

MOTI ORDINATI E MOTI CAOTICI

Da: *Archimede*, n. 4/2001, pag. 171-185

1. Moti ordinati. La nozione di moto ordinato è antica. Sin dagli albori dell'astronomia si è cercato di descrivere il moto degli astri — Sole, Luna, pianeti — in modi diversi ma sempre, per quanto possibile, come composizione di moti circolari uniformi. Modelli rozzi come le sfere di Eudosso, o raffinati (e bellissimi) come il sistema a epicicli di Tolomeo, modelli eliocentrici come l'antico modello di Aristarco di Samo poi ripreso da Copernico, tutti adoperano, come mattone fondamentale e ideale, il moto circolare uniforme. Moto che da un lato ha una intrinseca bellezza cui è difficile resistere — la bellezza dell'ingranaggio di un antico orologio — dall'altro ha una estrema praticità di uso: i raggi di ogni cerchio restano costanti, gli angoli su di essi avanzano uniformemente... Poche moltiplicazioni e un goniometro consentono di collocare in fretta ogni pianeta in cielo al posto giusto. Tutti i moti seguono un "disegno" semplice, tutto è limpido e prevedibile.

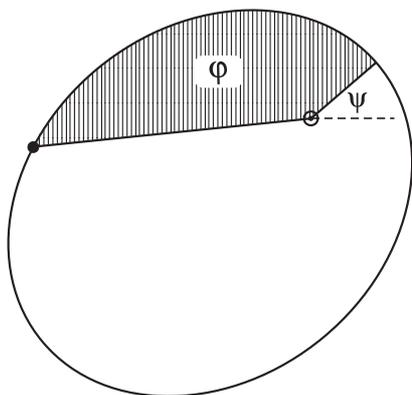


Figura 1. *Il problema di Keplero.*

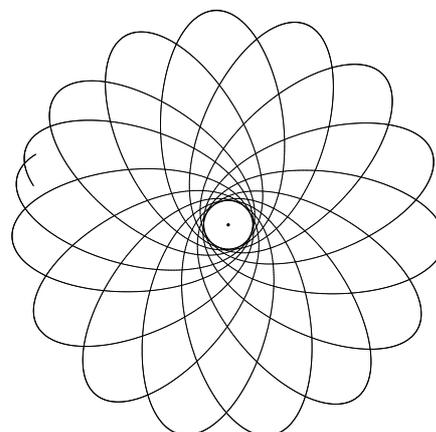


Figura 2. *Il moto a rosetta.*

Apparentemente l'Astronomia e la Fisica del '600 hanno spazzato via ogni idea di ordine a priori e destituito il moto circolare uniforme dalla sua centralità: da Newton in poi ogni astro, come ogni punto materiale del mondo, si muove ciecamente, obbedendo a null'altro che alla forza che trova per via. Un'indagine più attenta tuttavia mostra che la questione è più sottile. Consideriamo il moto di un pianeta attratto da un centro di forza fisso (un sole molto più massivo), con potenziale kepleriano $V(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$. Il moto, si sa, è piano e avviene su un'ellisse con uno dei fuochi nel centro di forza (figura 1); per comodità ci riduciamo al piano dell'orbita, ignorando la terza coordinata. Nel sistema si conservano l'energia¹⁾ $E < 0$, che determina il semiasse maggiore dell'ellisse, e inoltre, grazie alla simmetria di rotazione del problema, il momento angolare M , che per ogni E determina il semiasse minore, cosicché E e M insieme fissano la forma geometrica

¹⁾ Qui e in seguito ci riferiremo per comodità all'energia per unità di massa.

dell'ellisse.²⁾ L'orientamento dell'ellisse nel piano si specifica con un angolo, ad esempio l'angolo ψ indicato in figura che individua la direzione del perielio. Infine la posizione del pianeta sull'ellisse si specifica con un secondo angolo φ , e una buona scelta è $\varphi = 2\pi A/A_{\text{tot}}$, ove A è l'area tratteggiata in figura e A_{tot} è l'area dell'ellisse. Insieme E, M, φ, ψ determinano completamente lo stato dinamico (posizione e velocità) del pianeta, ovvero sono possibili coordinate per descrivere il suo moto. Nel corso del tempo le coordinate E e M restano costanti, l'angolo φ (seconda legge di Keplero) avanza uniformemente, l'angolo ψ resta costante, ma anche questo è un modo di avanzare uniformemente. L'angolo ψ resta costante, per così dire, accidentalmente: in un più generico moto centrale, con potenziale $V(r)$ qualsiasi anziché kepleriano, si ha come è noto un moto “a rosetta” (figura 2); si intuisce che tale moto più generico si descrive dicendo che E e M ancora si conservano, ma questa volta entrambi gli angoli avanzano.

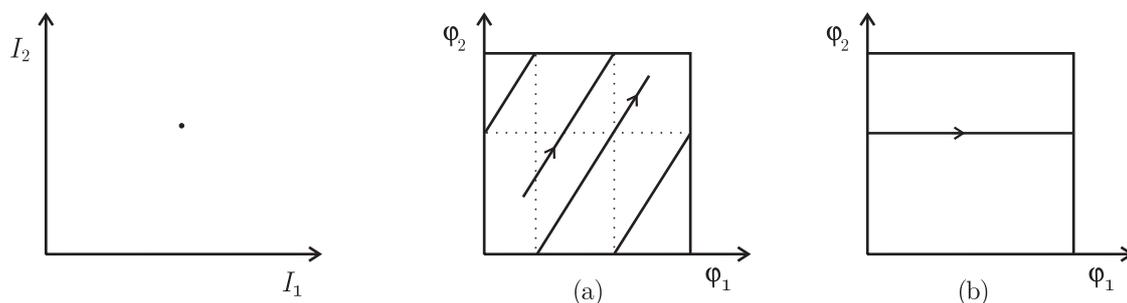


Figura 3. Il moto centrale nelle coordinate di azione–angolo, nel caso generico (a) e kepleriano (b): le azioni si conservano, gli angoli avanzano uniformemente sul toro (i lati opposti del quadrato si identificano).

Questo uso delle variabili E, M, φ, ψ come coordinate non è una forzatura: al contrario, si potrebbe vedere, la formulazione più moderna e più geometrica della meccanica, che è la meccanica hamiltoniana (abbiamo così fatto un salto in avanti di un paio di secoli, all'epoca di Liouville e Poincaré) conduce naturalmente a queste variabili, a meno della irrilevante sostituzione di E con $\alpha/\sqrt{-2E}$ (per ragioni tecniche inerenti al formalismo hamiltoniano). Una notazione comune è

$$I_1 = \alpha/\sqrt{-2E}, \quad I_2 = M, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \psi.$$

$I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2$ sono dette *coordinate di azione–angolo*. Il moto in queste coordinate si svolge come rappresentato in figura 3: le azioni I_1, I_2 si conservano, i due angoli φ_1, φ_2 avanzano uniformemente su un toro bidimensionale (solo φ_1 avanza, nel caso kepleriano). Una rappresentazione equivalente, anch'essa naturale nel formalismo hamiltoniano, si ottiene

²⁾ Le leggi di conservazione sono sempre associate a più o meno palesi simmetrie del problema (*Teorema di Nöther*). In particolare, all'invarianza per traslazione è associata la conservazione del momento lineare, mentre all'invarianza per rotazione è associata la conservazione del momento angolare; l'energia a sua volta si conserva quando non c'è dipendenza esplicita dal tempo, ovvero quando il problema è invariante per traslazione temporale. Per il legame tra le quantità conservate E e M e i semiassi delle ellissi nel problema di Keplero si veda un qualunque trattato di meccanica razionale.

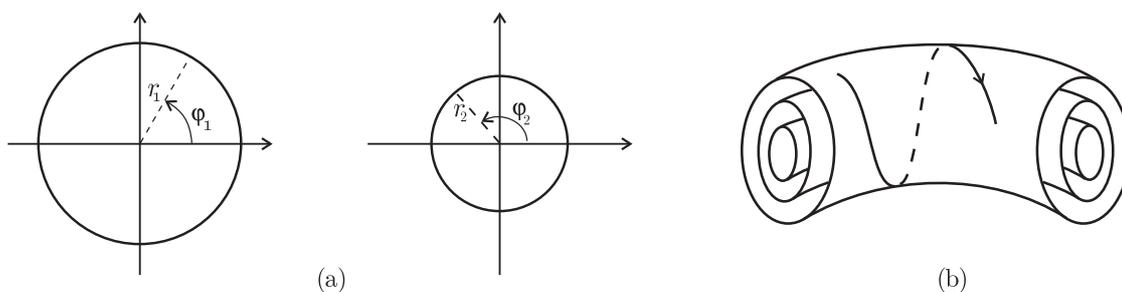


Figura 4. *Il moto centrale come combinazione di due moti circolari uniformi (a); i tori invarianti nello spazio delle fasi (b).*

pensando (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) come coordinate di tipo polare, e allora il moto si svolge come rappresentato in figura 4a (è consuetudine prendere come raggi dei cerchi $r_j = \sqrt{2I_j}$).

Come si vede, *la meccanica moderna ritorna al modello ideale dei moti circolari uniformi*, con la sola differenza che i cerchi non stanno qui nello spazio ordinario, o spazio delle configurazioni, ma in uno spazio più astratto. Nel suo insieme, lo spazio delle fasi (quadrimensionale) è decomposto naturalmente, o “foliato”, in tori bidimensionali; ciascun toro è individuato dalle due azioni e su di esso corrono i due angoli. Nello spazio tridimensionale si può solo disegnare una famiglia di questi tori, per esempio quelli di energia fissata o di momento angolare fissato (figura 4b).

Sistemi a n gradi di libertà per i quali esistono coordinate $I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, nelle quali il moto ha l’andamento semplice

$$(1) \quad I_j(t) = I_j^o, \quad \varphi_j(t) = \varphi_j^o + \omega(I_1^o, \dots, I_n^o)t,$$

e corrispondentemente lo spazio delle fasi è decomposto in tori invarianti (ovvero, guardato bene, ha una struttura a epicicli), sono detti “integrabili”; il teorema di Liouville–Arnold (1855,1963) assicura, sostanzialmente, che coordinate con queste proprietà esistono ogniqualvolta un sistema a n gradi di libertà possiede n costanti del moto indipendenti³⁾ e i moti sono limitati (come per il problema di Keplero, quando $E < 0$).

Per i sistemi a un grado di libertà come il pendolo, la condizione di integrabilità è sempre soddisfatta — la sola conservazione di E è sufficiente — se si escludono curve di livello dell’energia eccezionali, contenenti punti di equilibrio (su tali punti il gradiente di E si annulla e l’indipendenza viene meno). Il pendolo, si sa, ha due configurazioni di equilibrio: $\vartheta = 0$ stabile, e $\vartheta = \pi$ instabile, avendo denotato con ϑ il consueto angolo tra la verticale e l’asticella che sostiene il pendolo; la sua energia (a meno di una irrilevante costante moltiplicativa) si scrive

$$E(\vartheta, v) = \frac{v^2}{2} - \omega^2(\cos \vartheta - 1), \quad \omega^2 = g/l,$$

ove $v = \frac{d\vartheta}{dt}$. Le orbite coincidono necessariamente con le curve di livello $E(\vartheta, v) = (\text{cost})$, e insieme costituiscono il “ritratto in fase” del sistema (figura 5). Per $0 < E < 2\omega^2$ si hanno

³⁾ Che in più soddisfano una condizione tecnica (avere mutua parentesi di Poisson nulla) in linea di principio rilevante, ma di fatto verificata in tutti i casi concreti se le n costanti del moto sono scelte bene.

curve chiuse attorno al punto di equilibrio stabile $(0, 0)$, e corrispondentemente il pendolo oscilla; per $E > 2\omega^2$ si hanno ancora curve chiuse ($\vartheta = \pi$ e $\vartheta = -\pi$ coincidono), ma diverse topologicamente, e corrispondentemente il pendolo ruota in un verso o nell'altro senza arrestarsi; fanno eccezione i moti a $E = 2\omega^2$ sulle cosiddette "separatrici", cioè sui tratti di curva che congiungono i punti instabili (coincidenti) $(\pm\pi, 0)$: questi moti non sono periodici. Dentro o fuori le separatrici si intuisce che, tramite l'introduzione di opportune coordinate, si può descrivere il moto con il linguaggio sopra impiegato: una quantità I resta costante (si rivela opportuno prendere $I = \text{area sottesa dalla curva di livello dell'energia}$), mentre un angolo φ avanza uniformemente (basta porre $\varphi = 2\pi t/T(E)$, ove t è il tempo di percorrenza sulla curva a partire da una opportuna origine e T è il periodo dell'oscillazione o rotazione).

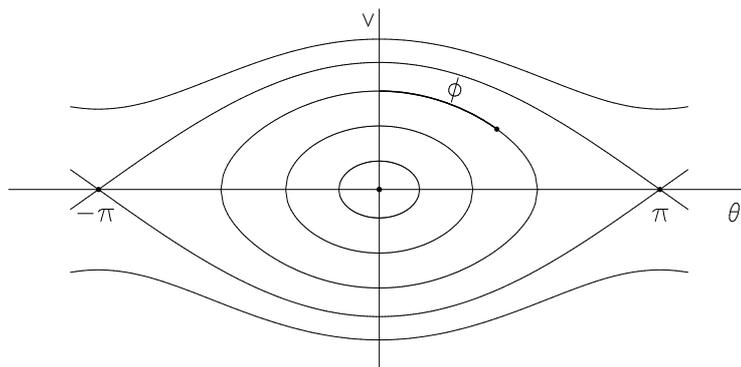


Figura 5. Il "ritratto in fase" del pendolo.

Come unico altro esempio di sistema integrabile citiamo la trottola (corpo rigido simmetrico con un punto fisso, nella gravità). Il sistema ha tre gradi di libertà; in esso si conservano l'energia E e inoltre, per le simmetrie del problema, la componente verticale M_z del momento angolare e la sua componente M_{\parallel} parallela all'asse del corpo. Nel corso del moto (figura 6) tre angoli avanzano uniformemente: sostanzialmente un angolo descrive la rotazione propria, un altro il moto di precessione attorno alla verticale, un terzo è la fase della "nutazione" (l'oscillazione dell'angolo tra l'asse della trottola e la verticale). Quasi lo stesso modello, come è noto, si applica a un pianeta rigonfio all'equatore, in moto circolare attorno al sole.⁴⁾ I tre angoli corrispondono alla rotazione diurna (periodo un giorno, per la Terra), alla precessione degli equinozi (periodo 26 000 anni, tenendo conto del forte contributo della Luna), e all'impercettibile oscillazione dell'inclinazione dell'asse terrestre sull'eclittica (periodo circa diciotto anni).

I sistemi integrabili, con la loro struttura a epicicli o, in linguaggio moderno, con i loro moti uniformi su tori invarianti, sono il modello, o prototipo, di sistema con moti ordinati. Sono anche il prototipo della buona capacità di prevedere il futuro (o il passato), ove sia noto con buona approssimazione il dato iniziale: dalla (1) è infatti evidente che se il dato iniziale (I^o, φ^o) è noto con incertezza $\delta I^o, \delta \varphi^o$, allora nel corso del tempo l'incertezza $\delta I(t)$

⁴⁾ Il moto ellittico introdurrebbe una forzante periodica, dovuta all'oscillazione nel tempo della distanza dal centro di forza, dagli effetti non banali.

si mantiene costante, mentre $\delta\varphi(t)$ cresce solo linearmente con t :

$$\|\delta\varphi(t)\| < C \|\delta I^o\| |t|, \quad C \sim \left\| \frac{\partial\omega}{\partial I} \right\|,$$

e dunque si mantiene piccolo a lungo se δI^o è piccolo. Questa ottima capacità di previsione è alla base dell'idea Laplaciana del perfetto determinismo del mondo meccanico, vera pietra angolare della cultura scientifica dalla fine del '700 in poi.

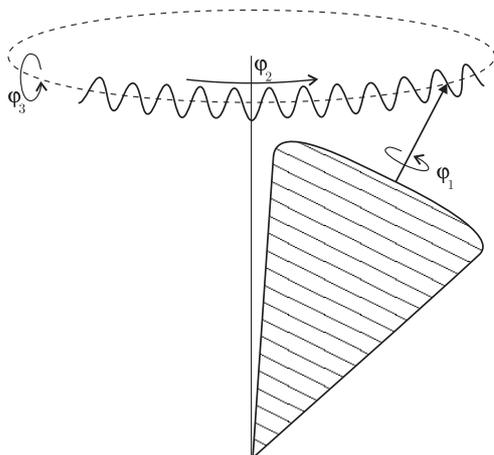


Figura 6. La trottola come esempio di sistema integrabile a tre gradi di libertà.

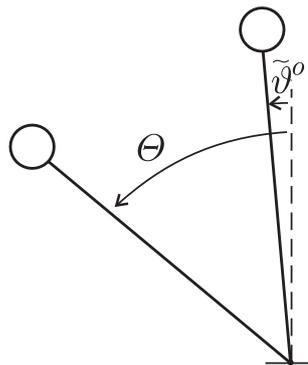


Figura 7. Il pendolo attorno alla configurazione di equilibrio instabile $\vartheta = \pi$.

2. Il pendolo forzato. Poincarè fu il primo ad aver chiaro che genericamente, quando si introduce in un sistema integrabile una perturbazione, cioè una piccola modifica, passando ad esempio dal pendolo al pendolo forzato periodicamente di equazione

$$(2) \quad \ddot{\vartheta} = -\omega^2 \sin \vartheta + \varepsilon \cos \Omega t,$$

il carattere dei moti muta in modo sostanziale e l'integrabilità si perde.

Prima di proseguire conviene fare una piccola digressione, per discutere il comportamento del pendolo imperturbato ($\varepsilon = 0$) attorno al punto di equilibrio instabile $(\pi, 0)$. Posto per praticità $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \pi$, il moto con dato iniziale $(\tilde{\vartheta}^o, v^o)$ è dato con buona approssimazione⁵⁾ da

$$\tilde{\vartheta}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\vartheta}^o + v^o/\omega) e^{\omega t} + \frac{1}{2}(\tilde{\vartheta}^o - v^o/\omega) e^{-\omega t}.$$

L'effetto degli esponenziali è quello di separare tra loro rapidamente traiettorie inizialmente vicinissime e in particolare di far cadere in fretta il pendolo non appena lo si scosti anche

⁵⁾ La solita approssimazione in cui $\sin \tilde{\vartheta}$ si confonde con $\tilde{\vartheta}$ per $\tilde{\vartheta}$ piccolo. L'approssimazione, già buona per le consuete oscillazioni del pendolo ($\sin \vartheta$ differisce da ϑ del 4% circa a $\vartheta = \frac{1}{2}$ radianti), è ancora migliore per il pendolo rivoltato, perché il grosso del tempo viene speso in prossimità del punto di equilibrio instabile. L'errore finale sulla (3), stimabile con uno sviluppo in serie, è inferiore al centesimo di secondo.

di pochissimo dal punto di equilibrio $(\tilde{\vartheta}, v) = (0, 0)$. Quanto in fretta? Per un pendolo di lunghezza $l = 10$ cm si ha $\omega = \sqrt{g/l} \simeq 10 \text{ sec}^{-1}$; se allora prendiamo, per fissare le idee, $v^o = 0$ e $\tilde{\vartheta}^o \neq 0$ piccolo, il tempo necessario perché il pendolo cada fino a distanza Θ (figura 7) è

$$(3) \quad t \simeq \omega^{-1} \log |2\Theta/\tilde{\vartheta}^o|$$

(si è trascurato $e^{-\omega t}$ rispetto a $e^{\omega t}$). Per Θ ad esempio pari a 0.5 radianti e $\tilde{\vartheta}^o = 10^{-3}$ radianti (un decimo di millimetro dall'equilibrio), t non arriva a un secondo. Se con uno sforzo di fantasia pensiamo di ridurre $\tilde{\vartheta}^o$ a 10^{-6} radianti, t si limita a raddoppiare. Se anche, al di là di ogni sensatezza fisica, poniamo $\tilde{\vartheta}^o = 10^{-12}$ radianti (la distanza dall'equilibrio è ora ampiamente inferiore al diametro di un atomo), il tempo t di caduta non arriva a 4 secondi. Trascorso questo tempo dunque, una variazione ridicolmente piccola del dato iniziale diventa macroscopica e corrispondentemente una minuscola incertezza sul dato iniziale produce la totale incertezza sullo stato del sistema (cade a destra? a sinistra?). Siamo ben lontani, si vede, dal radioso ottimismo di Laplace. *Tutto il gioco, va sottolineato, è fatto dagli esponenziali* (sempre presenti in prossimità dei punti di equilibrio instabili), che per inversione producono nella (3) il logaritmo.⁶⁾

Se ora prendiamo in considerazione il pendolo forzato ($\varepsilon > 0$), quello che avviene, nella sostanza, è che questo tipo di instabilità si estende a una regione di misura positiva. La teoria di questi fenomeni, impiantata da Poincaré e poi ripresa mezzo secolo dopo soprattutto da Melnikov e Smale, qui si fa complessa. Per dare un'idea di cosa avviene procederemo mediante un'indagine numerica, realizzata simulando al calcolatore il sistema mediante risoluzione approssimata dell'equazione del moto (2). Innanzitutto, conviene passare dall'equazione (2) di secondo ordine non autonoma (cioè dipendente esplicitamente dal tempo) al sistema autonomo di tre equazioni del primo ordine

$$(4) \quad \dot{\vartheta} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \vartheta + \varepsilon \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \Omega.$$

Lo spazio delle fasi naturale, per tale sistema, è tridimensionale, ma ci si riduce facilmente a un piano fissando un qualunque valore di φ , ad esempio $\varphi = 0$, e riportando sul piano di fase (ϑ, v) lo stato del sistema a intervalli regolari, nel momento in cui φ passa per lo zero. Si ottiene così una mappa $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, detta mappa di Poincaré del sistema. A ogni moto con dato iniziale $(\vartheta^o, v^o, 0)$ corrisponde così un'orbita discreta, precisamente la successione di punti del piano

$$(\vartheta^o, v^o), \Psi(\vartheta^o, v^o), \Psi^2(\vartheta^o, v^o), \dots, \Psi^k(\vartheta^o, v^o), \dots$$

che si ottiene iterando Ψ .

Per $\varepsilon = 0$ evidentemente si ritrova il consueto ritratto in fase del pendolo, con le medesime curve invarianti — le curve di livello di $E(\vartheta, v)$ — che ora però sono percorse a

⁶⁾ Il logaritmo di x diverge per $x \rightarrow \infty$. Ma se x rappresenta una qualunque quantità fisicamente sensata, $\log x$ non è mai grande: ad esempio, se x è il rapporto tra il diametro dell'Universo e il diametro di un protone, si ha $\log x < 100$. Per questo in caso di equilibrio instabile la capacità di previsione è sostanzialmente limitata.

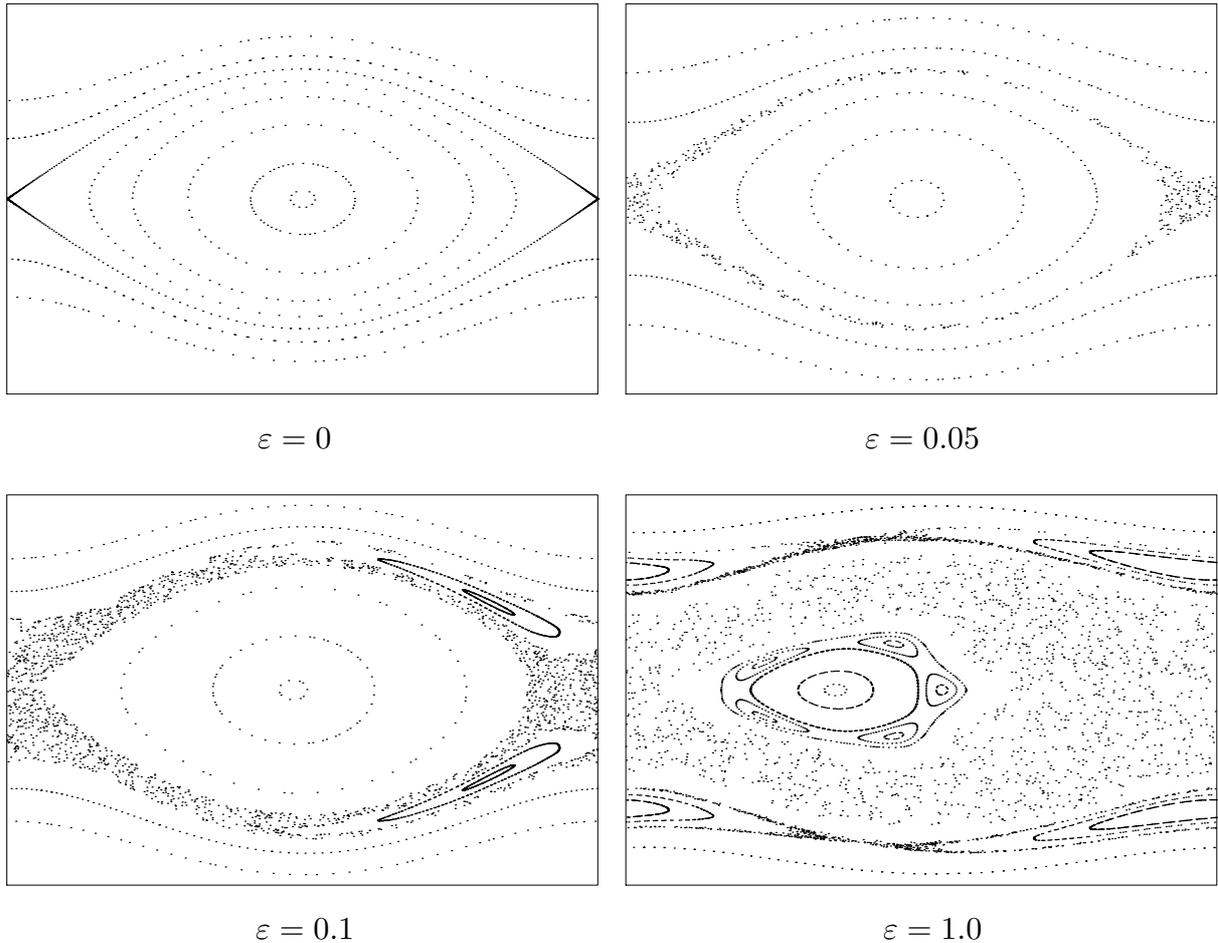


Figura 8. *Regione ordinata e regione caotica per il pendolo forzato* ($\omega = 1$, $\Omega = \sqrt{2}$).

salti (figura 8, primo riquadro). Per $\varepsilon > 0$ invece l'energia non si conserva più e dunque cade l'obbligo che i punti di una medesima orbita stiano su una stessa curva. Il risultato, per diversi valori di ε , è riprodotto in figura 8: per ε piccolo, lontano dalle separatrici, praticamente nulla cambia, e i punti continuano a stare allineati su curve invarianti, come se esistesse una quantità conservata $E_\varepsilon(\vartheta, v) = E(\vartheta, v) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Al posto delle separatrici invece compare, come novità, una fascia ove le curve invarianti sono scomparse, di area non nulla e crescente con ε ; un'analisi attenta mostrerebbe che lo spessore della fascia è $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. In ciascuna figura, tutti i punti della fascia priva di curve appartengono a una medesima orbita.

La regione delle curve invarianti è detta *regione ordinata*, e in essa il moto ha sostanzialmente il carattere dei sistemi integrabili.⁷⁾ La fascia che sostituisce le separatrici è detta *regione caotica*, e in essa il sistema ha caratteristiche qualitative nuove. In

⁷⁾ E' quasi esattamente così. In realtà bisogna escludere dalla considerazione un insieme di dati iniziali di misura piccolissima, in questo caso $\mathcal{O}(e^{-1/\varepsilon})$, ma (la questione è sottile) aperto e denso. Che il grosso delle curve sopravviva alla perturbazione, nella presentazione che stiamo facendo, sembra naturale. In realtà è il risultato di un teorema altamente non banale, detto teorema KAM (da Kolmogorov, Arnol'd e Moser, 1954–1962), vera pietra miliare della meccanica hamiltoniana.

particolare:

- i) il moto presenta forte instabilità al variare del dato iniziale: punti inizialmente vicini tipicamente si separano esponenzialmente, $d(t) \simeq d(0)e^{\chi|t|}$ con $\chi > 0$ (avendo denotato con d la distanza), come avveniva in prossimità del punto di equilibrio instabile del pendolo imperturbato;
- ii) osservazioni con precisione finita generano processi casuali.

Per spiegare quest'ultima osservazione abbandoniamo provvisoriamente la mappa Ψ del pendolo forzato e studiamo una mappa elementare costruita appositamente perché gli aspetti di casualità della dinamica, pur in linea di principio deterministica, appaiano chiari.

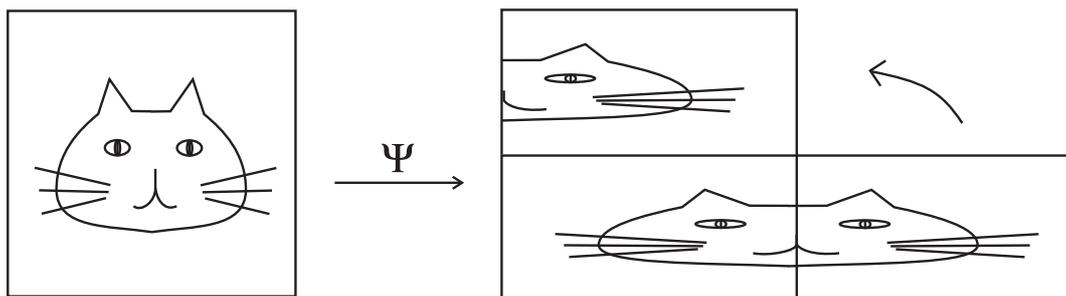


Figura 9. La “mappa del fornaio”.

3. La “mappa del fornaio” (*Baker's map*). Consideriamo il quadrato $Q = [0, 1) \times [0, 1)$, e la mappa $\Psi : Q \rightarrow Q$, invertibile, definita da

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{per } x < \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{per } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

“La pasta è schiacciata fino a dimezzare l'altezza e raddoppiare la lunghezza; poi è tagliata e sovrapposta” (figura 9). Salta agli occhi una caratteristica importante della dinamica: punti sul medesimo segmento verticale si avvicinano esponenzialmente, sotto l'effetto delle iterate Ψ^k , per $k > 0$, mentre si discostano per $k < 0$ (cioè iterando l'inversa Ψ^{-1}); viceversa punti che si trovano sul medesimo segmento orizzontale si accostano per $k < 0$ e si separano per $k > 0$. *Tutto quello che diremo su questo sistema dinamico dipende solo da questo meccanismo di contrazione/dilatazione esponenziale*, ed è dunque condiviso da tutti i sistemi dinamici che lo possiedono (sistemi “iperbolici”). Ma per procedere speditamente sfrutteremo una peculiarità di questo particolare sistema, che ci consente di far breccia con poco sforzo nella sua dinamica.

Per ogni punto $z = (x, y) \in Q$, scriviamo x e y in notazione binaria:

$$x = 0.a_0 a_1 a_2 \dots, \quad y = 0.b_0 b_1 b_2 \dots, \quad a_k, b_k = 0, 1,$$

e rimuoviamo l'ambiguità (peraltro marginale) della notazione escludendo le sequenze che terminano con la cifra “1” ripetuta indefinitamente. Capovolgendo e incollando y a sinistra di x formiamo una stringa doppiamente infinita del tipo

$$\sigma = \dots \sigma_{-3} \sigma_{-2} \sigma_{-1} . \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots = \dots b_2 b_1 b_0 . a_0 a_1 a_2 \dots$$

In questo modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra Q e l'insieme Σ delle stringhe infinite di simboli 0, 1 (privato delle stringhe che a destra e/o sinistra terminano con il simbolo "1" ripetuto indefinitamente). Denotiamo con $h : Q \rightarrow \Sigma, z \mapsto \sigma = h(z)$, la mappa così costruita. E' assai facile verificare che

Se a z è associata la stringa σ , allora a $z' = \Psi(z)$ resta associata la stringa σ' traslata a sinistra di un posto, ovvero definita da $\sigma'_k = \sigma_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Se si preferisce, si può invece traslare (a destra!) il punto decimale. La verifica, immediata, sfrutta la regola per cui, in base due, la moltiplicazione/divisione per due si fa spostando il punto decimale a destra/sinistra di un posto. Si osservi che se $x \geq \frac{1}{2}$ la prima cifra 1 scivola da x a y .

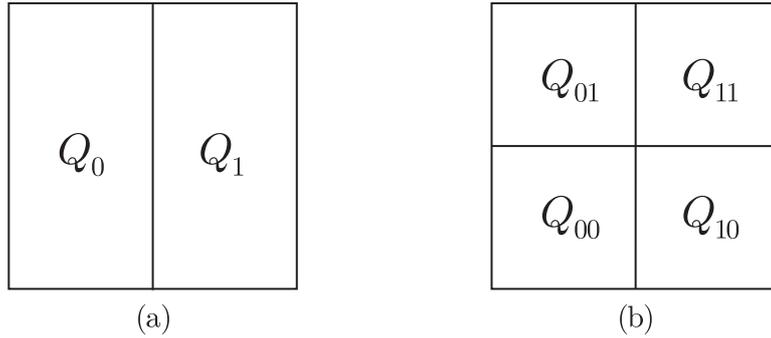


Figura 10. Le partizioni del quadrato Q secondo la prima cifra binaria di x e di x, y .

Utilizziamo questa proprietà per curiosare tra le orbite del sistema. Cominciamo con l'introdurre in Q la naturale partizione $Q = Q_0 \cup Q_1$, con $Q_0 := \{(x, y) \in Q : x < \frac{1}{2}\}$ e $Q_1 = Q \setminus Q_0$ (figura 10a); i due insiemi corrispondono rispettivamente a $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1$. Quali sono i punti z che dopo k iterazioni di Ψ si troveranno in $Q_l, l = 0, 1$? Sono ovviamente quelli col simbolo l in posizione k , cioè con $\sigma_k = l$; questo simbolo infatti, applicando k volte Ψ , si porta in posizione zero e determina l'appartenenza di $\Psi^k(z)$ a Q_0 o Q_1 . Se ne deduce immediatamente che

Comunque si prenda una stringa di simboli $\sigma \in \Sigma$, esiste un dato iniziale $z \in Q$ che la realizza, precisamente tale che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ il punto $\Psi^k(z)$ si trova in Q_0 o Q_1 a seconda che sia $\sigma_k = 0$ oppure 1. Il punto cercato altro non è che $z = h^{-1}(\sigma)$.

Invece di una divisione verticale possiamo prendere una divisione orizzontale e far riferimento alla prima cifra binaria di y anziché di x , con identico risultato. Possiamo anche introdurre contemporaneamente le due divisioni, ovvero considerare la partizione in quattro sottoinsiemi

$$Q = Q_{00} \cup Q_{01} \cup Q_{10} \cup Q_{11} ,$$

avendo posto (figura 10b)

$$\begin{aligned} Q_{00} &= \{(x, y) : 0 \leq y < \frac{1}{2}, 0 \leq x < \frac{1}{2}\}, & Q_{01} &= \{(x, y) : 0 \leq y < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x < 1\}, \\ Q_{10} &= \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq y < 1, 0 \leq x < \frac{1}{2}\}, & Q_{11} &= \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq y < 1, \frac{1}{2} \leq x < 1\}. \end{aligned}$$

A quale sottoinsieme appartenga $z = (x, y)$ dipende evidentemente dalla prima cifra binaria di x e y e dunque, facendo riferimento a $\sigma = h(z)$, dai simboli σ_{-1} e σ_0 . Fissiamo ora

l'attenzione non su Ψ ma su Ψ^2 . Preso $z \in Q$, in quale insieme si troverà $\Psi^{2k}(z)$, per ogni $k \in \mathbf{Z}$? Dipende evidentemente dai due simboli che si troveranno in posizione -1 e 0 , a cavallo del punto decimale, dopo k iterazioni di Ψ^2 , e cioè da σ_{2k-1} e σ_{2k} . *Tutte e quattro le combinazioni* $(0,0), \dots, (1,1)$ *sono evidentemente possibili*, e questo per ogni scelta di k , in modo del tutto indipendente. Così, immaginata a piacere una passeggiata sui quattro sottoinsiemi Q_{ij} della partizione, esiste sempre un dato iniziale z tale che gli iterati $\Psi^{2k}(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, la realizzano esattamente.

La generalizzazione è immediata: per ogni $s > 0$ possiamo tracciare su Q una scacchiera di $2^s \times 2^s$ celle quadrate di lato $\delta_s = 2^{-s}$; a quale cella appartenga un punto $z \in Q$ dipende evidentemente solo dalle prime s cifre binarie di x e di y , ovvero dagli elementi $\sigma_{-s}, \dots, \sigma_{s-1}$ di $\sigma = h(z)$. Ora fissiamo l'attenzione sulle iterazioni Ψ^{2ks} di Ψ^{2s} . E' immediato convincersi che

Comunque si scelga una passeggiata sulla scacchiera di $2^s \times 2^s$ celle descritta sopra, esiste un punto $z \in Q$ tale che le iterazioni $\Psi^{2ks}(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, la realizzano.

Prendendo ad esempio $s = 15$, si ottiene una griglia di 32768×32768 celle; se Q è un foglio con il lato di mezzo metro, la risoluzione è superiore a quella delle buone macchine da stampa. Presa un'immagine ad arbitrio, ad esempio Dante e Virgilio in una illustrazione del Doré, o pagina tre del giornale di oggi, esiste sempre $z \in Q$ tale che i suoi iterati (osservati di trenta in trenta) la riproducono perfettamente entro la risoluzione prefissata (anzi: possiamo scegliere l'ordine nel quale i puntini vanno a comporre l'immagine). Fissata la risoluzione, *tutti* i comportamenti sono possibili, e aver osservato ad esempio in quale cella della griglia vanno a collocarsi i primi k punti, non dà *nessuna* informazione sulla cella in cui andrà a cadere il punto successivo. Naturalmente la *stragrande* maggioranza dei dati iniziali produce solo, per iterazione di Ψ^{2s} , un grigio uniforme.

Il rovescio della medaglia è che non appena abbiamo un'orbita che per qualche ragione ci interessa — l'orbita che realizza il disegno preferito — se solo introduciamo una microscopica smagliatura nel dato iniziale, spostandolo di δ , in poche iterazioni l'orbita si perde: la separazione tra l'orbita iniziale e l'orbita variata raddoppia a ogni iterazione — gli esponenziali sono al lavoro — e dopo un numero di iterazioni di ordine $|\log \delta|$ le due orbite diventano indipendenti. Ancora: se al posto di un punto prendiamo una macchiolina, ad esempio una delle caselline di lato 2^{-s} della nostra griglia, e ne seguiamo l'evoluzione, in poche iterazioni la macchia si sparpaglia ovunque: in $2s$ iterazioni già vengono invase *tutte* le celle della griglia e rapidamente il foglio si fa grigio uniforme.

Questo sistema, che al variare del dato iniziale contiene, per così dire, tutti i moti immaginabili, ma tutti instabili ed evanescenti al minimo errore nel dato iniziale, costituisce il prototipo dei sistemi caotici. Come già si è detto, il trucco della rappresentazione binaria è spurio e le stesse proprietà della mappa si potrebbero dedurre dalla sola iperbolicità, cioè dal gioco degli esponenziali: che da un lato rendono fortemente instabili tutti i moti, dall'altro, proprio a causa di questa instabilità, rendono possibile una varietà di moti straordinariamente grande.

4. Moti ordinati e moti caotici in sistemi fisici. Un sistema come il pendolo forzato non è né completamente ordinato né completamente caotico, ma presenta coesistenza di moti ordinati e moti caotici. Già abbiamo detto che per ε piccolo una regione, che abbiamo

chiamato ordinata, è quasi riempita di curve invarianti, sulle quali il moto è simile al moto imperturbato, come se il sistema fosse ancora integrabile. Che cosa si può dire invece della regione caotica di questo sistema? Al di là dell'impressione di disordine, in fondo superficiale, che danno le figure, che cosa si può dimostrare, per il pendolo forzato, che ricordi la casualità della mappa del fornaio?

Tracciamo attorno al punto di equilibrio instabile del pendolo una palla B_δ di raggio arbitrario δ , e consideriamo la mappa Ψ del pendolo forzato. Si dimostra ad esempio che per $\varepsilon \neq 0$ piccolo:

Comunque si prenda $\delta > 0$ esiste $s \in \mathbf{N}$, tale che per ogni scelta di una stringa a tre simboli

$$\sigma = \dots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \quad \sigma_k = 0, \pm 1,$$

esiste un dato iniziale $z^o = (\vartheta^o, v^o) \in B_\delta$ i cui iterati $\Psi^{ks}(z^o)$, $k \in \mathbf{Z}$, stanno tutti in B_δ , e inoltre per $ks < j < (k+1)s$:

- $\Psi^j(z^o)$ resta in $B_\delta(z^*)$, se $\sigma_k = 0$;
- $\Psi^j(z^o)$ si sposta lungo la separatrice superiore, cioè il pendolo compie un giro in senso orario, se $\sigma_k = -1$;
- $\Psi^j(z^o)$ si sposta lungo la separatrice inferiore, cioè il pendolo compie un giro in senso antiorario, se $\sigma_k = +1$.

Il numero s è basso, di ordine $|\log \delta|$ (è sostanzialmente il numero di iterazioni di Ψ necessarie ad allontanarsi dal punto di equilibrio, se si parte a distanza δ da esso). Si vede dunque che anche nel pendolo forzato, e per forzante comunque piccola, *qualunque* comportamento pensabile si realizza (tre giri antiorari, mille orari, fermo un'ora, e poi ancora mille giri orari...) e corrispondentemente punti iniziali vicinissimi dopo poche iterazioni hanno storie completamente diverse (storie che a piacere si incontrano, si separano...).

Il pendolo forzato è certamente un sistema fisico, ma molto elementare e idealizzato, in un certo senso costruito a tavolino. Sorge allora spontanea una domanda: per quali sistemi fisici "veri" si riescono a dimostrare proprietà analoghe a queste? Per quali sistemi la coesistenza di moti ordinati e moti caotici è ben controllata teoricamente? Dispiace dire che tre secoli dopo Newton, due dopo Lagrange e Laplace, uno dopo Poincaré, e mezzo dopo la virata imposta a questi studi da Kolmogorov e allievi (e Moser, Smale e altri), quel che si sa purtroppo è ancora poco. Ci sono tutto sommato idee abbastanza chiare (anche se non sempre coperte da teoremi) per quanto riguarda sistemi con n punti materiali che si urtano elasticamente (diciamo modelli molto semplificati di gas in una scatola): in ipotesi ragionevoli sembra proprio che questi sistemi siano completamente caotici, come preteso da sempre dalla Meccanica Statistica. Si sa poi abbastanza per qualche sistema particolare, come alcune versioni del cosiddetto problema a tre corpi, o il corpo rigido in rapida rotazione. Ma ancora si sa poco, nonostante il grande sforzo di molti ricercatori e l'abbondante lavoro sia analitico sia numerico, sul principe dei sistemi dinamici, ovvero sul Sistema Solare. Se trascuriamo la massa dei pianeti rispetto a quella del Sole, spegnendo l'interazione reciproca, abbiamo già visto⁸⁾ che si ha un sistema integrabile, con moti regolari su tori invarianti, o se si preferisce con moderna struttura a epicicli. Che cosa resta

⁸⁾ Quasi visto: occorrerebbe passare per ciascun pianeta alla descrizione tridimensionale anziché piana, ma non è questo il punto.

di questa struttura se si accende la massa dei pianeti fino a valori realistici e si tiene conto dell'attrazione reciproca? Non vi sono al momento risposte soddisfacenti, ma nell'insieme sembra abbastanza chiaro che nel Sistema Solare c'è spazio sia per moti ordinati che per moti caotici. Anche la simulazione numerica, data la complessità del sistema e la necessità di andare a tempi lunghi, è difficile: tuttavia vi sono chiare indicazioni che almeno nel Sistema Solare interno (da Mercurio a Marte) alcune variabili, precisamente l'eccentricità dei diversi pianeti e l'inclinazione del piano della loro orbita rispetto a un piano fisso, compiono oscillazioni caotiche, mentre contemporaneamente altre variabili, come i semiassi maggiori degli stessi pianeti, sono regolari o almeno molto più regolari.

Quella casualità che il pendolo perturbato esprime in pochi secondi, si esprime ora sulla scala di tempo di qualche milione di anni (un tempo non lungo, confrontato con l'età del Sistema Solare di circa cinque miliardi di anni). A loro volta i moti caotici sembrano potersi trasferire, per l'interazione che c'è tra la rotazione propria di un pianeta e il moto orbitale (“accoppiamento spin-orbita”), alla cosiddetta *obliquità* dei pianeti, ovvero all'inclinazione sul piano dell'orbita del loro asse di rotazione. Alcuni studi numerici in particolare hanno dato risultati sorprendenti e forse un po' inquietanti: innanzitutto (e questo non sorprende) l'interazione tra moto orbitale e moto dell'asse di rotazione dipende in modo essenziale dalle frequenze in gioco; tra esse, gioca un ruolo particolarmente rilevante la frequenza del moto di precessione degli equinozi. A sua volta, tale frequenza è fortemente influenzata dalla presenza di un grosso satellite, come la Luna per la Terra: senza la Luna, il moto di precessione della Terra rallenterebbe di un fattore tre circa.⁹⁾ Una possibile conseguenza, suffragata da indicazioni numeriche (Laskar, 1993), è che in un sistema solare in tutto realistico, ma privato della Luna, l'asse terrestre eseguirebbe vistose variazioni di obliquità (che manderebbero a catafascio il clima) su scale di tempo di qualche milione di anni; la presenza della Luna garantisce invece la stabilità. E' un risultato interamente numerico, ancora bisognoso di conferma e soprattutto di comprensione teorica, ma sicuramente molto suggestivo e stimolante.

5. Conclusioni. Il ramo della Fisica Matematica che si occupa di questi problemi è detto “Sistemi Dinamici”. Noi ci siamo qui limitati ai soli sistemi *conservativi*, cioè quei sistemi per i quali il volume dello spazio delle fasi si conserva nel tempo (vi appartengono tutti i sistemi meccanici privi di attriti). Se si allarga lo sguardo ai sistemi *dissipativi*, il quadro fenomenologico si arricchisce notevolmente — ad esempio compaiono gli “attrattori strani”, con struttura “frattale”, di cui oggi è facile sentir parlare — ma le principali nozioni di base rimangono le stesse e in particolare l'ipebolicità, ove presente, produce moti caotici con analoghe caratteristiche di irregolarità e sostanziale imprevedibilità delle traiettorie.¹⁰⁾

Concludiamo cercando di sintetizzare in pochi pensieri quanto abbiamo qui rapidamente visto.

⁹⁾ Il fenomeno di precessione degli equinozi è un fenomeno di tipo mareale; non stupisce che la Luna conti più del Sole.

¹⁰⁾ Un sistema dissipativo con moti caotici è l'atmosfera. Condizioni iniziali vicinissime possono separarsi rapidamente su una scala di tempo di un paio di settimane, rendendo impossibili le previsioni del tempo su periodi sostanzialmente più lunghi. Il fatto va sotto il nome di “effetto farfalla”: il modo in cui una farfalla oggi batte le ali in Cina potrebbe essere rilevante per la formazione, tra qualche settimana, di un uragano nei Caraibi...

1. Esistono sistemi come il moto centrale o la trottola, e tutti i sistemi a un grado di libertà come il pendolo, che sono completamente ordinati: hanno un numero sufficiente di costanti del moto e in coordinate opportune, ma naturali, essi seguono l'antico modello del moto uniforme su cerchi di raggio fissato. Sono i sistemi più semplici e anche i più familiari: ad essi da Newton in poi la meccanica si è dedicata con maggior impegno, e fino a poco tempo fa erano forse gli unici di cui si parlava nei corsi universitari.
2. Esistono altri sistemi, come la mappa del fornaio, che invece presentano moti completamente caotici. Noi ci siamo limitati a quest'unico esempio elementare, ma se ne potrebbero fare altri, più interessanti fisicamente anche se (molto) più difficili da studiare. Elemento essenziale dei sistemi caotici è l'iperbolicità, cioè il meccanismo di dilatazione/contrazione esponenziale delle traiettorie vicine, al quale si devono la sostanziale imprevedibilità e in un certo senso la casualità dei moti.
3. Nei sistemi fisici concreti — dal pendolo forzato al Sistema Solare — moti ordinati e moti caotici coesistono, e il comportamento nell'insieme è complesso. Lo studio si fa difficile e nonostante i notevolissimi progressi degli strumenti sia analitici sia numerici a disposizione, sistemi fisici realistici come il Sistema Solare (o anche solo il modello che descrive l'accoppiamento spin-orbita per un singolo pianeta in orbita ellittica) sono ancora insufficientemente compresi.

Qualche indicazione bibliografica. Non è facile trovare sull'argomento testi a carattere introduttivo. Tra i più semplici segnalo:

A. Vulpiani, *Determinismo e Caos*. Nuova Italia Scientifica, Roma 1994.

A. Celletti e E. Perozzi, *Meccanica Celeste, il valzer dei pianeti*. CUEN, Napoli 1996.

Un po' più impegnativi sono, ad esempio,

M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. Wiley, New York 1983.

A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*. Springer, New York 1983.

L'autore mette poi a disposizione di chi ne faccia richiesta le note di un breve corso di aggiornamento per insegnanti, ove gli argomenti qui introdotti sono ripresi con dettaglio un po' maggiore, e le note di un corso universitario introduttivo ai Sistemi Dinamici.

GIANCARLO BENETTIN

Università di Padova

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

benettin@math.unipd.it