

Giancarlo Benettin

# **Introduzione ai sistemi dinamici**

appunti per il corso di Fisica Matematica

a. a. 2001–2002

*Versione preliminare, non diffondere!*

*Queste note, ancora preliminari e incomplete, raccolgono le lezioni del corso di Fisica Matematica che ho tenuto presso l'Università di Padova negli ultimi quattro anni accademici. L'argomento monografico del corso — la cosiddetta Teoria dei Sistemi Dinamici — è tra quelli che hanno avuto maggior crescita negli ultimi anni, sia in ambito fisico che matematico, e anche le applicazioni stanno crescendo in maniera esplosiva. Il corso nasce dall'idea che le basi della teoria possano essere insegnate, utilmente e senza difficoltà, agli studenti di Fisica e di Matematica degli ultimi due anni che ad essa siano interessati. Più specificamente, gli argomenti trattati sono tre: la teoria ergodica, i sistemi iperbolici, i sistemi hamiltoniani. Non è tutto, ma sicuramente sono argomenti di base, diciamo "elementari", dai quali è naturale iniziare l'apprendimento.*

*Un po' per i limiti di tempo, un po' per i limiti dell'autore, la trattazione non è sempre profonda come dovrebbe: alcuni argomenti (biliardi; sistemi con attrattori; teorema di Nekhoroshev, tanto per citarne uno per capitolo) sono assai sacrificati, altri (teoria spettrale, varietà centrale, serie di Lindstedt...) sono assenti. Quanto all'esposizione, non si troverà in questi appunti praticamente nulla di originale: se non forse lo sforzo di scrivere ogni cosa con pazienza in modo piano ed esteso, dando anche risalto, qua e là, alle motivazioni fisiche che hanno condotto allo sviluppo di certi rami della teoria.*

*Sono molto grato ai miei colleghi—maestri Luigi Galgani, Giovanni Gallavotti, Antonio Giorgilli e Gianni Jona-Lasinio, e a colleghi più giovani come Franco Cardin e Francesco Fassò, per tutto quello che mi hanno insegnato, e anche (F. Fassò) per aver attivamente collaborato alla stesura di alcune parti di questi appunti. Ma soprattutto, sono grato ai miei studenti: quel piccolo gruppo per iniziativa dei quali il corso quattro anni fa è nato, e tutti quelli che poi mi hanno ascoltato con pazienza, e mi hanno aiutato a capire meglio e a spiegarmi meglio.*

G. B.

a. a. 1995/96

## Capitolo I: Introduzione alla Teoria Ergodica

1. Prologo: Il problema ergodico in Boltzmann e Jeans
  - 1.1 Motivazioni
  - 1.2 Il punto di vista di Boltzmann
  - 1.3 Il punto di vista di Gibbs
2. Sistemi dinamici classici e astratti
  - 2.1 Nozione ed esempi
  - 2.3 Isomorfismo tra sistemi dinamici
3. Due teoremi generali
  - 3.1 Il teorema della ricorrenza
  - 3.2 Il teorema ergodico di Birkhoff–Kinchin
4. Ergodicità
  - 4.1 Definizione di sistema ergodico
  - 4.2 Esempi elementari
5. Sistemi mescolanti
  - 5.1 Definizione di sistema mescolante
  - 5.2 Esempi elementari
  - 5.3 Ergodicità e mescolamento; mescolamento debole
6. Misure ergodiche
7. Intermezzo: il problema di Fermi–Pasta–Ulam;  
il problema di Hénon e Heiles.
  - 7.1 Il lavoro numerico di Fermi, Pasta e Ulam
  - 7.2 Il modello di Hénon e Heiles
8. Introduzione alla dinamica simbolica
  - 8.1 Partizioni e dinamica simbolica

---

\* I paragrafi  
tra parentesi non sono ancora scritti

8.2 Stringhe statisticamente regolari; complessità di una stringa

9. L'entropia di Kolmogorov–Sinai

9.1 Informazione media di una operazione di misura

9.2 Entropia di Kolmogorov–Sinai

9.3 Alcuni teoremi sull'entropia di Kolmogorov–Sinai

10. Introduzione agli esponenti caratteristici di Lyapunov

10.1 Divergenza esponenziale delle traiettorie vicine

10.2 Un esempio elementare

10.3 Il teorema di Oseledec e il teorema di Pesin

Appendici

A. Prova del Lemma 2.4

B. Prova del Teorema di Birkhoff–Kinchin

C. Prova dei Lemmi 9.7 e 9.8

D. Prova del Teorema del generatore

E. Un algoritmo per il calcolo numerico degli ECL

## Capitolo II: Introduzione ai sistemi dinamici iperbolici

1. Sistemi dinamici topologici; Il teorema della varietà stabile

1.1 Sistemi dinamici topologici

1.2 Operatori iperbolici

1.3 Punti iperbolici; varietà stabile e varietà stabile locale

1.4 Dimostrazione del teorema della varietà stabile locale

1.5 Dipendenza regolare da un parametro

2. Fenomeni omoclini

2.1 Punti omoclini

2.2 Il metodo di Poincaré–Melnikov per il pendolo forzato

3. Insiemi iperbolici

3.1 Nozione di insieme iperbolico

3.2 Il “Ferro di Cavallo” di Smale

3.3 La dinamica simbolica per il ferro di cavallo

3.4 Il meccanismo del ferro di cavallo nei fenomeni omoclini

4. Attrattori e attrattori strani
  - 4.1 Nozione di attrattore
  - 4.2 Il “Solenoido”
  
5. Il “lemma dell’orbita ombra”
  - 5.1 Orbite e pseudo-orbite; enunciato del lemma
  - 5.2 Alcune conseguenze del lemma dell’orbita ombra
  - 5.3 Verifica del lemma dell’orbita ombra sul Gatto di Arnol’d
  
6. Proprietà ergodiche dei sistemi dinamici iperbolici (cenno)

Appendice: L’equazione di Van der Pol

### **Capitolo III: Introduzione alla teoria delle perturbazioni per sistemi hamiltoniani**

1. Il formalismo hamiltoniano
  - 1.1 Funzioni, campi vettoriali, forme
  - 1.2 Sistemi lagrangiani e hamiltoniani naturali
  - 1.3 Varietà simplettiche
  - 1.4 Parentesi di Poisson di funzioni, parentesi di Lie di campi vettoriali
  - 1.5 Generazione di trasformazioni canoniche
  
2. Il teorema di Liouville–Arnol’d
  - 2.1 Le variabili di azione–angolo nel pendolo
  - 2.2 Il teorema di Liouville–Arnol’d: enunciato
  - 2.3 Dimostrazione dei punti  $i$ – $ii$
  - 2.4 Conclusione della dimostrazione
  - 2.5 Esempi di sistemi integrabili
  - 2.6 Un commento
  - 2.7 Sistemi prossimi a sistemi integrabili: l’“approssimazione zero”
  
3. Il principio della media
  - 3.1 Il sistema mediato
  - 3.2 Esempi
  - 3.3 Discussione

4. Il “teorema di non esistenza” di Poincaré
  - 4.1 Una elementare ostruzione all’integrabilità
  - 4.2 Non esistenza di integrali primi
  
5. Il metodo di Lie. Piccoli divisori e condizione diofantea
  - 5.1 Il metodo di Lie
  - 5.2 Studio preliminare della (5.4) nel caso isocrono
  - 5.3 Il metodo di Lie: alcune stime
  
6. Sistemi isocroni: stime esponenziali
  - 6.1 Formulazione del risultato
  - 6.2 La trasformazione canonica elementare  $\mathcal{W}_s : \mathcal{D}_{\rho_{s+1}} \rightarrow \mathcal{D}_{\rho_s}$
  - 6.3 Iterazione e conclusione della dimostrazione
  
7. Sistemi non isocroni: un passo perturbativo
  - 7.1 Il modello dei rotatori
  - 7.2 Il ruolo della convessità di  $h$
  - 7.3 Perturbazioni con infinite componenti di Fourier
  
8. (Il teorema di Nekhoroshev e il teorema KAM)
  
9. (Un sistema degenere: il corpo rigido in rapida rotazione)
  
10. (Applicazioni alla Meccanica Celeste)
  
11. (Applicazioni alla meccanica Statistica)

## Appendici

- A. Prova della proposizione 1.4
- B. Lemmi per il teorema di Liouville–Arnol’d
- C. (Le variabili di azione–angolo per il moto centrale)
- D. Prova della Proposizione 5.2