matrice cinetica nella configurazione di equilibrio. Con evidenza l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) ,$$

pertanto la matrice cinetica è anch'essa costante e precisamente ha l'espressione elementare

$$A = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione secolare $\det(B - \lambda A) = 0$ si scrive allora

$$(k - \lambda m)^2 - k^2 \cos^2 2\alpha = 0 \quad \text{ovvero} \quad k - \lambda m = \pm k \cos 2\alpha ,$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} (1 + \cos 2\alpha) , \quad \lambda_2 = \frac{k}{m} (1 - \cos 2\alpha) .$$

Le pulsazioni sono poi

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} , \quad i = 1, 2 .$$

Per scrivere l'integrale generale del sistema conviene spostare l'origine nella configurazione di equilibrio, ponendo

$$s_i = s_i^* + q_i, \quad i = 1, 2.$$

La teoria ci insegna allora che, posto $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, l'integrale generale in termini di queste variabili ha l'espressione

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \mathbf{u}^{(2)}, \quad (*)$$

ove $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$, sono gli autovettori (nel senso generalizzato) corrispondenti a λ_1 e λ_2 , cioè le soluzioni di

$$(B - \lambda_i A) \mathbf{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Si trova subito

$$\mathbf{u}^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ove c_1, c_2 sono costanti qualsiasi che all'occorrenza si possono usare per la normalizzazione di $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$: ma non ce n'è bisogno, data la presenza della costanti arbitrarie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ in (*), e si può prendere ad esempio $c_1 = c_2 = 1$. Sostituendo $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$ in (*), e aggiungendo s_1^* e s_2^* , si trova infine l'integrale generale in termini delle variabili originarie s_1 e s_2 :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s^* + \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ s_2(t) &= s^* - \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Il primo modo normale ($\mathcal{A}_2 = 0$) vede P_1 e P_2 muoversi in verso opposto; nel secondo invece ($\mathcal{A}_1 = 0$) P_1 e P_2 mantengono sempre la stessa altezza. Si osservi che, essendo già lineari le equazioni del moto, la soluzione trovata è quella vera, senza approssimazioni. Un'altra osservazione che si può fare è che nel caso particolare $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (semirette s_1 e s_2 perpendicolari) si ha $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k/m}$; tutti i moti allora sono periodici e possono essere presi come modi normali (la scelta di $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$ diventa arbitraria).

Problema 18 (stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione)

Si riconsideri il pendolo doppio già introdotto nel problema 6. Dopo aver verificato che $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è configurazione di equilibrio stabile, si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad essa e si descrivano i modi normali di oscillazione, scrivendo anche la soluzione generale del sistema linearizzato.

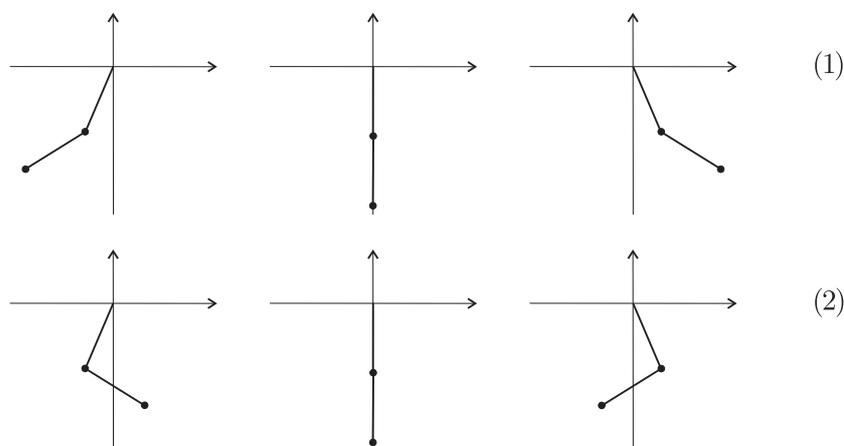
Soluzione

Dall'espressione già calcolata dell'energia potenziale si vede immediatamente che $(0, 0)$ è configurazione di equilibrio stabile, con

$$B = V''(0, 0) = mgl \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dall'espressione già calcolata della matrice cinetica si ha poi

$$A = a(0, 0) = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



L'equazione secolare per la ricerca delle pulsazioni è allora

$$ml^2 \begin{pmatrix} 2\Omega^2 - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \Omega^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \Omega^2 = \frac{g}{l},$$

ovvero $2(\Omega^2 - \lambda)^2 - \lambda^2 = 0$, che si risolve a vista: $\sqrt{2}(\Omega^2 - \lambda) = \pm\lambda$, da cui

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\Omega^2, \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\Omega^2.$$

Le pulsazioni sono ovviamente $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2$.

Per trovare i modi normali di oscillazione dobbiamo determinare gli autovettori \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , che sono soluzioni di

$$(B - \lambda_i A) \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Pochi passaggi danno come risultato

$$\mathbf{u}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

con c costante arbitraria che può essere usata per la normalizzazione ma che si può anche prendere uguale a uno. La soluzione generale del sistema linearizzato si scrive subito:

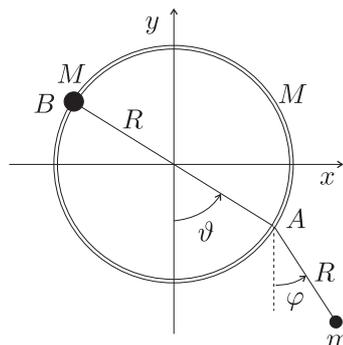
$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \varphi(t) &= \sqrt{2} \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \sqrt{2} \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

I due modi normali di oscillazione sono rappresentati schematicamente in figura: per entrambi l'angolo φ oscilla con ampiezza maggiore dell'angolo ϑ per un fattore $\sqrt{2}$; in fase per il primo modo, in controfase per il secondo. La sovrapposizione dei due modi con ampiezze arbitrarie \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 dà la soluzione generale.

Problema 19 (*stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione*)

Un anello di massa M e raggio R può ruotare attorno al suo asse centrale ortogonale, fisso e orizzontale. Un pendolo di massa $m < M$ e lunghezza R è sospeso a un punto A dell'anello; un punto materiale di massa M è invece fissato al punto B dell'anello diametralmente opposto a A (v. figura). Sul sistema agisce la gravità. Con riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ e φ indicate in figura,

1. si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità;
2. si scriva la matrice cinetica del sistema;
3. assumendo $M = 2m$ si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

**Soluzione**

L'energia potenziale del sistema è

$$V = MgR \cos \vartheta - mgR(\cos \vartheta + \cos \varphi) = (M - m)gR \cos \vartheta - mgR \cos \varphi .$$

Le soluzioni di equilibrio si trovano allora imponendo

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -(M - m)gR \sin \vartheta = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR \sin \varphi = 0 .$$

Si hanno quattro soluzioni, corrispondenti ad altrettante configurazioni di equilibrio,

$$(\vartheta^*, \varphi^*) = (0, 0) , (0, \pi) , (\pi, 0) , (\pi, \pi) .$$

La matrice hessiana di V è diagonale,

$$V''(\vartheta, \varphi) = gR \begin{pmatrix} -(M - m) \cos \vartheta & 0 \\ 0 & m \cos \varphi \end{pmatrix} .$$

Si ha stabilità nei punti in cui entrambi gli elementi diagonali sono positivi, pertanto (per $M > m$) l'unica configurazione di equilibrio stabile è $(\pi, 0)$.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si ha

$$K_{\text{anello}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 , \quad K_B = \frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 ,$$

mentre per m si ha (vedi esercizio 6)

$$K_m = \frac{1}{2}mR^2[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2 \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}] ;$$

mettendo assieme:

$$K = \frac{1}{2}R^2[(2M + m)\dot{\vartheta}^2 + m\dot{\varphi}^2 + 2m \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}]$$

$$a(\vartheta, \varphi) = R^2 \begin{pmatrix} 2M + m & m \cos(\vartheta - \varphi) \\ m \cos(\vartheta - \varphi) & m \end{pmatrix} .$$

E' immediato verificare che per ogni valore di ϑ, φ la matrice è definita positiva.

Prendiamo ora $M = 2m$. In corrispondenza alla configurazione di equilibrio stabile $(\pi, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} A &= a(\pi, 0) = mR^2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= V''(\pi, 0) = mgR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perciò si ha

$$B - \lambda A = mR^2 \begin{pmatrix} \Omega^2 - 5\lambda & \lambda \\ \lambda & \Omega^2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 = \frac{g}{R},$$

e l'equazione per λ , $\det(B - \lambda A) = 0$, è

$$4\lambda^2 - 6\Omega^2\lambda + \Omega^4 = 0.$$

Le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \Omega^2$$

(entrambe positive: B infatti è definita positiva). Le pulsazioni sono poi $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

L'esercizio si può continuare cercando i modi normali di oscillazione e la soluzione generale del sistema linearizzato. Procedendo come nell'esercizio precedente (di cui questo è una variazione senza novità concettuali) si trova senza difficoltà, per $M = 2m$,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{5} \end{pmatrix},$$

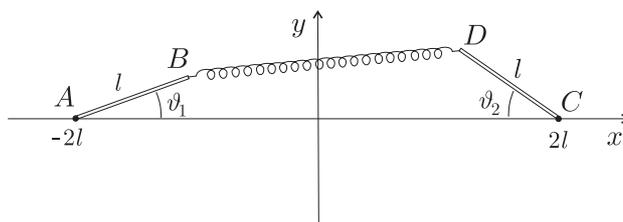
e dunque

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \pi \\ \varphi(t) &= (2 + \sqrt{5}) \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (2 - \sqrt{5}) \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Problema 20 (stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione)

Due aste AB e CD di ugual massa m e lunghezza l , disposte in un piano xy orizzontale, possono ruotare, come indicato in figura, attorno agli estremi A e C , fissati sull'asse x nei punti di ascissa $\pm 2l$. Sul sistema agisce una forza elastica di costante elastica k che lega tra loro gli estremi liberi B e D delle aste. Con riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ_1 e ϑ_2 indicate in figura,

1. si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità;
2. si calcolino le pulsazioni dei modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile;



3. si scrivano le equazioni del moto linearizzate attorno alla configurazione di equilibrio stabile e se ne trovi l'integrale generale.

Soluzione

L'energia potenziale del sistema è

$$V = \frac{1}{2}kd^2,$$

ove d denota la distanza tra C e D . Si trova subito

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2[(4 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)^2 + (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)^2] \\ &= 2l^2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - 4(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)] + \text{cost} \end{aligned}$$

e dunque, trascurando la costante,

$$V = kl^2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - 4(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)].$$

Per la ricerca delle configurazioni di equilibrio si deve risolvere il sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \vartheta_1} &= kl^2[-\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 4\sin \vartheta_1] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} &= kl^2[-\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 4\sin \vartheta_2] = 0. \end{aligned}$$

Per differenza si trova subito $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2$, da cui

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 \quad \text{oppure} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi.$$

Caso $\vartheta_1 = \vartheta_2$: segue $-\sin 2\vartheta_1 + 4\sin \vartheta_1 = 0$, cioè

$$\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - 2\sin \vartheta_1 = 0,$$

risolta da $\sin \vartheta_1 = 0$, ovvero $\vartheta_1 = 0, \pi$ (la soluzione $\cos \vartheta_1 = 2$ evidentemente non è accettabile). Ciò fornisce due configurazioni di equilibrio, $(0, 0)$ e (π, π) .

Caso $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi$: segue $\sin \vartheta_1 = 0$, ovvero $\vartheta_1 = 0, \pi$, e ciò fornisce due altre configurazioni di equilibrio, $(0, \pi)$ e $(\pi, 0)$. In conclusione le configurazioni di equilibrio sono quattro:

$$(0, 0), \quad (\pi, \pi), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0).$$

Il risultato corrisponde bene all'intuizione. Anzi: senza bisogno di svolgere alcun calcolo, semplicemente guardando la figura, si sarebbe potuto dire che d , e di conseguenza V , è minima in $(0, 0)$ e massima in (π, π) , pertanto queste due configurazioni sono sicuramente di equilibrio, e anzi, possiamo prevedere che la prima risulterà stabile e la seconda instabile.

Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate calcoliamo la matrice hessiana V'' di V :

$$V'' = kl^2 \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 4\cos \vartheta_1 & -\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 4\cos \vartheta_2 \end{pmatrix}.$$

Segue facilmente

$$\begin{aligned} V''(0,0) &= kl^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{def. positiva, stabile} \\ V''(\pi,\pi) &= kl^2 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} && \text{def. negativa, instabile} \\ V''(0,\pi) &= kl^2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} && \text{indefinita, instabile} \\ V''(\pi,0) &= kl^2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} && \text{indefinita, instabile.} \end{aligned}$$

L'unica configurazione di equilibrio stabile (come suggerisce l'intuizione) è $(0,0)$. Per il calcolo delle pulsazioni in $(0,0)$ ci serve la matrice cinetica. Ricordando che il momento di inerzia delle aste rispetto all'asse fisso di rotazione è $\frac{1}{3}ml^2$, si trova subito

$$K = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2), \quad a = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica è costante, pertanto non occorre calcolarla in $(0,0)$, e la matrice A che entra nell'equazione secolare per la ricerca delle pulsazioni, $\det(B - \lambda A) = 0$, è a stessa, mentre $B = V''(0,0)$. L'equazione per λ è allora

$$(3k - \frac{1}{3}\lambda m)^2 - k^2 = 0, \quad \text{ovvero} \quad 3k - \frac{1}{3}\lambda m = \pm k.$$

Le soluzioni sono

$$\lambda_1 = 6\Omega^2, \quad \lambda_2 = 12\Omega^2, \quad \text{con} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m},$$

e poi naturalmente $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2$.

Le equazioni del moto linearizzate attorno a $(0,0)$ sono, secondo la teoria,

$$A \begin{pmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = 0,$$

e si trova subito

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_1 + 9\Omega^2\vartheta_1 - 3\Omega^2\vartheta_2 &= 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 - 3\Omega^2\vartheta_1 + 9\Omega^2\vartheta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo (come è tipico dei casi simmetrici) le equazioni si disaccoppiano:

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 + \vartheta_2)'' + 6\Omega^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= 0 \\ \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t) &= A_+ \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 - \vartheta_2)'' + 12\Omega^2(\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0 \\ \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t) &= A_- \cos(\omega_2 t + \varphi_2); \end{aligned}$$

$A_+, A_-, \varphi_1, \varphi_2$ sono costanti arbitrarie. La soluzione generale è così

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \vartheta_2(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

con $A_1 = \frac{1}{2}A_+$, $A_2 = \frac{1}{2}A_-$.

Per la soluzione generale si poteva, alternativamente, far ricorso al metodo generale, cioè calcolare gli autovettori $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$, che risolvono $(B - \lambda_i A) \mathbf{u}^{(i)} = 0$ e risultano essere (a meno dell'inessenziale normalizzazione)

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e poi applicare l'espressione generale

$$\vartheta_i(t) = A_1 \cos(\omega_1 + \varphi_1) u_i^{(1)} + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) u_i^{(2)}, \quad i = 1, 2.$$

Problema 21 (modi normali di oscillazione; reazioni vincolari)

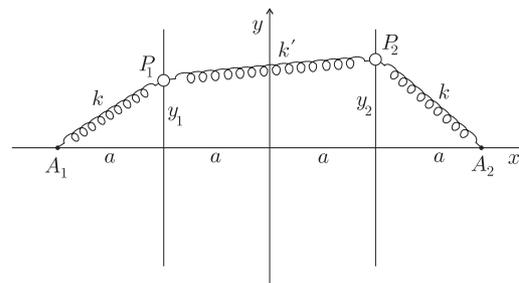
Due punti materiali P_1 e P_2 , di ugual massa m , sono vincolati alle rette di equazione $x = -a$ e rispettivamente $x = a$ di un piano cartesiano verticale xy , con asse y verticale ascendente. Sul sistema agiscono, oltre alla gravità, due forze elastiche di ugual costante elastica k legano P_1 e P_2 ai punti $A_1 = (-2a, 0)$ e $A_2 = (2a, 0)$. Una terza forza elastica di costante elastica k' lega tra loro i due punti. Prendendo come coordinate lagrangiane le ordinate y_1 e y_2 dei due punti,

1. si determini la configurazione di equilibrio, se ne studi la stabilità, e si calcoli la pulsazione dei modi normali di oscillazione attorno all'equilibrio;

2. si scriva l'integrale generale del sistema:

$$y_1(t) = \dots, \quad y_2(t) = \dots$$

3. si determini la reazione vincolare su P_1 e P_2 all'equilibrio.



Soluzione

L'energia cinetica è banalmente $K = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)$; l'energia potenziale a sua volta è

$$V = \frac{k}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{k'}{2}(y_2 - y_1)^2 + mg(y_1 + y_2) + \text{cost}.$$

La configurazione di equilibrio si trova imponendo che si annullino le derivate di V :

$$\begin{aligned} V'_1 &= ky_1 - k'(y_2 - y_1) + mg = 0 \\ V'_2 &= ky_2 + k'(y_2 - y_1) + mg = 0. \end{aligned}$$

Si trova immediatamente l'unica soluzione

$$y_1 = y_2 = -\frac{mg}{k}.$$

Sia la matrice cinetica che la matrice hessiana di V sono costanti e precisamente

$$A = \begin{pmatrix} m & \\ & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k + k' & -k' \\ -k' & k + k' \end{pmatrix}.$$

La matrice B è definita positiva: infatti $\det B > 0$ (la matrice è definita) inoltre gli elementi diagonali sono positivi (è definita positiva). Pertanto l'equilibrio è stabile.

L'analisi del sistema attorno all'equilibrio richiede di considerare la matrice

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} k + k' - \lambda m & -k' \\ -k' & k + k' - \lambda m \end{pmatrix}.$$

Le pulsazioni dei modi normali di oscillazione sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2},$$

ove λ_1, λ_2 sono le radici dell'equazione di secondo grado $\det(B - \lambda A) = 0$, cioè

$$(k - k' - \lambda m)^2 - k'^2 = 0.$$

L'equazione si risolve a vista, senza sviluppare il quadrato:

$$k + k' - \lambda m = \pm k' \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{k + 2k'}{m}.$$

Veniamo all'integrale generale. Denotiamo con $y^* = -mg/k$ il valore di equilibrio comune a y_1 e y_2 , e portiamo l'origine sulla configurazione di equilibrio passando alle variabili

$$q_1 = y_1 - y^*, \quad q_2 = y_2 - y^*.$$

La teoria ci insegna che in queste variabili l'integrale generale del sistema linearizzato si scrive

$$\mathbf{q} = \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \mathbf{u}^{(2)}$$

ove $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ sono gli autovettori soluzioni di

$$(B - \lambda_i A) \mathbf{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2,$$

mentre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \varphi_1, \varphi_2$ sono costanti arbitrarie di integrazione. Si trova facilmente, in corrispondenza ai valori λ_1, λ_2 determinati sopra,

$$\mathbf{u}^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con c_1, c_2 costanti qualsiasi utili, all'occorrenza, per normalizzare i vettori. Qui però, data la presenza delle costanti arbitrarie \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , la normalizzazione è superflua e si possono prendere c_1, c_2 qualsiasi, ad esempio $c_1 = c_2 = 1$. Scrivendo separatamente le componenti q_1 e q_2 di \mathbf{q} , e aggiungendo a ciascuna y^* , si trova l'integrale generale del sistema nelle variabili originarie y_1 e y_2 :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y^* + \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y_2(t) &= y^* + \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Dal momento che la lagrangiana è già quadratica, senza bisogno di troncamento, sistema vero e sistema linearizzato coincidono: pertanto, la soluzione che abbiamo trovato è quella vera.

Infine, per quanto riguarda la reazione vincolare ad esempio su P_1 , in condizioni di equilibrio si deve imporre che risulti

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0$$

ove \mathbf{F} è la risultante delle forze attive agenti su P_1 . Queste sono tre: le due forze elastiche e la gravità. Si trova subito

$$F_x = -ka + 2k'a, \quad F_y = -ky^* - mg = 0,$$

pertanto la reazione vincolare su P_1 è

$$\mathbf{\Phi} = (k - 2k')a \mathbf{i}.$$

La reazione vincolare su P_2 è opposta. Si osservi che la condizione di idealità del vincolo è soddisfatta.

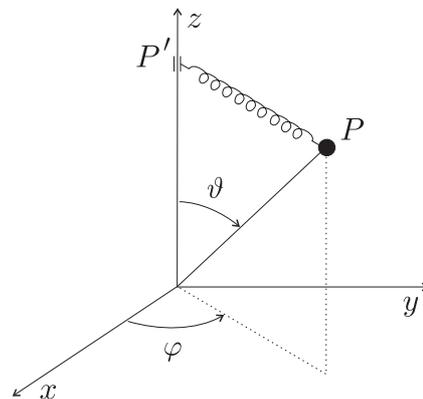
Problema 22 (coordinate ignorabili e riduzione; reazioni vincolari)

Un punto materiale P di massa m è vincolato a una superficie sferica di raggio R (v. figura). L'unica forza attiva agente su di esso² è una forza elastica, di costante elastica k , che lega P alla sua proiezione P' sull'asse z . Con riferimento agli angoli ϑ e φ delle coordinate sferiche di P , indicati in figura,

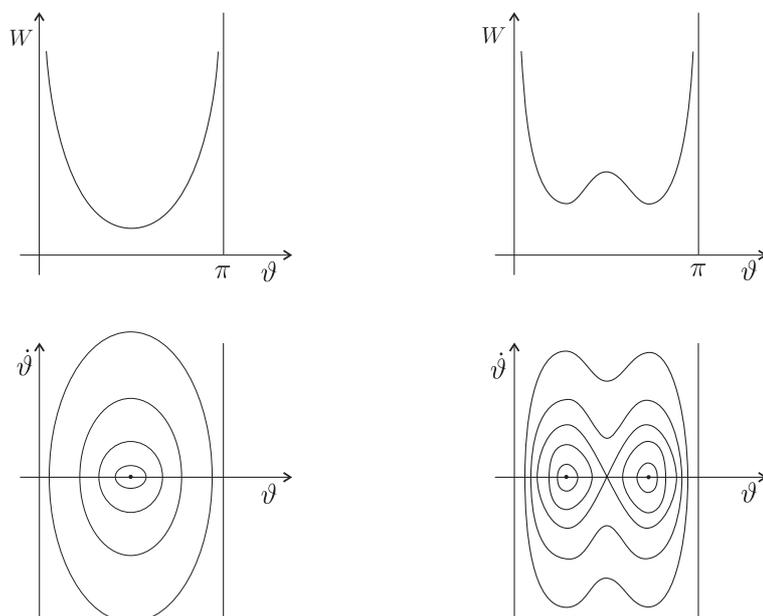
1. si scriva la lagrangiana del sistema, e successivamente si riduca il problema a un solo grado di libertà, per la coordinata ϑ , in corrispondenza a un assegnato valore $p_\varphi \neq 0$ del momento coniugato a φ ;
2. si determinino, per il problema ridotto, le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità, tracciando il grafico del potenziale e il ritratto in fase nelle diverse condizioni.

Si considerino infine, per il problema non ridotto di partenza, i moti corrispondenti agli equilibri del problema ridotto, e

3. si determini per ciascuno di essi la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$ esercitata su P dal dispositivo che mantiene P stesso sulla superficie sferica.



²Può disturbare l'intuizione l'assenza della gravità. Senza bisogno di immaginare il sistema in una navicella spaziale, si pensi a un contrappeso, ovvero a suddividere la massa m in due masse uguali tenute in posizione diametralmente opposta da un'asticella di massa trascurabile.



Soluzione

L'energia cinetica è quella di un punto materiale in coordinate sferiche, con però raggio R fissato: $K = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$. L'energia potenziale si riduce alla sola energia elastica, ovvero $V = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2 \vartheta$. Pertanto

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}kR^2 \sin^2 \vartheta .$$

La coordinata φ di fatto non compare in L (il sistema è infatti simmetrico per rotazione attorno all'asse z), pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\varphi = mR^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} .$$

Per inversione si ottiene

$$\dot{\varphi}(\vartheta, \dot{\vartheta}, p_\varphi) = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \vartheta}$$

(in questo problema $\dot{\varphi}$ non dipende da $\dot{\vartheta}$; vi dipenderebbe se la matrice cinetica non fosse diagonale). Procedendo secondo la teoria si trova allora, come espressione della lagrangiana ridotta,

$$\begin{aligned} L^*(\vartheta, \dot{\vartheta}; p_\varphi) &= L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) - p_\varphi \dot{\varphi} \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \dot{\vartheta}^2 - W(\vartheta; p_\varphi) , \end{aligned}$$

ove

$$W(\vartheta; p_\varphi) = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^2 \vartheta} .$$

Si può osservare subito che (per $p_\varphi \neq 0$, come si è supposto) W diverge in 0 e π , inoltre è simmetrico attorno a $\frac{\pi}{2}$; che W diverga in 0 e π è importante perché assicura che durante il moto si resta consistentemente lontani dalla singolarità delle coordinate polari.

Le configurazioni di equilibrio del problema ridotto si trovano annullando la derivata prima $W' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}$ di W :

$$W'(\vartheta; p_\varphi) = kR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{p_\varphi^2}{mR^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} = 0 .$$

Una prima soluzione è data da

$$\cos \vartheta = 0 \quad \text{ovvero} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} ,$$

come è ovvio da considerazioni di simmetria. Inoltre vi sono le eventuali soluzioni di

$$kR^2 \sin \vartheta - \frac{p_\varphi^2}{mR^2} \frac{1}{\sin^3 \vartheta} = 0 ; \quad (\#)$$

questa equazione equivale a

$$\sin^4 \vartheta = \frac{p_\varphi^2}{kmR^4} , \quad (\&)$$

pertanto vi sono due altre soluzioni, simmetriche rispetto a $\frac{\pi}{2}$, se il secondo membro non supera uno, cioè se

$$|p_\varphi| \leq \sqrt{km} R^2 \quad (*)$$

(tali soluzioni coincidono tra loro e con la precedente nel caso di uguaglianza). Senza bisogno di fare alcun calcolo, dalla sola osservazione qualitativa che W diverge per $\vartheta \rightarrow 0, \pi$, si comprende che quando la soluzione è unica (cioè la $(*)$ non è soddisfatta, o è soddisfatta come uguaglianza) essa è certamente un minimo di W , e pertanto l'equilibrio è stabile; invece quando vi sono tre soluzioni quella centrale è un massimo, mentre le due che la attorniano sono minimi. A conferma di ciò, possiamo calcolare la derivata seconda W'' in $\frac{\pi}{2}$:

$$W''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -kR^2 + \frac{p_\varphi^2}{mR^2}$$

che è positiva (W è minimo) se la $(*)$ non è soddisfatta, mentre è negativa (W è massimo) se la $(*)$ è soddisfatta come disuguaglianza. La figura mostra il grafico del potenziale e il corrispondente ritratto in fase nelle due situazioni. Senza bisogno di calcolare derivate di ordine superiore, non è difficile convincersi che quando la $(*)$ è soddisfatta come uguaglianza, W è ancora minimo, e dunque, come insegna il teorema di Lagrange–Dirichlet, l'equilibrio è ancora stabile. La biforcazione è la consueta biforcazione a forchetta.

Veniamo ai moti del sistema completo e al calcolo per essi delle reazioni vincolari. Per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ si ha $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}$ costante, pertanto l'accelerazione è puramente radiale e data da $\mathbf{a} = -R\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r$. La forza attiva è anch'essa radiale, e data da $F = -kR$. L'equazione del moto $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$, proiettata in direzione radiale, fornisce allora

$$\Phi = -\frac{p_\varphi^2}{mR^3} + kR .$$

Vale la pena di osservare che se $\Phi > 0$ (l'asticella che tiene m sulla sfera spinge) allora l'equilibrio è instabile, viceversa se $\Phi < 0$ (l'asticella tira) l'equilibrio è stabile.

Per quanto riguarda le soluzioni ϑ^* della $(\#)$, per esse si ha

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \vartheta^*} ,$$

e dunque

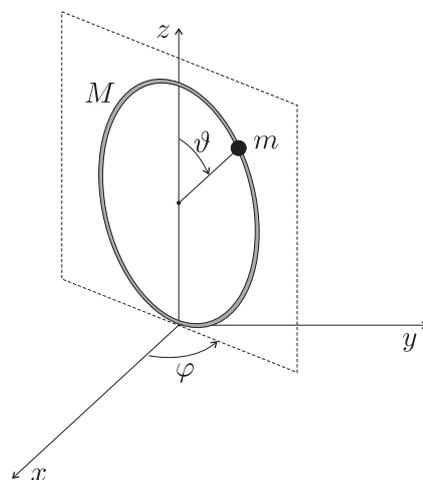
$$\mathbf{a} = -R \sin \vartheta^* \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r = -\frac{p_\varphi^2}{m^2 R^3 \sin^3 \vartheta^*} \mathbf{e}_r,$$

avendo qui denotato con \mathbf{e}_r il versore $(P - P')/\|P - P'\|$ (ortogonale all'asse z). D'altra parte la forza elastica è $\mathbf{F} = -kR \sin \vartheta^* \mathbf{e}_r$; usando la (&) se ne deduce immediatamente $\Phi = 0$. La cosa non deve stupire: in realtà il risultato è evidente a priori e lo si poteva ottenere senza alcun calcolo. Infatti sia \mathbf{a} che \mathbf{F} sono con evidenza paralleli a \mathbf{e}_r , pertanto $\Phi = m\mathbf{a} - \mathbf{F}$ deve essere parallelo a \mathbf{e}_r . Ma per l'idealità del vincolo (presupposto di tutta la trattazione lagrangiana) Φ deve anche essere ortogonale alla superficie sferica, cioè parallelo a $P - O$. L'unico vettore che realizza entrambe le condizioni di parallelismo è il vettore nullo.

Problema 23 (*coordinate ignorabili e riduzione; piccole oscillazioni*)

Un anello di massa m , raggio r e spessore trascurabile è libero di ruotare attorno a un asse verticale coincidente con un suo diametro. Un punto materiale di ugual massa m può scorrere sull'anello, soggetto alla sola gravità. Si utilizzino come coordinate lagrangiane i due angoli ϑ e φ indicati in figura.

1. Si scrivano la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Si riduca il problema a un solo grado di libertà per la coordinata ϑ , scrivendo lagrangiana ed equazione del moto, per un valore assegnato $p_\varphi \neq 0$ del momento coniugato a φ .
3. Si verifichi che i punti $\vartheta = 0, \pi$ sono di equilibrio per il problema ridotto, se ne studi la stabilità pensando p_φ come parametro variabile, e (in caso di stabilità) si calcoli la pulsazione delle piccole oscillazioni. Esisteranno altre configurazioni di equilibrio? Che cosa si può dire della loro stabilità?
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio della lagrangiana di partenza e se ne studi la stabilità.



Soluzione

Osserviamo preliminarmente che in questo sistema l'angolo ϑ , al pari dell'angolo φ , varia tra 0 e 2π (non tra 0 e π come con le consuete coordinate polari sferiche, e questo per la presenza dell'anello).

L'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} [m r^2 \dot{\vartheta}^2 + (I + m r^2 \sin^2 \vartheta) \dot{\varphi}^2],$$

ove $I = \frac{1}{2}mr^2$ denota il momento d'inerzia dell'anello rispetto a un diametro.³ L'energia potenziale è $V = mgr \cos \vartheta$, perciò la lagrangiana si scrive

$$L = \frac{mr^2}{2} \left[\dot{\vartheta}^2 + \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right) \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \cos \vartheta . \quad (*)$$

Ricaviamo le equazioni del moto:

a) si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta} , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \ddot{\vartheta} , \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mr^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + mgr \sin \vartheta ,$$

e dunque

$$\ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{r} \sin \vartheta = 0 ; \quad (§1)$$

b) allo stesso modo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right) \dot{\varphi} , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right) \ddot{\varphi} + 2mr^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} , \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 ,$$

e dunque

$$\left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right) \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} = 0 . \quad (§2)$$

Nella lagrangiana non compare φ , pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right) \dot{\varphi} \quad (**)$$

(si osservi che la seconda equazione del moto altro non è che $\dot{p}_\varphi = 0$). Per ridurre il problema a un solo grado di libertà dobbiamo invertire la (**), ricavando $\dot{\varphi}$ in funzione di p_φ ; si trova banalmente

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right)} . \quad (\#)$$

La lagrangiana ridotta è poi

$$L^*(\vartheta, \dot{\vartheta}; p_\varphi) = L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) - p_\varphi \dot{\varphi} ,$$

ove si intende che $\dot{\varphi}$ è sostituito dalla sua espressione (#). Il risultato è

$$L^* = \frac{1}{2}mr^2 \dot{\vartheta}^2 - W(\vartheta; p_\varphi) ,$$

ove il potenziale efficace W è dato da

$$W(\vartheta; p_\varphi) = mgr \cos \vartheta + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta \right)} .$$

³L'espressione di I è immediata: infatti l'anello è una figura piana, pertanto denotando con I_3 il momento d'inerzia relativo all'asse centrale ortogonale, e con I_1, I_2 i momenti relativi a due qualsiasi assi ortogonali tra loro nel piano della figura, risulta $I_3 = I_1 + I_2$. Nel caso dell'anello si ha $I_3 = mr^2, I_2 = I_1 = I$, pertanto $I = \frac{1}{2}mr^2$. A sua volta, l'espressione $I_3 = I_1 + I_2$ per le figure piane deriva da

$$I_1 = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) , \quad I_2 = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) , \quad I_3 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

(si sono usate per semplicità le sommatorie del caso discreto, ma la trasposizione al caso continuo con gli integrali è ovvia). Per le figure piane tutte le z_i sono nulle e $I_3 = I_1 + I_2$.

Le configurazioni di equilibrio *del sistema ridotto* si trovano imponendo che si annulli la derivata prima W' di W :

$$W'(\vartheta) = -mgr \sin \vartheta - \frac{p_\varphi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{mr^2(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta)^2} = 0 .$$

L'equazione è soddisfatta in $0, \pi$, pertanto $\vartheta^* = 0$ e $\vartheta^* = \pi$ sono configurazioni di equilibrio.

Per studiare la stabilità di una configurazione di equilibrio ϑ^* bisogna calcolare la derivata seconda $W''(\vartheta^*)$. Per evitare calcoli inutili, osserviamo che il secondo termine in $W'(\vartheta)$ ha la forma N/D , perciò la sua derivata è $(N'D - ND')/D^2$, e all'equilibrio, ove $N = 0$, l'espressione si riduce a N'/D (come se il denominatore D fosse costante!). Si ha così

$$W''(\vartheta^*) = -mgr \cos \vartheta^* - \frac{p_\varphi^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*)}{mr^2(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta^*)^2} .$$

Per $\vartheta^* = 0$ si ha

$$W''(0) = -mgr - \frac{4p_\varphi^2}{mr^2} ;$$

l'espressione è sempre negativa, dunque W ha in zero un massimo (riconoscibile dall'analisi della derivata seconda), ovvero $\vartheta^* = 0$ è sempre instabile. Per $\vartheta^* = \pi$ si ha invece

$$W''(\pi) = +mgr - \frac{4p_\varphi^2}{mr^2} ;$$

questa espressione è positiva per p_φ sufficientemente piccolo, precisamente

$$|p_\varphi| < \frac{1}{2} mr^2 \sqrt{\frac{g}{r}} , \quad (\#\#)$$

e corrispondentemente $\vartheta^* = \pi$ è stabile; è invece negativa per $|p_\varphi| > \frac{1}{2} mr^2 \sqrt{g/r}$, e corrispondentemente la configurazione è instabile (non discutiamo il caso limite $|p_\varphi| = \frac{1}{2} mr^2 \sqrt{g/r}$).

Per quanto riguarda la pulsazione delle piccole oscillazioni, dobbiamo calcolarla in $\vartheta^* = \pi$ quando è soddisfatta la ($\#\#$). Trattandosi (per il sistema ridotto) di un problema a un grado di libertà, la pulsazione è data da

$$\omega^2 = \frac{W''(\vartheta^*)}{a(\vartheta^*)} ,$$

ove $a(\vartheta^*)$ è il coefficiente cinetico (matrice cinetica 1×1) calcolato nella configurazione di equilibrio; qui a è costante e vale mr^2 . Si trova così

$$\omega^2 = \frac{g}{r} - \frac{4p_\varphi^2}{m^2 r^4} .$$

Si osservi che il membro di destra è positivo quando la ($\#\#$) è soddisfatta.

Altre configurazioni di equilibrio del sistema ridotto possono venire dalle soluzioni di

$$mgr + \frac{p_\varphi^2 \cos \vartheta}{mr^2(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta)^2} = 0 . \quad (\&)$$

Questa equazione è algebrica di grado quattro in $\cos \vartheta$, dunque è difficile. Ci viene in aiuto l'analisi qualitativa del potenziale W , nell'intervallo $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$: infatti in $\vartheta = 0$ (e dunque $\vartheta = 2\pi$) c'è sempre un massimo, mentre in $\vartheta = \pi$ c'è un minimo per p_φ piccolo, un massimo per p_φ grande; non

è difficile convincersi che nel primo caso la (&) non ha soluzioni, nel secondo caso ha una coppia di soluzioni, in posizione simmetrica rispetto a π , che sono minimi di W e dunque rappresentano configurazioni di equilibrio stabile del sistema ridotto.

Si può dire qualche cosa di più osservando che la (&) si riporta alla forma

$$\left(\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta\right)^2 = -a \cos \vartheta, \quad a = \frac{p_\varphi^2}{m^2 g r^3} > 0.$$

Il membro di sinistra ha minimi in $0, \pi, 2\pi$, in cui vale $1/4$. Il membro di destra oscilla tra $-a$ e a , e ha massimo in π , in coincidenza con un minimo del membro di sinistra (si faccia un disegno). Per $a < 1/4$ evidentemente l'equazione non può avere soluzioni. Quando a supera $1/4$ invece si forma una coppia di soluzioni che fuoriesce da $\vartheta = \pi$. La condizione $a < 1/4$ altro non è che la (##).

Veniamo infine allo studio delle configurazioni di equilibrio del sistema originario a due gradi di libertà, retto dalla lagrangiana (*). Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. La prima di esse dà l'equazione $\sin \vartheta = 0$, mentre la seconda è identicamente soddisfatta (si trova infatti $0 = 0$). Le configurazioni di equilibrio sono allora le infinite coppie (ϑ^*, φ^*) con $\vartheta^* = 0$ oppure π e φ^* qualsiasi.

I corrispondenti punti di equilibrio $(\vartheta^*, \varphi^*, 0, 0)$ nello spazio degli stati quadridimensionale sono tutti instabili. L'instabilità si deduce senza fatica direttamente dalla definizione, osservando che arbitrariamente vicino a ciascun punto di equilibrio c'è un dato iniziale della forma

$$(\vartheta^*, \varphi^*, 0, \varepsilon) \tag{\%}$$

cui corrisponde il moto uniforme

$$(\vartheta(t), \varphi(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t)) = (\vartheta^*, \varphi^* + \varepsilon t, 0, \varepsilon). \tag{\%\%}$$

E' immediato verificare che questi moti effettivamente soddisfano le (§1) e (§2), e che a causa della loro presenza la definizione di stabilità è violata (si rifletta su questo punto, cercando di procedere in modo formale). Anche senza scomodare le equazioni del moto, si vede bene dalla (#) che in corrispondenza alle soluzioni di equilibrio $\vartheta(t) = \vartheta^*$ del sistema ridotto si ha $\dot{\varphi}$ costante, ovvero ai dati iniziali del tipo (%) corrispondono soluzioni della forma (\%\%). Del tutto in generale, si ricordi, alle soluzioni di equilibrio del sistema ridotto corrispondono moti uniformi del sistema completo (teorema di Routh).

Per le configurazioni di equilibrio del tipo $(0, \varphi^*)$ l'instabilità si poteva dedurre anche dall'analisi della matrice hessiana di V . Si ha infatti

$$V''(0, \varphi^*) = \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e poiché la matrice è semidefinita negativa (gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -mgr < 0$), l'energia potenziale in questi punti con certezza *non* ha un minimo; l'assenza di minimo si vede dalle derivate seconde, perciò il teorema di Lagrange–Dirichlet si inverte e i punti sono instabili. Per le configurazioni di equilibrio del tipo (π, φ^*) invece si ha

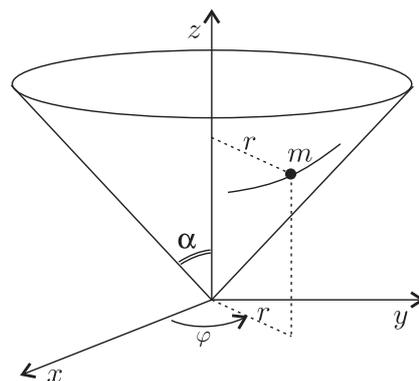
$$V''(\pi, \varphi^*) = \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice è semidefinita positiva, e non se ne può dedurre niente.

Problema 24 (coordinate ignorabili e riduzione; reazioni vincolari)

Un punto materiale di massa m è vincolato alla falda superiore di un cono circolare di apertura assegnata α ; l'asse del cono è verticale e su m agisce la gravità (v. figura). Utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate polari r e φ della proiezione di m sul piano orizzontale xy ,

1. si riduca il problema a un solo grado di libertà per la coordinata r , scrivendo la lagrangiana ridotta e l'equazione del moto, per un valore fissato $p_\varphi \neq 0$ del momento coniugato a φ ;
2. si traccino, per il problema ridotto, il grafico del potenziale e il ritratto di fase;
3. si considerino i moti circolari del sistema completo di partenza, e si determini per essi la reazione vincolare su m , verificando che il vincolo di idealità è soddisfatto.

**Soluzione**

L'energia cinetica, nelle coordinate polari sferiche ρ e φ (con ϑ costante uguale ad α), ha l'espressione familiare $K = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2)$; poichè $r = \rho \sin \alpha$, nelle coordinate suggerite dal problema si ha

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \alpha} + r^2 \dot{\varphi}^2 \right).$$

L'energia potenziale è poi $V = mgz = mgr / \tan \alpha$, pertanto

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \alpha} + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{mgr}{\tan \alpha}$$

(la struttura della lagrangiana è la stessa del problema 7). La lagrangiana non dipende da φ , pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi};$$

per inversione si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad (*)$$

e la lagrangiana ridotta ha l'espressione $L'(r, \dot{r}; p_\varphi) = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) - p_\varphi \dot{\varphi}$, ove $\dot{\varphi}$ si intende sostituito dalla (*). A conti fatti si trova

$$L'(r, \dot{r}; p_\varphi) = \frac{1}{2} \frac{m}{\sin^2 \alpha} \dot{r}^2 - W(r; p_\varphi) \quad \text{con} \quad W(r; p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{mgr}{\tan \alpha}.$$

L'equazione del moto corrispondente è

$$\frac{m}{\sin^2 \alpha} \ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{mg}{\tan \alpha} = 0.$$

Il grafico del potenziale e il ritratto in fase hanno lo stesso aspetto di quelli del problema 7, cui rinviamo. L'unico punto di equilibrio è un minimo r^* di W , che si trova imponendo $\frac{\partial W}{\partial r} = 0$; si trova

$$r^*(p_\varphi) = \left[\frac{p_\varphi^2 \tan \alpha}{m^2 g} \right]^{1/3} .$$

In corrispondenza a questo equilibrio si trova, nel problema completo di partenza, un moto circolare uniforme di momento angolare p_φ e velocità angolare data dalla (*), con $r = r^*$.

Per calcolare la reazione vincolare Φ si usa il secondo principio della dinamica nella forma

$$\Phi = m \mathbf{a} - \mathbf{F} ,$$

ove \mathbf{F} è la forza attiva agente su m , qui la forza di gravità $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$, mentre \mathbf{a} è l'accelerazione centripeta del moto circolare:

$$\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r = -\frac{p_\varphi^2}{m^2 r^3} \mathbf{e}_r = -\frac{g}{\tan \alpha} \mathbf{e}_r .$$

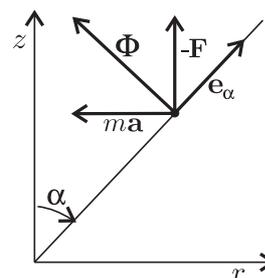
Mettendo assieme si trova

$$\Phi = -\frac{mg}{\tan \alpha} \mathbf{e}_r + mg \mathbf{k} .$$

La condizione di idealità del vincolo, in questo caso semplice di un punto materiale vincolato a una superficie, si riduce alla condizione di perpendicolarità di Φ alla superficie stessa. La condizione è soddisfatta, perchè Φ risulta essere perpendicolare (si veda la figura qui a fianco) al versore

$$\mathbf{e}_\alpha = \sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \alpha \mathbf{k}$$

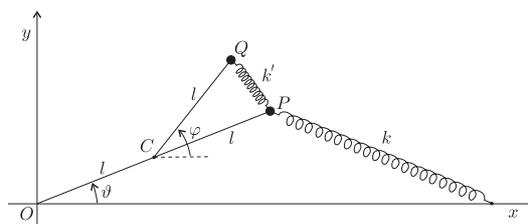
parallelo alla direttrice del cono nel piano rz .



Problema 25 (realizzazione di un vincolo per costante elastica $k \rightarrow \infty$)

Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare a distanza $2l$ dall'origine di un piano cartesiano orizzontale Oxy ; un secondo punto materiale Q di ugual massa è vincolato a mantenere distanza l dal punto medio C del segmento OP (v. figura). Sul sistema agiscono una forza elastica di costante elastica k che lega P al punto dell'asse x di ascissa $4l$, e una seconda forza elastica di costante elastica k' che lega tra loro P e Q . Si faccia riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ e φ indicate in figura.

1. Si determinino e si classifichino le configurazioni di equilibrio.
2. Si determinino le pulsazioni ω_1, ω_2 delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.
3. Si studi la situazione limite $k' \rightarrow \infty$, commentando il risultato.



Soluzione

L'energia cinetica del punto P si calcola immediatamente essere $K_P = \frac{1}{2}m4l^2\dot{\vartheta}^2$; quella del punto Q è, come nel problema 6, $K_Q = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi})$, e dunque

$$K = \frac{1}{2}ml^2(5\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}) ,$$

con matrice cinetica

$$a(\vartheta, \varphi) = ml^2 \begin{pmatrix} 5 & \cos(\vartheta - \varphi) \\ \cos(\vartheta - \varphi) & 1 \end{pmatrix} .$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, pochi passaggi (conviene usare il teorema di Carnot) conducono a

$$V = \text{cost} - 8kl^2 \cos \vartheta - \tilde{k}l^2 \cos(\vartheta - \varphi) .$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo

$$V'_{\vartheta} = 8kl^2 \sin \vartheta + \tilde{k}l^2 \sin(\vartheta - \varphi) = 0 , \quad V'_{\varphi} = -\tilde{k} \sin(\vartheta - \varphi) = 0 ;$$

se ne deduce che le configurazioni di equilibrio sono quattro:

$$(\vartheta, \varphi) = (0, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0), \quad (\pi, \pi) .$$

Per determinare la stabilità va calcolata la matrice hessiana di V , che risulta essere

$$V''(\vartheta, \varphi) = l^2 \begin{pmatrix} 8k \cos \vartheta + \tilde{k} \cos(\vartheta - \varphi) & -\tilde{k} \cos(\vartheta - \varphi) \\ -\tilde{k} \cos(\vartheta - \varphi) & \tilde{k} \cos(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix} .$$

Segue subito

$$\begin{aligned} V''(0, 0) &= l^2 \begin{pmatrix} 8k + \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{pmatrix} , && \text{def. positiva, minimo, stabile} \\ V''(0, \pi) &= l^2 \begin{pmatrix} 8k - \tilde{k} & \tilde{k} \\ \tilde{k} & -\tilde{k} \end{pmatrix} , && \text{indefinita, instabile} \\ V''(\pi, 0) &= l^2 \begin{pmatrix} -8k - \tilde{k} & \tilde{k} \\ \tilde{k} & -\tilde{k} \end{pmatrix} , && \text{def. negativa, massimo, instabile} \\ V''(\pi, \pi) &= l^2 \begin{pmatrix} -8k + \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{pmatrix} , && \text{indefinita, instabile .} \end{aligned}$$

Per trovare le pulsazioni nel punto di equilibrio stabile $(0, 0)$ occorrono la matrici $A = a(0, 0)$ e $B = V''(0, 0)$, che risultano essere

$$A = ml^2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = ml^2 \begin{pmatrix} 8\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 & -\tilde{\Omega}^2 \\ -\tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^2 \end{pmatrix} ,$$

ove si è posto $\Omega^2 = k/m$, $\tilde{\Omega}^2 = \tilde{k}/m$. L'equazione secolare è allora

$$\det \begin{pmatrix} 8\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 - 5\lambda & -\tilde{\Omega}^2 - \lambda \\ -\tilde{\Omega}^2 - \lambda & \tilde{\Omega}^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 ,$$

che dà

$$\lambda^2 - 2\lambda(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2) + 2\Omega^2\tilde{\Omega}^2 = 0 ;$$

le soluzioni sono

$$\lambda_{\pm} = \Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \pm \sqrt{\Omega^4 + \tilde{\Omega}^4},$$

e poi naturalmente $\omega_1 = \sqrt{\lambda_+}$, $\omega_2 = \sqrt{\lambda_-}$.

Veniamo ora al limite $\tilde{k} \rightarrow \infty$, ovvero $\tilde{\Omega} \rightarrow \infty$. La cosa più semplice, senza ricorrere a teoremi complicati sui limiti, è scrivere

$$\sqrt{\Omega^4 + \tilde{\Omega}^4} = \tilde{\Omega}^2 \sqrt{1 + \Omega^4/\tilde{\Omega}^4}$$

e poi, ricordando lo sviluppo della radice $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$, ove $\varepsilon = \Omega^4/\tilde{\Omega}^4$ piccolo,

$$\lambda_{\pm} = \Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \pm \tilde{\Omega}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^4}{\tilde{\Omega}^4} + \dots \right);$$

segue subito

$$\lambda_+ \rightarrow \infty, \quad \lambda_- \rightarrow \Omega^2.$$

Che una pulsazione diventi infinita non sorprende; che l'altra resti finita non dovrebbe sorprendere: aumentando la costante elastica \tilde{k} si realizza progressivamente il vincolo in cui φ è fissato a zero, P e Q sono legate a stare nello stesso punto, e il sistema a due gradi di libertà approssima sempre meglio il sistema a un solo grado di libertà, con un solo punto materiale di massa $2m$ (come se Q non esistesse e P avesse massa $2m$). Per questo sistema si scrive facilmente la lagrangiana

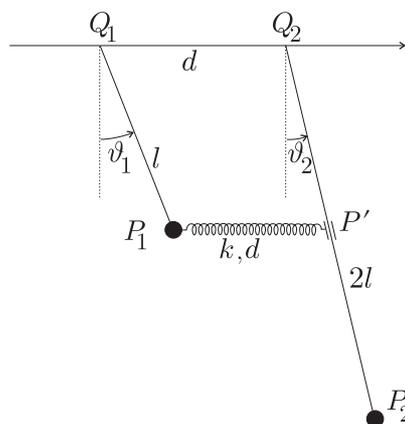
$$L = \frac{1}{2}(8ml^2)\dot{\vartheta}^2 + 8kl^2 \cos \vartheta,$$

e la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno a $\vartheta = 0$ si trova subito essere $\omega^2 = k/m = \Omega^2$.

Nel prossimo esercizio l'idea della realizzazione del vincolo tramite una costante elastica che diventa infinita (idea in realtà non banale, che richiederebbe più spirito critico di come si è fatto qui) è ripresa, in una situazione appena più difficile.

Problema 26 (realizzazione di un vincolo per costante elastica $k \rightarrow \infty$)

Due pendoli di uguale massa m e lunghezza l e $2l$ hanno i punti di sospensione Q_1 e Q_2 alla stessa quota a distanza d tra loro. Sul sistema agiscono la gravità e una forza elastica dovuta a una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo pari a d , che si esercita tra P_1 e la sua proiezione orizzontale P' sulla retta per Q_2 e P_2 (v. figura). Con riferimento alle coordinate lagrangiane ϑ_1 e ϑ_2 indicate in figura, si verifichi che $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ è configurazione di equilibrio stabile e si determini la pulsazione dei modi normali di oscillazione attorno ad essa, studiando e interpretando i casi limite $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$.



Soluzione

La lunghezza D della molla, per ipotesi sempre orizzontale, è

$$D = d - l \sin \vartheta_1 + l \cos \vartheta_1 \tan \vartheta_2 .$$

L'energia potenziale elastica è $\frac{1}{2}k(D-d)^2$, pertanto l'energia potenziale del sistema, tenendo conto anche della gravità, è

$$V = -mgl(\cos \vartheta_1 + 2 \cos \vartheta_2) + \frac{1}{2}kl^2(-\sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \tan \vartheta_2)^2 .$$

Si calcola poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \vartheta_1} &= mgl \sin \vartheta_1 - kl^2(-\sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \tan \vartheta_2)(\cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 \tan \vartheta_2) \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} &= 2mgl \sin \vartheta_2 + kl^2(-\sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \tan \vartheta_2) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_2} ; \end{aligned}$$

con evidenza entrambe le derivate si annullano per $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, pertanto $(0, 0)$ è configurazione di equilibrio.

Il calcolo dell'hessiana di V , di cui omettiamo i dettagli, dà in $(0, 0)$ la matrice

$$B = \begin{pmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & 2mgl + kl^2 \end{pmatrix} = ml^2 \begin{pmatrix} g/l + k/m & -k/m \\ -k/m & 2g/l + k/m \end{pmatrix} ;$$

B è definita positiva e pertanto $(0, 0)$ è configurazione di equilibrio stabile.

L'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}_1^2 + 4\dot{\vartheta}_2^2) ,$$

pertanto la matrice cinetica è costante e in $(0, 0)$, come in qualunque altra configurazione, vale

$$A = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

L'equazione secolare è corrispondentemente

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 + \Omega^2 - \lambda & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2\omega^2 + \Omega^2 - 4\lambda \end{pmatrix} = 0 ,$$

ove si è posto

$$\omega^2 = \frac{g}{l} , \quad \Omega^2 = \frac{k}{m} ;$$

sviluppando il determinante si trova

$$\lambda^2 - \left(\frac{3}{2}\omega^2 + \frac{5}{4}\Omega^2 \right) \lambda + \frac{1}{2}\omega^4 + \frac{3}{4}\omega^2\Omega^2 = 0 .$$

Le due soluzioni sono allora

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4c}) ,$$

ove

$$b = \frac{3}{2}\omega^2 + \frac{5}{4}\Omega^2, \quad c = \frac{1}{2}\omega^4 + \frac{3}{4}\omega^2\Omega^2.$$

Veniamo infine allo studio dei limiti $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$ (unico scopo dell'esercizio).

a) Limite $k \rightarrow 0$, ovvero $\Omega \rightarrow 0$.

Si ha

$$b \rightarrow \frac{3}{2}\omega^2, \quad c \rightarrow \frac{1}{2}\omega^4, \quad b^2 - 4c \rightarrow \frac{1}{4}\omega^4,$$

e dunque

$$\omega_1^2 = \lambda_+ \rightarrow \omega^2, \quad \omega_2^2 = \lambda_- \rightarrow \frac{1}{2}\omega^2.$$

Il risultato si commenta da sé: per $k = 0$ la forza elastica sparisce e si hanno le pulsazioni di due pendoli liberi di lunghezza l e $2l$.

b) Limite $k \rightarrow \infty$, ovvero $\Omega \rightarrow \infty$.

Ora si ha

$$b \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow \infty, \quad c \ll b^2.$$

Conviene riscrivere

$$\lambda_{\pm} = \frac{b}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon}), \quad \text{ove} \quad \varepsilon = \frac{4c}{b^2} \ll 1;$$

in questo modo si vede subito che $\lambda_+ \rightarrow \infty$, mentre per quanto riguarda λ_- si sviluppa la radice: $\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, pertanto

$$\lambda_- = \frac{b}{2}(1 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \frac{b\varepsilon}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{c}{b} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Poiché

$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}\omega^4 + \frac{3}{4}\omega^2\Omega^2}{\frac{3}{2}\omega^2 + \frac{5}{4}\Omega^2} \rightarrow \frac{3}{5}\omega^2,$$

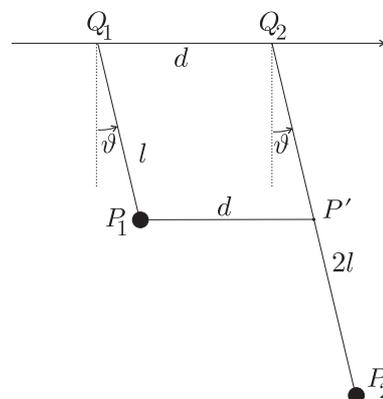
in conclusione si ha

$$\omega_1 \rightarrow \infty, \quad \omega_2^2 \rightarrow \frac{3}{5}\omega^2.$$

Il comportamento limite di ω_2 si interpreta così: quando la costante elastica $k \rightarrow \infty$, la molla è sempre meglio approssimata da un'asticella di lunghezza pari alla lunghezza a riposo d (si veda la figura qui accanto); in sostanza, stiamo progressivamente realizzando nel sistema l'ulteriore vincolo $\vartheta_1 = \vartheta_2$. La questione della realizzazione dei vincoli tramite dispositivi con costanti elastiche elevate (come avviene nel mondo reale!) è molto delicata (è tutt'altro che ovvio come si debba affrontare lo studio della dinamica nel limite $k \rightarrow \infty$). Non è però difficile vedere che il sistema con il vincolo in più ha, come pulsazione delle piccole oscillazioni, proprio il valore limite di ω_2 .

Infatti, posto $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, l'energia cinetica del nuovo sistema a un sol grado di libertà è

$$\tilde{K} = \frac{5}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2,$$



mentre l'energia potenziale (che ora, avendo sostituito la molla con un'asticella rigida, è puramente gravitazionale) è

$$\tilde{V} = -3mgl \cos \vartheta ;$$

si ha allora

$$\tilde{A} = 5ml^2 , \quad \tilde{B} = \tilde{V}''(0) = 3mgl$$

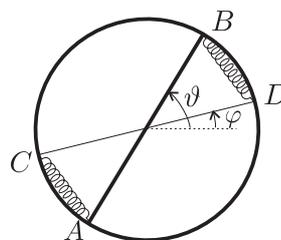
(\tilde{A} e \tilde{B} qui sono matrici 1×1 , ovvero numeri), da cui segue precisamente

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{B}{A} = \frac{3}{5}\omega^2 .$$

Problema 27 (teorema di Noether; linearizzazione; problema a due corpi)

Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ può ruotare nel piano dell'anello, mantenendo il suo punto medio coincidente col centro dell'anello. Sul sistema agiscono due forze elastiche di ugual costante elastica k che legano gli estremi A e B dell'asta a due punti C e D diametralmente opposti dell'anello. Si faccia riferimento alle coordinate lagrangiane φ e ϑ indicate in figura.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema e utilizzando il teorema di Noether si costruisca una costante del moto (oltre all'energia).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità; assumendo $M = m$ si ricavino poi le equazioni del moto linearizzate attorno a una qualsiasi di esse.
3. Si scriva l'integrale generale del sistema linearizzato.



Soluzione

L'energia cinetica dell'anello (teorema di König) è $K_M = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, ove $I = MR^2$ è il momento d'inerzia dell'anello rispetto all'asse centrale ortogonale e $v = -R\dot{\varphi}$ è la velocità del centro di massa, pertanto

$$K_M = \frac{1}{2}(2MR^2)\dot{\varphi}^2 .$$

Allo stesso modo l'energia cinetica dell'asta (il cui momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è $I' = \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{1}{3}mR^2$) è

$$K_m = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\vartheta}^2\right) .$$

Mettendo assieme si trova

$$K = \frac{1}{2}\left[(2M + m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2\right] .$$

L'energia potenziale è poi $\frac{1}{2}kd^2$ per ciascuna delle due forze elastiche, con (teorema di Carnot) $d^2 = 2R^2[1 - \cos(\vartheta - \varphi)]$, pertanto

$$V = -2kR^2 \cos(\vartheta - \varphi) + \text{cost} .$$

La lagrangiana è dunque

$$L(\varphi, \vartheta, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \left[(2M + m)R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}mR^2 \dot{\vartheta}^2 \right] + 2kR^2 \cos(\vartheta - \varphi)$$

e le corrispondenti equazioni di Lagrange sono

$$(2M + m)\ddot{\varphi} - 2k \sin(\vartheta - \varphi) = 0 , \quad \frac{1}{3}m\ddot{\vartheta} + 2k \sin(\vartheta - \varphi) = 0 . \quad (*)$$

La lagrangiana dipende da φ e ϑ solo attraverso la differenza $\vartheta - \varphi$, pertanto è invariante sotto la traslazione

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \alpha , \quad \vartheta \mapsto \vartheta' = \vartheta + \alpha \quad (\#)$$

(che non tocca le velocità $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$). Il teorema di Noether ci assicura allora che si conserva la quantità

$$P = p_\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha} + p_\vartheta \frac{\partial \vartheta'}{\partial \alpha} = p_\varphi + p_\vartheta = (2M + m)R^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3}mR^2 \dot{\vartheta}$$

(non occorre valutare in $\alpha = 0$ perché l'espressione è indipendente da α). Si riconosce in P il momento angolare del sistema relativo a un qualunque punto della guida.

Per determinare le configurazioni di equilibrio dobbiamo imporre $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$. Le due equazioni sono con evidenza dipendenti e si riducono all'unica equazione

$$\sin(\vartheta - \varphi) = 0 ,$$

che ha infinite soluzioni:

- (a) φ qualsiasi e $\vartheta = \varphi$,
- (b) φ qualsiasi e $\vartheta = \varphi + \pi$.

Per discutere la stabilità di queste soluzioni, calcoliamo la matrice hessiana di V :

$$V'' = 2kR^2 \cos(\vartheta - \varphi) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcolando V'' nelle soluzioni di equilibrio di tipo (a) e di tipo (b) si trovano allora le matrici

$$B^{(a)} = 2kR^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B^{(b)} = -B^{(a)} .$$

Entrambe le matrici hanno determinante nullo. Più precisamente, $B^{(a)}$ ha un autovalore nullo e uno positivo: questa è la tipica situazione in cui l'analisi delle derivate seconde di V non basta a capire se l'equilibrio sia stabile. Invece $B^{(b)}$, accanto all'autovalore nullo, ha un autovalore negativo, la cui presenza assicura l'instabilità. Le configurazioni di equilibrio di tipo (b) sono dunque sicuramente instabili. In realtà anche le configurazioni di tipo (a) sono instabili. Lo si intuisce perché V è esattamente piatto in una direzione, quella corrispondente ad avanzare φ e

ϑ di una stessa quantità, come nella (#). Formalmente l'instabilità si dimostra osservando che arbitrariamente vicino al punto di equilibrio

$$(\varphi, \vartheta, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) = (\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$$

c'è un dato iniziale $(\varphi^*, \varphi^*, \varepsilon, \varepsilon)$ cui corrisponde un moto

$$\varphi(t) = \varphi^* + \varepsilon t, \quad \vartheta(t) = \varphi(t)$$

che si allontana da $(\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$ (è immediato verificare che questo moto soddisfa le equazioni di Lagrange del sistema: infatti $\ddot{\vartheta} = \ddot{\varphi} = 0$, e insieme $\sin(\vartheta - \varphi) = 0$).

Linearizziamo ora il sistema attorno a una configurazione di equilibrio; per fissare le idee prendiamo una soluzione di tipo (a) e denotiamo per semplicità $B \equiv B^{(a)}$. La matrice cinetica è diagonale e costante, e per $M = m$ è

$$A = mR^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice B conviene riscriverla mettendo a fattore mR^2 ; si ottiene

$$B = mR^2 \begin{pmatrix} 2\Omega^2 & -2\Omega^2 \\ -2\Omega^2 & 2\Omega^2 \end{pmatrix}, \quad \text{ove} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}.$$

L'equazione secolare

$$\det(B - \lambda A) = 0$$

si scrive allora immediatamente:

$$\det \begin{pmatrix} 2\Omega^2 - 3\lambda & -2\Omega^2 \\ -2\Omega^2 & 2\Omega^2 - \frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\lambda^2 - \frac{20}{3}\Omega^2\lambda = 0,$$

e le soluzioni sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{20}{3}\Omega^2$. Sia $(\varphi, \vartheta) = (\varphi^*, \varphi^*)$ il valore di equilibrio; trasliamo l'origine su questo punto ponendo

$$q_1 = \varphi - \varphi^*, \quad q_2 = \vartheta - \varphi^*.$$

Posto $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ le equazioni linearizzate sono

$$A \ddot{\mathbf{q}} + B \mathbf{q} = 0$$

cioè

$$3m\ddot{q}_1 + 2k(q_1 - q_2) = 0, \quad \frac{1}{3}m\ddot{q}_2 - 2k(q_1 - q_2) = 0.$$

La soluzione generale, in questo caso in cui un autovalore è nullo e l'altro positivo, ha la forma

$$\mathbf{q}(t) = (a + bt) \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{A} \cos(\omega t + \alpha) \mathbf{u}^{(2)},$$

ove a , b , \mathcal{A} e α sono le quattro costanti di integrazione mentre $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ sono gli autovettori corrispondenti rispettivamente a $\lambda = 0$ e a $\lambda = \frac{20}{3}\Omega^2$ (il moto appare come sovrapposizione di un punto materiale libero e di un oscillatore armonico). Si trova facilmente

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix},$$

e sostituendo si trova la soluzione:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi^* + a + bt + A \cos(\omega t + \alpha) \\ \vartheta &= \varphi^* + a + bt - 9A \cos(\omega t + \alpha) .\end{aligned}$$

C'è un modo migliore di procedere per studiare questo sistema, a partire dalle equazioni di Lagrange (*). Queste equazioni infatti hanno struttura identica a quelle del problema (unidimensionale) a due corpi, con masse

$$m' = 2M + m , \quad m'' = \frac{1}{3}m ;$$

le equazioni pertanto si disaccoppiano, e tutto lo studio si semplifica, procedendo come nel problema a due corpi, cioè introducendo come coordinate, al posto di φ e ϑ , una coordinata di centro di massa Ψ e una coordinata relativa ψ :

$$\Psi = \frac{(2M + m)\varphi + \frac{1}{3}m\vartheta}{2M + \frac{4}{3}m} , \quad \psi = \vartheta - \varphi . \quad **$$

Le equazioni del moto nelle nuove variabili divengono banalmente

$$\ddot{\Psi} = 0 , \quad \mu\ddot{\psi} = -2k \sin \psi ,$$

ove μ è la massa ridotta:

$$\mu = \frac{m'm''}{m' + m''} = \frac{m(2M + m)}{6M + 4m} .$$

Il sistema (vero, non linearizzato) si vede così essere composto da un punto libero e da un pendolo, e tutto lo studio diventa più chiaro (equilibrio, stabilità, linearizzazione). In qualunque momento, invertendo le (**), si trasporta il risultato alle variabili originarie ϑ, φ .

Problema 28 (coordinate ignorabili e riduzione; moto geodetico)

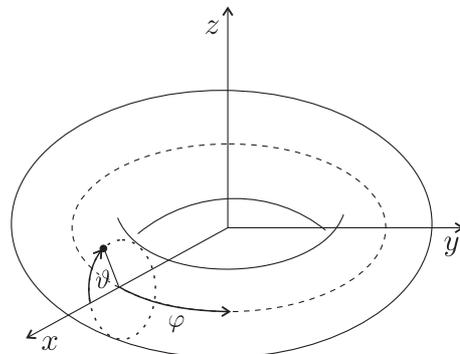
Un punto materiale è vincolato alla superficie toroidale di equazioni parametriche

$$x = (R + r \cos \vartheta) \cos \varphi , \quad y = (R + r \cos \vartheta) \sin \varphi , \quad z = r \sin \vartheta , \quad (*)$$

ove R e $r < R$ sono costanti positive assegnate, e $0 \leq \vartheta, \varphi \leq 2\pi$. Sul sistema non agiscono forze attive.

1. Si scriva l'energia cinetica del sistema, e poi si riduca il sistema a un solo grado di libertà, in corrispondenza a un valore assegnato del momento p_φ .
2. Si studino gli equilibri del sistema ridotto e se ne tracci schematicamente il ritratto in fase. A che cosa corrispondono i diversi tipi di moto che vi compaiono (equilibri, librazioni, rotazioni, moti sulle separatrici) nel sistema a due gradi di libertà di partenza?

3. Si consideri un dato iniziale $(\vartheta_0, \varphi_0, \dot{\vartheta}_0, \dot{\varphi}_0)$ con $\vartheta_0 = 0$ e si determini la condizione su $\dot{\vartheta}_0, \dot{\varphi}_0$ perchè le traiettorie del sistema completo si avvolgano a elica sul toro (l'angolo ϑ avanza monotonamente). Si assuma qui $R = 2r$.
4. Si consideri il caso $\dot{\vartheta}_0 = \epsilon \ll 1$, e trascurando termini $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ si determini il valore φ_1 in corrispondenza del quale ϑ ripassa per lo zero. [Suggerimento: si tratti il sistema ridotto in approssimazione di piccole oscillazioni, determinandone il periodo...].



Soluzione

Derivando le (*) si trova

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\vartheta} - (R + r \cos \vartheta) \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\vartheta} + (R + r \cos \vartheta) \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= r \cos \vartheta \dot{\vartheta} .\end{aligned}$$

Quadrando e sommando si ha

$$v^2 = r^2 \dot{\vartheta}^2 + (R + r \cos \vartheta)^2 \dot{\varphi}^2 ,$$

pertanto la lagrangiana, che in assenza di forze attive si riduce all'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$, è

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(R + r \cos \vartheta)^2\dot{\varphi}^2 .$$

La lagrangiana non dipende da φ , perciò si conserva

$$p_\varphi = m(R + r \cos \vartheta)^2 \dot{\varphi}$$

e per inversione si trova

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m(R + r \cos \vartheta)^2} .$$

La lagrangiana ridotta è allora

$$\begin{aligned}L'(\vartheta, \dot{\vartheta}; p_\varphi) &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(R + r \cos \vartheta)^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2(R + r \cos \vartheta)^4} - \frac{p_\varphi^2}{m(R + r \cos \vartheta)^2} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 - W(\vartheta; p_\varphi) ,\end{aligned}$$

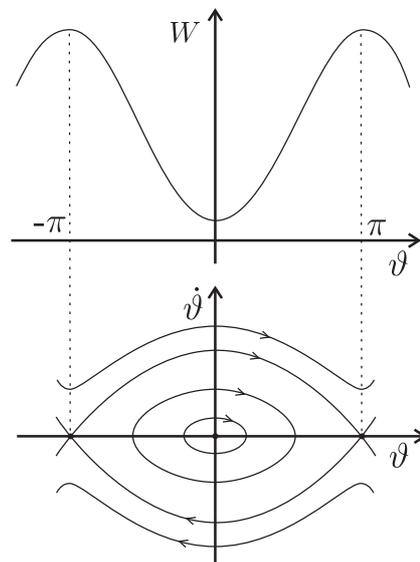
ove il potenziale efficace W è

$$W(\vartheta; p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2m(R + r \cos \vartheta)^2} . \quad (\#)$$

Con evidenza i minimi e massimi di W , corrispondenti all'equilibrio stabile e instabile del sistema ridotto, sono rispettivamente $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$. Il grafico del potenziale e il ritratto ritratto in fase sono qualitativamente simili al caso del pendolo: il potenziale è diverso, ma la struttura dei massimi e minimi è la stessa, e questo basta. La figura è riprodotta qui a fianco.

Non è difficile reinterpretare i diversi moti che appaiono nel ritratto in fase del sistema ridotto come moti del sistema a due gradi di libertà di partenza.

- L'equilibrio stabile corrisponde a un moto circolare uniforme lungo l'equatore esterno del toro.
- L'equilibrio instabile corrisponde a un moto circolare uniforme lungo l'equatore interno.
- Le librazioni corrispondono a moti che oscillano attorno all'equatore esterno, senza mai raggiungere quello interno, dunque senza mai avvolgersi attorno al toro; ϑ è oscillante.
- Le rotazioni corrispondono a moti che invece si avvolgono attorno al toro; ϑ avanza monotonicamente.
- Infine le separatrici corrispondono a moti doppiamente asintotici, per $t \rightarrow \pm\infty$, al moto circolare uniforme sull'equatore interno (la traiettoria taglia una e una sola volta l'equatore esterno).



La condizione perchè un moto si avvolga a elica sul toro è che esso corrisponda a una rotazione del sistema ridotto, e dunque che l'energia $K + W$ del sistema ridotto sia maggiore di $W(\pi)$. Avendo supposto inizialmente $\vartheta_0 = 0$, la condizione si scrive

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}_0^2 + W(0; p_\varphi) > W(\pi; p_\varphi) .$$

Usando l'espressione (#) di W , e sostituendo in essa

$$p_\varphi = m(R + r \cos \vartheta_0)^2 \dot{\varphi}_0 = m(R + r)^2 \dot{\varphi}_0 ,$$

dopo qualche calcolo si trova la condizione

$$\dot{\vartheta}_0^2 > \frac{4R}{r} \frac{(R+r)^2}{(R-r)^2} \dot{\varphi}_0^2$$

che per $R = 2r$ si riduce a

$$\dot{\vartheta}_0^2 > 72\dot{\varphi}_0^2 .$$

Non c'è ovviamente nessuna condizione su φ_0 .

Per $\vartheta_0 = 0$ e $\dot{\vartheta}_0 = \varepsilon$ piccolo, ϑ compie piccole oscillazioni attorno allo zero. La pulsazione è

$$\omega^2 = \frac{W''(0; p_\varphi)}{mr^2} = \frac{R+r}{r} \dot{\varphi}_0^2 ,$$

e ϑ ripassa per lo zero dopo mezzo periodo, cioè dopo il tempo

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\dot{\varphi}_0} \sqrt{\frac{r}{R+r}}.$$

Durante questo tempo $\vartheta(t)$ è piccolo con ε , perciò $\cos \vartheta(t) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e

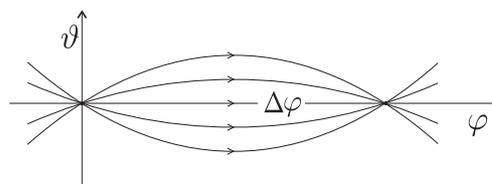
$$\dot{\varphi}(t) = \frac{p_\varphi}{m(R+r \cos \vartheta(t))} = \frac{p_\varphi}{m(R+r)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \dot{\varphi}_0^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Pertanto nel tempo t l'angolo φ avanza di

$$\Delta\varphi = \pi \sqrt{\frac{r}{R+r}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Trascurando il termine $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ si ottiene l'avanzamento di φ al limite $\vartheta_0 \rightarrow 0$ (l'intuizione forse suggerisce $\Delta\varphi \rightarrow 0$, ma non è così.)

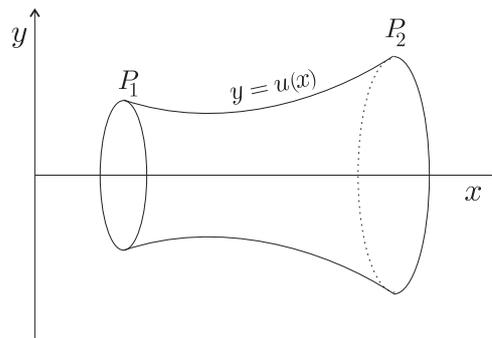
Si ha così un effetto di focalizzazione delle traiettorie, cioè delle geodetiche sul toro, paragonabile a quello di una lente: un fascio stretto di geodetiche uscenti da $(0, \varphi_0)$ si focalizza nuovamente nel “punto coniugato” $(0, \varphi_0 + \Delta\varphi)$ con $\Delta\varphi$ dipendente solo dalla geometria del toro (dal rapporto R/r); si veda la figura.



Problema 29 (calcolo variazionale)

In un piano cartesiano Oxy si consideri la famiglia di curve (regolari) del tipo $y = u(x)$ passanti per due punti P_0, P_1 assegnati, e sia $S[u]$ l'area della superficie di rotazione generata dalla curva u per rotazione attorno all'asse x (vedi figura).⁴

1. Si determini l'equazione della particolare curva u che rende stazionario il funzionale S .
2. Si determini una funzione $E(u, u')$, ove $u' = \frac{du}{dx}$, che (in corrispondenza alla soluzione) risulti essere costante in x .
3. Sfruttando la quantità E così determinata si riduca alle quadrature la determinazione di u .



⁴Il problema si può riformulare come ricerca della configurazione di equilibrio di una lamina liquida (una bolla di sapone) appoggiata a due circonferenze coassiali, quando le forze di tensione superficiale siano dominanti rispetto alla gravità.

Soluzione

La lunghezza del tratto di arco tra x e $x + dx$ è $ds = \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$; la corrispondente area sulla superficie di rotazione, supponendo $x \geq 0$, è $2\pi u(x) ds$. Il funzionale che ad ogni funzione u associa l'area della superficie di rotazione è allora

$$S[u] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx . \quad (*)$$

La corrispondente funzione di Lagrange è

$$L(u, u') = u \sqrt{1 + u'^2} .$$

Attenzione: L è una funzione ordinaria di due *variabili reali* u e u' ; S è il funzionale che si ottiene, per ogni scelta della *funzione* u , calcolando l'integrale (*) in x . La notazione è pratica ma un po' ambigua: u e u' sono una volta numeri reali, l'altra funzioni. Con un po' di attenzione non ci si sbaglia.

L'equazione per u altro non è che l'equazione di Lagrange, o più precisamente di Eulero-Lagrange, associata a L (l'equazione è perfettamente definita, nonostante L non abbia la forma $K - V$ tipica della meccanica):

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 .$$

Con un po' di pazienza si calcola

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \sqrt{1 + u'^2} , \quad \frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{uu'}{\sqrt{1 + u'^2}} ,$$

e poi

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{\sqrt{1 + u'^2}(u'^2 + uu'') - uu' \frac{u'u''}{\sqrt{1 + u'^2}}}{1 + u'^2} .$$

Mettendo assieme, dopo qualche elementare passaggio algebrico si trova per l'equazione di Eulero-Lagrange l'espressione

$$uu'' = 1 + u'^2 . \quad (\#)$$

L'equazione è risolta dalla cosiddetta *catenaria*,⁵

$$u = h \cosh \frac{x - a}{h} , \quad (**)$$

con h , a costanti arbitrarie dal significato abbastanza trasparente: a è il punto di minimo della curva, h è il corrispondente valore della y . L'arbitrarietà delle costanti può essere usata (con qualche problema nel quale non entriamo) per imporre le condizioni agli estremi, ovvero che la curva passi per P_1 e P_2 .

⁵La catenaria è la forma assunta da una catena di spessore trascurabile (un filo perfettamente flessibile di densità costante) sospeso tra due punti fissati. I due problemi sono simili, come si vede scrivendo l'espressione del funzionale energia potenziale della catenella che, come è facile verificare, differisce da $S[u]$ solo per una inessenziale costante moltiplicativa. L'idea è che la configurazione assunta dalla catenella corrisponda a un minimo dell'energia potenziale. La differenza, significativa, tra i due problemi è che per la catena sospesa il minimo è vincolato alla condizione che la lunghezza della catena sia costante; un vincolo analogo non sussiste per la ricerca della superficie di rotazione di area minima. La ricerca dei massimi e minimi vincolati si effettua, nel calcolo delle variazioni come nel calcolo in più variabili, mediante i *moltiplicatori di Lagrange*.

La verifica che la (**) effettivamente risolve la (#) è molto semplice ed è lasciata per esercizio. Più interessante è dedurre la soluzione, ovvero costruirla partendo dall'equazione. Non conviene però attaccare direttamente la (#), ma aggirarla riducendo preliminarmente il problema a un'equazione del primo ordine. Per questo ci viene in aiuto un fatto importante: L non dipende dalla variabile indipendente x (l'equivalente del tempo, nei consueti sistemi lagrangiani della meccanica), perciò si conserva la quantità, analoga all'energia,

$$E(u, u') = u' \frac{\partial L}{\partial u'}(u, u') - L(u, u')$$

(dicendo che E si conserva si intende che $E(u(x), u'(x))$ è costante in x , non appena u è soluzione dell'equazione di Eulero–Lagrange). A conti fatti si trova

$$E(u, u') = -\frac{u}{\sqrt{1+u'^2}}.$$

(E' un utile esercizio calcolare la derivata di Lie E' e verificare che essa effettivamente si annulla non appena u è soluzione della (#).)

Posto $E(u, u') = -h$, si trova subito per u l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{u^2}{h^2} - 1},$$

nella quale h è un parametro. L'equazione si risolve per separazione di variabili:

$$dx = \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{h^2} - 1}}, \quad x - x_0 = \int_{y_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{v^2}{h^2} - 1}};$$

l'integrale è di quelli elementari e dà l'arco coseno iperbolico, precisamente si trova

$$x - x_0 = h \operatorname{arccosh} \frac{v}{h} \Big|_{y_0}^u$$

ovvero anche

$$x = h \operatorname{arccosh} \frac{u}{h} + a,$$

con a opportuna costante. (L'integrale differisce dal più consueto integrale che dà l'arco coseno per il segno del radicando; questo al solito muta la funzione trigonometrica nella corrispondente funzione iperbolica.) Per inversione si trova la (**).