Esercizi 1 – 5/12/2011

Esercizio 1. Si considerino i vettori

$$\vec{v}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \qquad \vec{v}_2 = 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

(a) Calcolare $\lambda = (\, 2 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2 \,) \bullet \left(\vec{v}_2 - 2 \cdot \vec{i} \right)$ e $\vec{w} = (\, 2 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2 \,) \times \left(\vec{v}_2 - 2 \cdot \vec{i} \right)$;

(b) calcolare l'angolo θ formato dai vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$;

(c) calcolare l'area del triangolo di vertici $O = (0,0,0)$, $P = (1,-2,3)$ e $Q = (0,2,-2)$;

(d) calcolare la proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$ (ossia, $\vec{v}_2 \bullet \mathrm{vers}(\vec{v}_1)$);

(e) trovare $\xi \in \mathbb{R}$ tale per cui il vettore $\vec{u} = 3\xi\vec{i} + (1-\xi)\vec{j} - \vec{k}$ è ortogonale a $\vec{v}_1$.

Esercizio 2. Si considerino il piano $\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0$ e il punto $P = (1,2,3)$.

(a) Dimostrare che $P \notin \pi$ e calcolare la distanza $d(P,\pi)$ di P dal piano π;

(b) scrivere l'equazione della retta r passante per P e perpendicolare al piano π;

(c) determinare il punto $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ di intersezione della retta r col piano π;

(d) scrivere l'equazione della retta $s \in \pi$ passante per Q e perpendicolare a $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$;

(e) scrivere l'equazione della retta t parallela a s e passante per P;

(f) scrivere l'equazione del piano π_1 che contiene le rette s e t.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 2 \\ z &= 3-2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x &= 2+\mu \\ y &= 3-\mu \\ z &= -3+2\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R} \qquad t : \begin{cases} x+y=0 \\ -2y+z=5 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ di intersezione di r ed s e scrivere l'equazione del piano π che le contiene;

(b) scrivere l'equazione del piano π_1 parallelo a π e che dista $d(\pi,\pi_1) = \sqrt{21}$ da π;

(c) dopo aver verificato che t incide π, scrivere in forma cartesiana e parametrica l'equazione della retta t_π che si ottiene proiettando t su π;

(d) scrivere le equazioni cartesiane di r e s e l'equazione parametrica di t.

Esercizio 4. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 2 \\ z &= 3-\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x &= -1-2\mu \\ y &= \mu \\ z &= \mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

(a) Dimostrare che r ed s sono sghembe, calcolare la minima distanza $d(r,s) = \overline{Q_1Q_2}$ tra di esse ed i due punti $Q_1 \in r$ e $Q_2 \in s$ in cui viene raggiunta;

(b) calcolare l'equazione della retta che passa per i due punti di minima distanza Q_1 e Q_2;

(c) determinare, se possibile, $Q \in s$ tale che $d(Q,Q_1) = 5$.

Esercizi 2 – 13/12/2011

Esercizio 1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Indicare le eventuali matrici invertibili calcolandone l'inversa.

(b) Indicare le eventuali matrici simmetriche calcolando la trasposta delle altre.

(c) Calcolare i prodotti $A \cdot C$ e $C \cdot A$. Sono uguali? Che legame hanno con la matrice C?

(d) Calcolare, per induzione su n, A^n e B^n, $n \in \mathbb{N}$.

(e) Calcolare, usando il teorema di Binet, $\det(C^3)$.

Sugg. per (d): calcolare i primi prodotti per $n = 2, 3, 4$ per intuire come vanno le cose osservando che $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1}$.
Soluzione. (d) Risulta

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}, \qquad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Dimostriamolo, ad esempio, per B. Per $n = 1$ otteniamo proprio B. Assunta vera l'espressione data per B^n, dimostriamo che quella che si ha per B^{n+1} si ottiena da quella di B^n sostituendo n con $n + 1$. Abbiamo

$$B^{n+1} = B \cdot B^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Pertanto, per induzione, B^n ha l'espressione data.
Esercizio 2. Siano A e B due matrici simmetriche dello stesso ordine. Dimostrare che la matrice $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ è simmetrica.
Soluzione. Dobbiamo far vedere che $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Abbiamo

$$p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij} \overset{(1)}{=} \lambda \cdot a_{ji} + \mu \cdot b_{ji} = p_{ji}$$

dove (1) sfrutta il fatto che A e B sono simmetriche ossia $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Esercizio 3. Si consideri l'insieme delle matrici $M_{3,2}(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice nulla $O \in M_{3,2}(\mathbb{R})$;

(b) scrivere la matrice $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ che ha tutti gli elementi nulli tranne $a_{21} = -1$, $a_{12} = -2$. Calcolare, inoltre, le due matrici $B = 2 \cdot A$ e $C = -A$. Si può calcolare A^2? Perché?

(c) Sia $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Indicare quali delle affermazioni che seguono sono vere e quali false giustificando le risposte.

V☐ F☐ $A \cdot A^T$ è una matrice quadrata di ordine 3;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è una matrice quadrata di ordine 2;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è invertibile;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è simmetrica;
V☐ F☐ esiste una matrice $A \neq 0$ tale che $\det(A \cdot A^T) = 0$;
V☐ F☐ esiste una matrice A tale che $A^T \cdot A$ è diagonale;
V☐ F☐ esiste una matrice $A \neq 0$ tale che $A \cdot A^T = 0$ (attenzione!).

Soluzione. (a) Lo spazio vettoriale $M_{3,2}(\mathbb{R})$ denota le matrici di tre righe e due colonne. La matrice nulla di questo spazio vettoriale ha tutti gli elementi nulli ed è quindi

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le matrici $B = 2A$ e $C = -A$ sono

$$B = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = -A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto $A^2 = A \cdot A$ non può essere effettuato perché la matrice A ha numero di colonne diverso dal numero di righe.
(c) La trasposizione scambia le righe con le colonne per cui A^T ha due righe e tre colonne; pertanto

- essendo $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ e $A^T \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ il prodotto $A \cdot A^T$ può essere effettuato ed ha 3 righe e 3 colonne, ossia è una matrice quadrata di ordine tre;
- essendo $A^T \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ e $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ il prodotto $A^T \cdot A$ può essere effettuato ed ha 2 righe e 2 colonne, ossia è una matrice quadrata di ordine due.

Esplicitando $A^T \cdot A$ abbiamo

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

per cui $A^T \cdot A$ è diagonale (e quindi simmetrica) con elementi sulla diagonale diversi da zero per cui è anche invertibile essendo $\det(A^T \cdot A) = 1 \cdot 4 = 4 \neq 0$. Si può provare che $A^T \cdot A$ è simmetrica senza esplicitarla in quanto risulta (ricordiamo che $(A^T)^T = A$)

$$\left(A^T \cdot A \right)^T = \left(A \right)^T \cdot \left(A^T \right)^T = A^T \cdot A$$

Consideriamo, ora, la generica matrice $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

per cui risulta

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 + e^2 & ab + cd + ef \\ ab + cd + ef & b^2 + d^2 + f^2 \end{pmatrix}$$

che evidenzia subito che affinché ci sia determinante nullo basta prendere $a = c = e = 0$ e gli altri parametri arbitrari (di cui almeno uno non nullo per $A \neq 0$). Ragionando in modo analogo otteniamo

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd & ae + bf \\ ac + bd & c^2 + d^2 & ce + df \\ ae + bf & ce + df & e^2 + f^2 \end{pmatrix}$$

Questa espressione mostra che, affinché sia la matrice nulla, deve essere $a^2 + b^2 = 0$ vera se e solo se $a = b = 0$; in modo analogo risulta $c^2 + d^2 = 0$ che è vera se e solo se $c = d = 0$; infine da $e^2 + f^2 = 0$ segue $e = f = 0$. Pertanto, nessuna matrice non nulla può soddisfare alla condizione richiesta.

Esercizio 4. Dimostrare o confutare con un controesempio, le affermazioni che seguono.

(a) Il prodotto di due matrici invertibili dello stesso ordine è una matrice invertibile.

(b) Se la matrice A è invertibile, allora lo è anche A^{1024}.

(c) $\det(A + A) = 2 \cdot \det(A)$ per ogni matrice quadrata A.

(d) Sapendo che $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$, allora è $\det(A + B) \neq 0$.

(e) Siano $A \in M_{2048,2028}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -1$ e B la matrice ottenuta da A scambiando tra loro le prime 1024 righe con le ultime 1024. Allora è $\det(B) = \det(A)$.

Soluzione. (a) Dette A_1 e A_2 le due matrici invertibili, abbiamo

$$\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \neq 0$$

giacché, essendo A_1 invertibile è $\det(A_1) \neq 0$ e essendo A_2 invertibile è $\det(A_2) \neq 0$. Pertanto, essendo $\det(A_1 \cdot A_2) \neq 0$, la matrice $A_1 \cdot A_2$ è invertibile.
(b) Abbiamo $\det\left(A^{1024} \right) = \left(\det(A) \right)^{1024} \neq 0$ per cui A^{1024} è invertibile.
(c) Detto n l'ordine della matrice A, abbiamo $\det(A + A) = \det(2 \cdot A) = 2^n \det(A)$ per cui la affermazione è falsa.
(d) L'affermazione è falsa: basta considerare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per cui è} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) La affermazione è corretta: lo scambio di una riga con un'altra cambia segno al determinante. Nel caso in esame, ci sono 1024 scambi per cui risulta

$$\det(B) = (-1)^{1024} \cdot \det(A) = \det(A)$$

Esercizio 5. Siano L_1, L_2 due matrici triangolari basse di ordine n. Dimostrare che $L_1 + L_2$ e $L_1 \cdot L_2$ sono matrici triangolari basse.
Soluzione. Siano $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ gli elementi delle matrici L_1 e L_2 rispettivamente. Allora, essendo triangolari basse, risulta

$$a_{ij} = 0,\ i < j \leq n, \qquad b_{ij} = 0,\ i < j \leq n.$$

Pertanto, è $a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$ per $i < j \leq n$ e quindi la somma è triangolare bassa. Per il prodotto, detto c_{ij} l'elemento di posto (i, j) nella matrice $L_1 \cdot L_2$, abbiamo per $i < j \leq n$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

dato che $b_{kj} = 0$, $1 \leq k \leq i < j$ per cui anche il prodotto è triangolare basso.
Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 3 \\ 6-\lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, se possibile, λ e μ tali che A sia simmetrica.

(b) Posto $\lambda = 3$ e $\mu = 0$, calcolare $\det(A)$ sviluppando il calcolo prima rispetto alla prima riga, poi rispetto alla seconda colonna e infine applicando la regola di Sarrus.

(c) Posto $\mu = 1$, calcolare λ in modo che A sia invertibile e calcolare A^{-1}.

Soluzione. (a) Affinché ci sia simmetria deve essere

$$\begin{cases} \lambda &= 6 - \lambda \\ \mu &= 3 \end{cases}$$

che porge $\lambda = 3$ e $\mu = 3$.
(b) Il determinante, sviluppato rispetto alla seconda colonna, vale

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) = 8$$

(c) Abbiamo, con Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 6-\lambda & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 \end{array} \right| \\ &= (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (6-\lambda) + \lambda \cdot 1 \cdot 1 \\ &- [\,(6-\lambda) \cdot 0 \cdot \lambda + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1\,] \\ &= 18 - 3\lambda + \lambda + 3 - 1 = 20 - 2\lambda \end{aligned}$$

Pertanto, la matrice è invertibile per tutti i λ tali che $20 - 2\lambda \neq 0$ ossia $\lambda \neq 10$. Il calcolo dell'inversa dà per $\lambda \neq 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{20 - 2\lambda} \cdot \begin{pmatrix} -3 & \lambda - 1 & 3 \\ 17 - 3\lambda & \lambda^2 - 6\lambda - 1 & \lambda + 3 \\ 1 & 7 - \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare $\det(A)$; basandosi su questo risultato, dire se A è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $\det(A^{-1})$ e $\det(A^{-3})$ ($A^{-3} = \left(A^{-1} \right)^3$.)

(b) Scrivere le tre matrici $H \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tali che $H \cdot A$ sia

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Solo guardandole, quale delle matrici (i), (ii) e (iii) ha sicuramente determinante nullo? Quanto valgono i determinanti delle restanti due e che legame hanno con $\det(A)$?

(c) Calcolare il polinomio nella variabile λ definito da $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Qual è il suo grado? Quanto valgono i coefficienti di λ^2 e il termine noto? Che legami si possono intuire tra questi valori e la matrice di partenza?

Soluzione. (a) Risulta $\det(A) = 29$ per cui A è invertibile. Si ha allora,

$$1 = \det(I_3) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \qquad \Rightarrow \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{29}$$

e quindi pure

$$\det(A^{-3}) = \det(\ (A^{-1}\ )^3) = \left(\det(\ A^{-1}\ ) \right)^3 = \frac{1}{29^3}.$$

(b) Abbiamo

$$\text{(i)}\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\ H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)}\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{62}{29} & \frac{32}{29} & \frac{9}{29} \end{pmatrix}$$

dove, detta $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ l'ultima riga di H, la condizione da impostare per ottenere (iii) è

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 = 7 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 6 = 4 \\ \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 4 + \gamma \cdot 1 = 9 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\alpha \cdot (1\ 1\ 2) + \beta \cdot (3\ 0\ 4) + \gamma \cdot (5\ 6\ 1) = (7\ 4\ 9)$$

Chiaramente, la matrice (i) ha determinante nullo visto che ha le prime due righe uguali. Le altre due hanno determinante non nullo e pari a $3 \cdot 2 \cdot 1 \det(A)$ per il caso (ii) e $1 \cdot 1 \cdot \frac{9}{29} \det(A)$ per il caso (iii).

(c) Risulta $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 36\lambda + 29$ per cui ha grado 3 (pari all'ordine della matrice); il termine noto è $\det(A)$ e il termine di λ^2 è la somma degli elementi della diagonale principale.

Esercizio 8. Calcolare il determinante della matrice quadrata di ordine 4 data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

e calcolare il valore del parametro reale μ tale per cui $\det(A) = 0$. Indicare, quindi, per quali valori del parametro la matrice A è invertibile (senza calcolare l'inversa!).
Soluzione. Basta sviluppare rispetto alla quarta colonna. Si trova $\det(A) = 6\mu - 23$ per cui A è invertibile per $\mu \neq \frac{23}{6}$.
Esercizio 9. Sia S la matrice simmetrica di ordine 3 definita da

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & d_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Esprimere, in termini dei parametri che compaiono nella matrice, la funzione delle tre variabili reali x_1, x_2 e x_3 definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}^T \cdot S \cdot \mathbf{x} \qquad \text{essendo} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare, infine, una matrice S tale per cui $F(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \cdot S \cdot \mathbf{x} \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con l'uguaglianza che vale se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Una matrice che soddisfa questa condizione è detta definita positiva.
Esercizio 10. Sia A una matrice quadrata di ordine n invertibile. Si può dimostrare che esiste un'unica coppia di matrici L ed U, la prima triangolare bassa con $l_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$ e la seconda triangolare alta, tali che $A = L \cdot U$ (decomposizione LU della matrice A).

(a) Sapendo che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori, quali sono le dimensioni di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$?

(b) Scrivere le matrici L ed U per il caso $n = 3$ indicando chiaramente quali sono i termini nulli e quelli non nulli denotando questi ultimi con lettere opportune (ad esempio, l_{21}).

(c) Dimostrare che

$$A \cdot \mathbf{x} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} L \cdot \mathbf{y} & = & b \\ U \cdot \mathbf{x} & = & \mathbf{y} \end{array} \right.$$

dove $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è un opportuno vettore colonna tale che $L\mathbf{y} = b$.

Esercizio 11. Molti problemi pratici richiedono la soluzione al calcolatore di equazioni differenziali del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{array} \right.$$

con $a, b, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sono numeri assegnati e $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ funzioni continue del tempo t date. In alcuni metodi di soluzione intervengono matrici quadrate tridiagonali di ordine n che hanno non nulli solo gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali adiacenti. Ad esempio, per $n = 5$ si può avere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Detto N_n il numero di elementi non nulli (ossia, $a_{ij} \neq 0$) della matrice, calcolare il fattore di sparsità s_n definito da $s_n = N_n/n^2$; dimostrare che il limite di s_n per $n \to +\infty$ è zero. Una matrice che, indipendentemente da come sono disposti nella stessa gli elementi non nulli, ha fattore di sparsità $s_n < 0.1$ circa è detta sparsa.

(b) Calcolare, per la matrice data, L ed U tali che $LU = A$ sapendo che hanno la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{pmatrix}$$

Sugg: abbiamo $1 \cdot u_{11} = 3$ da cui $u_{11} = 3$. Quindi, $1 \cdot u_{12} = -1$ da cui segue $u_{12} = -1$. Quindi, abbiamo $l_{21} \cdot u_{11} = -1$ per cui risulta $l_{21} = -1/u_{11} = -1/3$, $l_{21}u_{12} + u_{22} = 3$ da cui $u_{22} = 3 - l_{21}u_{12} = 8/3$ e così via.

(c) Calcolare, a mano o, preferibilmente, con l'ausilio di un calcolatore, A^2, A^3 e A^4 per la matrice A indicata, valutare i fattori di sparsità di ognuna di queste matrici ed osservare che crescono portandosi a 1 per A^4. Questo tipo di comportamento, detto di riempimento o di *fill-in*, (perché la matrice da pochi elementi non nulli diventa con molti elementi non nulli, ossia si riempie) spesso non è desiderato nei procedimenti si soluzione numerica soprattutto quando l'ordine della matrice A è elevato.

Esercizi 3 – 20/12/2011

Esercizio 1. Sia π il piano passante per $P = (0, 1, -1)$ e parallelo al piano individuato dai vettori geometrici $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{k}$ e $\vec{v}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$.

(a) Calcolare l'equazione di π;

(b) calcolare l'equazione del piano π_1 perpendicolare a π e passante per P e $Q = (0, 0, 1)$;

(c) scrivere l'equazione parametrica della retta r individuata dalla intersezione dei due piani.

Soluzione. (a) I vettori geometrici $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ hanno vettore normale $\vec{n}$ dato da

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

Il vettore $\vec{n}$ è normale al piano π che passa per $P = (x_P, y_P, z_P) = (0, 1, -1)$ per cui risulta

$$\pi: \quad 1 \cdot (x - x_P) + (-2) \cdot (y - y_P) + 1 \cdot (z - z_P) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 2y + z + 3 = 0$$

(b) Il vettore

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k} \\ &= (0 - 0)\vec{i} + (0 - 1)\vec{j} + (1 - (-1))\vec{k} \\ &= -\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

non è parallelo a $\vec{n}$ per cui il piano π_1 è normale a $\vec{n}_1 = \vec{n} \times \vec{PQ}$ dato da

$$\vec{n}_1 = \vec{n} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Pertanto, abbiamo

$$\pi_1: \quad 3(x - x_Q) - 2(y - y_Q) - (z - z_Q) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x - 2y - z + 1 = 0$$

(c) Un vettore $\vec{v}$ che dà la direzione della retta r è normale sia a $\vec{n}$ che a $\vec{n}_1$ per cui è

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

e quindi l'equazione parametrica della retta r è

$$\begin{cases} x = 0 + 4\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2. Siano A una matrice quadrata di ordine n, $n > 1024$, con $\det(A) = -2$ e H la matrice ottenuta da I_n scambiando la 575 riga con la 1001.

(a) Calcolare $\det\left((HA^{-2})^T \right)$ $(A^{-2} = (A^{-1})^2 = (A^2)^{-1})$.

(b) Dimostrare che lo spazio vettoriale generato dalle righe di HA^{-2} coincide con $\mathbb{R}^n$.

Soluzione. (a) Abbiamo $\det(I_n) = 1$ e $\det(H) = -\det(I_n) = -1$ in virtù dello scambio delle due righe. Infine, poiché $A^2 \cdot A^{-2} = I_n$, per cui $\det(A^2) \cdot \det(A^{-2}) = \det(I_n)$, abbiamo

$$\det(A^{-2}) = \frac{1}{\det(A^2)} = \frac{1}{(\det(A))^2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

e quindi

$$\det\left((HA^{-2})^T \right) = \det\left(HA^{-2} \right) = \det(H) \cdot \det(A^{-2}) = -1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

(b) La matrice HA^{-2} ha $\det\left(HA^{-2} \right) \neq 0$ che coincide con quello della sua forma canonica dato che quest'ultima è ottenuta da HA^{-2} mediante premoltiplicazioni per matrici elementari che hanno determinante non nullo. Pertanto, la forma canonica non può avere delle righe nulle altrimenti avrebbe determinante zero e, con essa, anche quella di partenza mentre abbiamo visto che $\det(HA^{-2}) = -1/4$. Ma allora $\rho(HA^{-2}) = n$ e, di conseguenza, lo spazio vettoriale generato dalle sue righe coincide con $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 3. Lo spazio vettoriale generato dalle colonne della matrice $A \in M_{6,4}(\mathbb{R})$ ha dimensione 3.

(a) Calcolare il numero di vettori riga contenuti in una base dello spazio vettoriale generato dalle righe di A;

(b) calcolare il numero di righe nulle della forma canonica della matrice A.

Soluzione. (a) Basta osservare che

$$\rho_r(A) = \rho_c(A) = 3$$

per concludere che ci sono tre righe linearmente indipendenti. Come conseguenza, ci sono $n - \rho_r(A) = 6 - 3 = 3$ righe nulle nella forma canonica per righe di A (risposta (b)).

Esercizio 4. Dimostrare che due vettori $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v_2} \neq \mathbf{0}$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli (ossia, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v_1} = \lambda\, \mathbf{v_2}$.)

Esercizio 5. Dimostrare che una famiglia di vettori che contiene il vettore nullo è sempre linearmente dipendente.

Soluzione. Siano $\mathbf{v_k}$, $k = 1, \dots, n$ i vettori della famiglia e sia, ad esempio, $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$. Allora, possiamo scrivere

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + 0 \cdot \mathbf{v_3} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

che manifesta l'esistenza della n-upla non nulla $(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. Pertanto, i vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 6. Siano $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ tre vettori linearmente indipendenti. Stabilire se i tre vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ definiti da

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}, \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}, \quad \mathbf{w_3} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$$

sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

Soluzione. La combinazione lineare

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2} + \alpha_3 \cdot \mathbf{w_3} = \mathbf{0}$$

equivale a

$$\alpha_1 \cdot (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) + \alpha_2 \cdot (\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) + \alpha_3 \cdot (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = \mathbf{0}$$

ossia

$$(\alpha_1+\alpha_3)\cdot \mathbf{v_1}+(-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\cdot \mathbf{v_2}+(\alpha_2+\alpha_3)\cdot \mathbf{v_3}=\mathbf{0}$$

che, dato che $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ sono linearmente indipendenti, è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni membro a membro otteniamo $\alpha_2=0$ e quindi, dalla terza equazione, $\alpha_3=0$. Infine, dalla prima segue $\alpha_1=0$. Pertanto, i tre vettori $\mathbf{w_k}$, $k=1,2,3$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Dimostrare che $\mathbf{0}\in W$. Utilizzare questo fatto per dire, a colpo d'occhio, che l'insieme

$$W=\{(x_1,0,1),x_1\in\mathbb{R}\}$$

non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Come deve essere modificata la sola terza componente della terna $(x_1,0,1)$ affinché W diventi un sottospazio? Qual è una base B per questo sottospazio?

Esercizio 8. Dimostrare, utilizzando la definizione, che l'insieme

$$W=\{(x_1,0,x_2),x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e calcolarne una base ortonormale.

Soluzione. Osserviamo che W ha arbitrarie la prima e la terza componente e nulla la seconda. Dobbiamo far vedere che per ogni $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\in W$ il vettore $\lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2}\in W$. Indichiamo con $\mathbf{v_1}=(x_1,0,x_2)$ e $\mathbf{v_2}=(y_1,0,y_2)$ i due vettori dove x_1, x_2, y_1, y_2 sono numeri reali arbitrari (dato che sono arbitrari $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_1}$). Abbiamo, quindi

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2} &= \lambda(x_1,0,x_2)+\mu(y_1,0,y_2) \\ &= (\lambda\cdot x_1,\ \lambda\cdot 0,\ \lambda\cdot x_2)+(\mu\cdot y_1\ \mu\cdot 0,\ \mu\cdot y_2) \\ &= (\lambda\cdot x_1+\mu\cdot y_1,\ 0+0,\ \lambda\cdot x_2+\mu\cdot y_2) \\ &= (z_1,0,z_2)\in W \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $z_1=\lambda x_1+\mu y_1$, $z_2=\lambda x_2+\mu y_2$. L'appartenenza della terna $(z_1,0,z_2)$ a W è dovuta al fatto che ha la stessa struttura delle terne di W ossia ha nulla la seconda componente. Per calcolare una base di W osserviamo che

$$\begin{aligned} W &= \{(x_1,0,x_2),x_1,x_2\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,0)+x_2(0,0,1),x_1,x_2\in\mathbb{R}\} \\ &= \langle\ (1,0,0),(0,0,1)\ \rangle \end{aligned}$$

I due vettori $\mathbf{e_1}=(1,0,0)$ ed $\mathbf{e_1}=(0,0,1)$ sono ortogonali rispetto al prodotto canonico in $\mathbb{R}^3$ dato che

$$\mathbf{e_1}\bullet\mathbf{e_2}=1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1=0$$

per cui sono sicuramente linearmente indipendenti; inoltre, hanno modulo unitario talché

$$|\mathbf{e_1}|^2=\mathbf{e_1}\bullet\mathbf{e_1}=1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=1 \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{e_1}|=\sqrt{1}=1$$

ed analogamente per $|\mathbf{e_2}|=1$. Di conseguenza, una base ortonormale per W è $B=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$.

Esercizio 9. Dimostrare che l'insieme delle matrici quadrate simmetriche di ordine 2 costituisce un sottospazio, scriverne una base e specificarne la dimensione.

Soluzione. Detto S_2 l'insieme cercato, abbiamo subito

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

che evidenzia le tre (per cui $\dim(S_2) = 3$) matrici linearmente indipendenti (infatti, la loro combinazione lineare, che appare già scritta, uguagliata alla matrice nulla dà immediatamente $a = b = c = 0$) che formano la base per S_2.

Esercizio 10. Si consideri lo spazio vettoriale W formato dai polinomi di grado due nella variabile x ossia

$$W = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Dimostrare che i tre vettori (che sono polinomi!)

$$\mathbf{p_1} = x^2 - x + 2, \qquad \mathbf{p_2} = x - 1, \qquad \mathbf{p_3} = x^2 - 1$$

formano la base $B = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$ per W.

(b) Utilizzando il principio di identità dei polinomi, calcolare le coordinate del polinomio $\mathbf{p} = 5x^2 - 3x + 2$ rispetto alla base B ossia trovare i tre numeri reali b_1, b_2 e b_3 tali che

$$b_1\mathbf{p_1} + b_2\mathbf{p_2} + b_3\mathbf{p_3} = \mathbf{p}$$

(c) Indichiamo con $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ e con $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ le due terne di coordinate che esprimono il vettore $\mathbf{p}$ rispetto, rispettivamente, alla base B ed alla base canonica $C = \{\mathbf{e_1} = 1, \mathbf{e_2} = x, \mathbf{e_3} = x^2\}$, ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= b_1\mathbf{p_1} + b_2\mathbf{p_2} + b_3\mathbf{p_3} \\ &= c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3} \end{aligned}$$

Calcolare la matrice H di cambiamento di base che permette di passare dalle coordinate $\mathbf{c}$ alle coordinate $\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che la k-esima colonna di H esprime le coordinate rispetto alla base B del k-esimo vettore della base C ossia

$$h_{1k}\mathbf{p_1} + h_{2k}\mathbf{p_2} + h_{3k}\mathbf{p_3} = \mathbf{e_k}, \; k = 1, 2, 3$$

per cui ci sono tre sistemi lineari da risolvere. Ogni sistema lineare contiene come incognite gli elementi di una colonna di H.

(d) Calcolare la matrice K di cambiamento di base che permette di passare dalle coordinate $\mathbf{b}$ alle coordinate $\mathbf{c}$ e verificare che $K \cdot H = H \cdot K = I_3$ ossia, $K = H^{-1}$ e $H = K^{-1}$. Utilizzando questo fatto generale, visto nella teoria, ritrovare la matrice H calcolando l'inversa di K mediante la formula che contiene i complementi algebrici.

(e) Ritrovare le coordinate del vettore $\mathbf{p}$ calcolate al punto (b) scrivendone prima le coordinate $\mathbf{c}$ rispetto alla base canonica C, fatto immediato, e poi utilizzando la relazione $\mathbf{b} = H \cdot \mathbf{c}$ con H ricavata al punto (c).

Soluzione. (a) Lo spazio vettoriale W dei polinomi di grado due ha dimensione tre perché la base canonica $C = \{\mathbf{e_1} = 1, \mathbf{e_2} = x, \mathbf{e_3} = x^2\}$, e quindi anche ogni altra base, contiene tre polinomi. I polinomi $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ e $\mathbf{p_3}$ sono linearmente indipendenti perché lo sono le terne delle loro coordinate rispetto alla base canonica:

$$\mathbf{p_1} = x^2 - x + 2 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha_1 = (2\ -1\ 1), \qquad \mathbf{p_2} = x - 1 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha_2 = (-1\ 1\ 0),$$

$$\mathbf{p_3} = x^2 - 1 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha_3 = (-1\ 0\ 1)$$

in quanto la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_c$$

ha rango tre dato che la sua forma canonica A_c ha tre righe non nulle. Allo stesso risultato si perviene senza passare per la forma canonica ma guardando il determinante di A. Infatti, $\det(A_c) = \det(A)$ (perché?) per cui essendo $\det(A) = 2 \neq 0$, anche $\det(A_c) = 2$ e, quindi, non ci possono essere righe nulle. Naturalmente, l'indipendenza lineare dei tre polinomi può essere provata anche direttamente scrivendo

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{p_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{p_2} + \alpha_3 \cdot \mathbf{p_3} + = \mathbf{0}$$

che dà

$$\alpha_1 \cdot (x^2 - x + 2) + \alpha_2 \cdot (x - 1) + \alpha_3 \cdot (x^2 - 1) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

ossia

$$(\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)x + (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

che equivale, per il principio di identità dei polinomi[1], al sistema lineare nelle tre incognite α_1, α_2, α_3 dato da

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = 0 & \text{(confronto i termini in } x^2) \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & & = 0 & \text{(confronto i termini in } x^1) \\ 2\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = 0 & \text{(confronto i termini in } x^0) \end{cases}$$

che porge (sommo membro a membro le tre equazioni) $\alpha_1 = 0$ e, quindi, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
(b) E' sufficiente osservare che $b_1\mathbf{p_1} + b_2\mathbf{p_2} + b_3\mathbf{p_3} = \mathbf{p}$ equivale a

$$(b_1 + b_3)x^2 + (-b_1 + b_2)x + (2b_1 - b_2 - b_3) = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2$$

ed applicare il principio di identità dei polinomi per ottenere

$$\begin{cases} b_1 & & +b_3 & = 5 & \text{(confronto i termini in } x^2) \\ -b_1 & +b_2 & & = -3 & \text{(confronto i termini in } x^1) \\ 2b_1 & -b_2 & -b_3 & = 2 & \text{(confronto i termini in } x^0) \end{cases}$$

che porge, sommando membro a membro, $2b_1 = 4$ ossia $b_1 = 2$ e, di conseguenza, $b_3 = 5 - b_1 = 3$ e $b_2 = -3 + b_1 = -1$.
(c) Si tratta di risolvere tre sistemi lineari in cui cambia il secondo membro.

[1] Due polinomi di grado n

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{e} \quad P_2(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

sono uguali se e solo se $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

- Calcoliamo la prima colonna di H: $h_{11}\mathbf{p_1}+h_{21}\mathbf{p_2}+h_{31}\mathbf{p_3}=\mathbf{e_1}$ con $\mathbf{e_1}=1$. Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} h_{11} & & +h_{31} & =0 & \text{(confronto i termini in } x^2) \\ -h_{11} & +h_{21} & & =0 & \text{(confronto i termini in } x^1) \\ 2h_{11} & -h_{21} & -h_{31} & =1 & \text{(confronto i termini in } x^0) \end{cases}$$

  che dà $h_{11}=1/2$, $h_{31}=-1/2$, $h_{21}=1/2$.

- Calcoliamo la seconda colonna di H: $h_{12}\mathbf{p_1}+h_{22}\mathbf{p_2}+h_{32}\mathbf{p_3}=\mathbf{e_2}$ con $\mathbf{e_2}=x$. Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} h_{12} & & +h_{32} & =0 & \text{(confronto i termini in } x^2) \\ -h_{12} & +h_{22} & & =1 & \text{(confronto i termini in } x^1) \\ 2h_{12} & -h_{22} & -h_{32} & =0 & \text{(confronto i termini in } x^0) \end{cases}$$

  che dà $h_{12}=1/2$, $h_{32}=-1/2$, $h_{22}=3/2$.

- Calcoliamo la terza colonna di H: $h_{13}\mathbf{p_1}+h_{23}\mathbf{p_2}+h_{33}\mathbf{p_3}=\mathbf{e_3}$ con $\mathbf{e_3}=x^2$. Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} h_{13} & & +h_{33} & =1 & \text{(confronto i termini in } x^2) \\ -h_{13} & +h_{23} & & =0 & \text{(confronto i termini in } x^1) \\ 2h_{13} & -h_{23} & -h_{33} & =0 & \text{(confronto i termini in } x^0) \end{cases}$$

  che dà $h_{13}=1/2$, $h_{33}=1/2$, $h_{23}=1/2$.

Pertanto, la matrice H è

$$H=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(d) Procedendo come nel punto precedente, si tratta di risolvere i tre sistemi lineari

$$k_{1j}\mathbf{e_1}+k_{2j}\mathbf{e_2}+k_{3j}\mathbf{e_3}=\mathbf{p_j}, \quad j=1,2,3$$

in cui cambia il secondo membro. In questo caso, però, non serve fare alcun conto: è immediato scrivere ciascuna colonna della matrice K perché sono i coefficienti di $\mathbf{p_j}$, $j=1,2,3$. Otteniamo così

$$K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che $HK=KH=I_3$ (tralasciamo il calcolo di H mediante i complementi algebrici, visto a lezione).
(e) Le coordinate di $\mathbf{p}$ rispetto alla base canonica sono $b=(2\ -3\ 5)$ per cui le corrispondenti coordinate rispetto alla base B risultano

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

come già calcolato.
Esercizio 11. Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la base canonica C per M_2. Quanto vale $\dim(M_2)$?

(b) Calcolare le coordinate rispetto alla base C della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) Determinare, giustificando accuratamente la risposta, quali dei seguenti insiemi di matrici possono essere considerati una base per M_2.

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{(ii)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{(iii)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinare, inoltre, la dimensione dei sottospazi generati dai ciascuno dei tre insiemi di vettori .

(d) Calcolare la matrice di passaggio dalla base canonica alla base B costituita dalle matrici dell'insieme (iii) del punto (c).

Soluzione. (a) La base canonica per lo spazio vettoriale M_2 delle matrici quadrate di ordine 2 è

$$C = \left\{ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi, $\dim(M_2) = 4$.
(b) Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui le coordinate della matrice A rispetto alla base canonica C sono $(a\ b\ c\ d)$.
(c) Ogni base di M_2 ha tanti vettori linearmente indipendenti quanti sono quelli presenti nella base canonica; perciò, l'insieme (i) che contiene al più tre matrici linearmente indipendenti, non può essere una base per M_2. Vediamo se le tre matrici sono linearmente indipendenti. Le coordinate rispetto alla base canonica sono nell'ordine

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad (1\,0\,0\,1) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad (0\,0\,1\,1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad (1\,1\,1\,1)$$

La matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha, nella forma canonica per righe, tre righe non nulle per cui ha rango tre. Quindi, i tre vettori di coordinate sono linearmente indipendenti e tali sono anche le matrici dell'insieme (i). Il sottospazio generato da questo insieme ha dunque dimensione tre. Procediamo allo stesso modo per (ii). Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (1\,0\,0\,1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (0\,0\,1\,1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (1\,1\,1\,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (0\,2\,2\,0)$$

per cui la matrice delle coordinate associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui, essendoci nella forma canonica per righe una riga nulla, ha rango tre. Inoltre, abbiamo ottenuto che il quarto vettore dell'insieme (ii) è combinazione lineare dei precedenti: leggendo le operazioni svolte sulle coordinate, otteniamo che la quarta matrice dell'insieme (ii) è ottenibile dalle restanti tre come $-2 \cdot (1^\circ\text{matrice} - 3^\circ\text{matrice})$. Quindi, lo spazio vettoriale generato dalle matrici dell'insieme (ii) ha dimensione 3 e una base è costituita dalle prime tre matrici. Procedendo in modo analogo per (iii) si trova che la matrici sono linearmente indipendenti per cui questo insieme può essere usato come base per M_2.
(d) La matrice H di passaggio contiene nella k-esima colonna le coordinate di $\mathbf{e_k}$ espresse rispetto alla base B. Abbiamo per $\mathbf{e_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = h_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + h_{21} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_{31} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_{41} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} h_{11} & +h_{21} & +h_{31} & +h_{41} & = & 1 \\ & h_{21} & & & = & 0 \\ h_{11} & +h_{21} & +h_{31} & +2h_{41} & = & 0 \\ h_{11} & & & -h_{41} & = & 0 \end{cases}$$

che dà subito $h_{21} = 0$ dalla seconda equazione; quindi, sottraendo la prima alla quarta otteniamo $h_{41} = -1$; ora, dalla quarta equazione abbiamo subito $h_{11} = h_{41} = -1$ e, infine, dalla terza equazione $h_{31} = -h_{11} - h_{21} - 2h_{41} = -(-1) - 0 - 2 \cdot (-1) = 3$. Quindi, la prima colonna di H è $(-1 \;\; 0 \;\; 3 \;\; -1)^T$. Procedendo in modo analogo per gli altri tre vettori della base canonica otteniamo H (notare che il sistema lineare da risolvere resta quello indicato in cui varia il termine noto ed il nome delle incognite)

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12. Si consideri lo spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado n nella variabile x con $x \in [-1, 1]$. Sia C la base canonica data da

$$C = \left\{ \mathbf{e_0} = 1, \mathbf{e_1} = x, \ldots, \mathbf{e_{n-1}} = x^{n-1}, \; \mathbf{e_n} = x^n \right\}$$

La funzione $P_n \times P_n \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2} \triangleq \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_2(x) dx$$

è un prodotto interno in P_n (non dimostrarlo).

(a) Dimostrare che la base C <u>non</u> è ortonormale (ad esempio, $\mathbf{e_0} \bullet \mathbf{e_2} \neq 0$);

(b) utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, ricavare i primi tre polinomi della base ortonormale ottenuta a partire da C. Questi polinomi, epurati dei fattori moltiplicativi che provengono dalla normalizzazione, sono detti polinomi di Legendre; i primi tre polinomi sono

$$\mathbf{p_0} = 1, \qquad \mathbf{p_1} = x, \qquad \mathbf{p_2} = x^2 - \frac{1}{3}$$

Soluzione. (a) Abbiamo

$$\mathbf{e_0} \bullet \mathbf{e_2} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

per cui la base canonica non è ortogonale.
(b) Costruiamo i primi tre polinomi di una base ortonormale.

- Costruisco $\mathbf{p_0}$

  (a) $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{0} = \mathbf{e_0} = 1$;

  (b) Normalizzo

$$\mathbf{p_0} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{0}|} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{0} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) Costruisco $\mathbf{p_1}$

  (a) $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{1} = \mathbf{e_1} - (\mathbf{e_1} \bullet \mathbf{p_0}) \cdot \mathbf{p_0} = x$ dato che

$$\mathbf{e_1} \bullet \mathbf{p_0} = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 0$$

  (b) Normalizzo

$$\mathbf{p_1} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{1}|} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{1} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}} \cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x$$

(3) Costruisco $\mathbf{p_2}$

  (a) $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{2} = \mathbf{e_2} - (\mathbf{e_2} \bullet \mathbf{p_0}) \cdot \mathbf{p_0} - (\mathbf{e_2} \bullet \mathbf{p_1}) \cdot \mathbf{p_1} = x^2 - \frac{1}{3}$ dato che

$$\mathbf{e_2} \bullet \mathbf{p_0} = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \mathbf{e_2} \bullet \mathbf{p_1} = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x\, dx = 0$$

(b) Normalizzo

$$\mathbf{p_2} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{p}}_2|} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Esercizio 13. Si considerino i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ dati da

$$\mathbf{v_1} = (1\ 2\ 3), \qquad \mathbf{v_2} = (1\ \lambda\ 3), \qquad \mathbf{v_3} = (1\ 2\ 0),$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare λ in modo che $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ siano ortogonali rispetto al prodotto interno canonico e dimostrare che i tre vettori così ottenuti sono una base per $\mathbb{R}^3$.

(b) Posto $\lambda = -5$, utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, costruire, a partire dalla base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, una nuova base ortonormale $B_1 = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

(c) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} = (1\ 2\ \ -3)$ rispetto alla base B_1 utilizzando il fatto che questa base è ortonormale.

(d) Calcolare la matrice di passaggio dalla base C alla base B_1 (osservare che $\mathbf{e_k} = (\mathbf{e_k} \bullet \mathbf{u_1}) \cdot \mathbf{u_1} + (\mathbf{e_k} \bullet \mathbf{u_2}) \cdot \mathbf{u_2} + (\mathbf{e_k} \bullet \mathbf{u_3}) \cdot \mathbf{u_3}$, $k = 1, 2, 3$)

Soluzione. (a) Affinché $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ siano ortogonali deve essere

$$\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \cdot 1 + 2 \cdot \lambda + 3 \cdot 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -5.$$

(b) Costruiamo la base ortonormale.

(1) Costruisco $\mathbf{u_1}$

(a) $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{v_1} = (1\ 2\ 3)$;

(b) Normalizzo

$$\mathbf{u_1} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{u}}_1|} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}\,(1\ 2\ 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\ \frac{2}{\sqrt{14}}\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

(2) Costruisco $\mathbf{u_2}$

(a) $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v_2} - (\mathbf{v_2} \bullet \mathbf{u_1}) \cdot \mathbf{u_1} = \mathbf{v_2} = (1\ \ -5\ 3)$ dato che $\mathbf{v_2}$ è ortogonale a $\mathbf{v_1}$ e quindi anche a $\mathbf{u_1}$.

(b) Normalizzo

$$\mathbf{u_2} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{u}}_2|} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2}}\,(1\ \ -5\ 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}\ \ -\frac{5}{\sqrt{35}}\ \frac{3}{\sqrt{35}}\right)$$

(3) Costruisco $\mathbf{u_3}$

(a) $\tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{v_3} - (\mathbf{v_3} \bullet \mathbf{u_1}) \cdot \mathbf{u_1} - (\mathbf{v_3} \bullet \mathbf{u_2}) \cdot \mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} = \left(\frac{9}{10}\ \ 0\ \ -\frac{3}{10}\right)$.

(b) Normalizzo

$$\mathbf{u_3} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{u}}_3|} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{3}{10}\right)^2}} \cdot \left(\frac{9}{10}\ \ 0\ \ -\frac{3}{10}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\ \ 0\ \ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

(c) Abbiamo

$$\mathbf{v} = (1\ 2\ -3) = \alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \alpha_3\mathbf{u_3}$$

con

$$\alpha_1 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u_1} = -\frac{4}{\sqrt{14}}, \qquad \alpha_2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u_2} = -\frac{18}{\sqrt{35}}, \qquad \alpha_3 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u_3} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

(d) Abbiamo direttamente

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 14. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ (vettori colonna), dotato del prodotto interno canonico, generato dai vettori $\mathbf{v_1} = (1\ 2\ 3)^T$ e $\mathbf{v_2} = (1\ 0\ 1)^T$.

(a) Calcolarne il complemento ortogonale $W^\perp$;

(b) calcolare la distanza del vettore $\mathbf{v} = (0\ 0\ 1)$ da W.

Soluzione. (a) Il sottospazio vettoriale $W^\perp$ è formato dai vettori $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ che sono ortogonali ad ogni vettore di W. Poiché $W =< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >$ con $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ linearmente indipendenti, è sufficiente che $\mathbf{v}$ sia ortogonale a questi due vettori per esserlo a W. Pertanto, dobbiamo imporre che si abbia

$$\begin{cases} \mathbf{v} \bullet \mathbf{v_1} & = & 0 \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{v_2} & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 0 \\ x & & +z & = & 0 \end{cases}$$

Presa la variabile z come parametro libero, ossia $z = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, otteniamo $x = -z = -\xi$ e dalla prima equazione $-\xi + 2y + 3\xi = 0$ che dà $y = -\xi$. Pertanto, risulta

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -\xi \\ -\xi \\ \xi \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \xi \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\} =< \mathbf{v_3} >, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Il vettore $\mathbf{v} \notin W$ in quanto la relazione $\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{v}$ non ha soluzione in α_1 e α_2. Detta $\mathrm{pr}_W(\mathbf{v})$ la proiezione di $\mathbf{v}$ su W data da

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{v_1} + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_2} \\ &= 3 \cdot (1\ 2\ 3)^T + 1 \cdot (1\ 0\ 1)^T \\ &= (4\ 6\ 10)^T \end{aligned}$$

per cui la sua distanza da W è

$$d(\mathbf{v}, W) = |\mathbf{v} - \mathrm{pr}_W(\mathbf{v})| = |(0\ 0\ 1)^T - (4\ 6\ 10)^T| = \sqrt{(0-4)^2 + (0-6)^2 + (1-10)^2} = \sqrt{133}.$$

Esercizio 15. Sia W un sottospazio e $B = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ una sua base. Dimostrare che il vettore $\mathbf{v} \notin W$ è ortogonale a W se e solo se è ortogonale ad ogni vettore di B. (Ricordiamo che un vettore è ortogonale ad un sottospazio se è ortogonale ad ogni vettore del sottospazio.)

Esercizio 16. Dimostrare che i vettori riga $\mathbf{v_k}$, $k = 1, \ldots, n$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \cdots \\ \mathbf{v_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

Soluzione. Osserviamo che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \cdots \\ \mathbf{v_n} \end{pmatrix}$$

ha lo stesso numero di righe linearmente indipendenti di quelli della sua forma canonica per righe $A_c = H \cdot A$ ottenuta premoltiplicando la matrice A per una matrice H invertibile in quanto prodotto di matrici elementari invertibili. Pertanto, $\det(A_c) = \det(H) \cdot \det(A_c)$. Ora, il determinante di A_c è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale ed è, pertanto, nullo se e solo se alcune righe sono linearmente dipendenti dalle altre.
Esercizio 17. Dimostrare che il prodotto interno dei due vettori colonna di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v_1} = (x_1\ x_2, \ldots, x_n)^T, \quad \mathbf{v_2} = (y_1\ y_2, \ldots, y_n)^T$$

è esprimibile come prodotto tra la matrice $\mathbf{v_1}^T$ (1 riga ed n colonne) e la matrice $\mathbf{v_2}$ (n righe ed 1 colonna) mediante la relazione

$$\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}^T \cdot \mathbf{v_2}.$$

Esercizi 4 – 28/12/2011

Esercizio 1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ la mappa lineare che ha rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ matrice A data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Dire se L è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, trovare una base di autovettori B ed una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ è diagonale.

(b) Calcolare $L(\mathbf{v})$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Gli autovalori della mappa lineare L sono le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda)$ dato da

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= |A - \lambda \cdot I_3| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 0 - \lambda \cdot 1 & 2 - \lambda \cdot 0 & 1 - \lambda \cdot 0 \\ 0 - \lambda \cdot 0 & 1 - \lambda \cdot 1 & 0 - \lambda \cdot 0 \\ -2 - \lambda \cdot 0 & 4 - \lambda \cdot 0 & 3 - \lambda \cdot 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&\overset{(\star)}{=} (-1)^{2+2}(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \cdot [\, (-\lambda) \cdot (3-\lambda) - (-2) \cdot 1 \,] \\
&= (1-\lambda) \cdot \left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right] \\
&= -(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \\
&= -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2)
\end{aligned}$$

dove nel passaggio $(\star)$ il determinante è stato sviluppato rispetto alla terza riga. Le radici di $P(\lambda)$ sono le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = 0$. Applicando la legge di annullamento del prodotto otteniamo i due casi

- $(\lambda - 1)^2 = 0$ che dà la radice $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $\mu(\lambda_1) = 2$.
- $(\lambda - 2) = 0$ che dà la radice $\lambda_2 = 2$ con molteplicità $\mu(\lambda_2) = 1$.

Calcoliamo gli autospazi relativi ai due autovalori trovati. Troviamo $\mathbf{v} \in V_{\lambda_1}$ ponendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono x, y, z. Pertanto, tenuto conto della definizione di matrice associata alla mappa lineare L rispetto alla base canonica, il vettore $L(\mathbf{v})$ è

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{v}) &= L(x \cdot \mathbf{e_1} + y \cdot \mathbf{e_2} + z \cdot \mathbf{e_3}) \\
&= x \cdot L(\mathbf{e_1}) + y \cdot L(\mathbf{e_2}) + z \cdot L(\mathbf{e_3}) \\
&= x \cdot [0 \cdot \mathbf{e_1} + 0 \cdot \mathbf{e_2} + (-2) \cdot \mathbf{e_3}] \\
&+ y \cdot [2 \cdot \mathbf{e_1} + 1 \cdot \mathbf{e_2} + 4 \cdot \mathbf{e_3}] \\
&+ z \cdot [1 \cdot \mathbf{e_1} + 0 \cdot \mathbf{e_2} + 3 \cdot \mathbf{e_3}] \\
&= (2y + z) \cdot \mathbf{e_1} + y \cdot \mathbf{e_2} + (-2x + 4y + 3z) \cdot \mathbf{e_3} \\
&= \begin{pmatrix} 2y + z \\ y \\ -2x + 4y + 3z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ora, dalla definizione di autovettore e ricordando che $\lambda_1 = 1$, deve essere

$$L(\mathbf{v}) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2y + z \\ y \\ -2x + 4y + 3z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema lineare nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} 2y + z = x \\ y = y \\ -2x + 4y + 3z = z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \begin{array}{ccccccc} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \end{cases}$$

dato che la seconda equazione del primo sistema, ossia $y = y$, è una identità qualunque sia $y \in \mathbb{R}$. Nel secondo sistema, equivalente al primo perché abbiamo tolto la seconda equazione, notiamo che la seconda equazione è il doppio della prima per cui anch'essa è superflua. Pertanto, il sistema iniziale equivale all'equazione $-x + 2y + 3z = 0$. In questa equazione si possono fissare ad arbitrio due delle variabili e ricavare la terza ottenendo così tutte le terne che la risolvono (e che, di conseguenza, risolvono il sistema iniziale dato che l'equazione finale è equivalente al sistema iniziale). Posto, ad esempio, $z = \eta$, $y = \xi$ ricaviamo $x = 2\xi + \eta$ e, di conseguenza, i vettori $\mathbf{v} \in V_{\lambda_1}$ hanno la forma

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\xi + \eta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \xi, \eta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \xi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi, \eta \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle$$

dove abbiamo definito i due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ che formano una base per V_{λ_1}

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, V_{λ_1} è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $\dim(V_{\lambda_1}) = 2$.

Procediamo allo stesso modo per il calcolo di V_{λ_2} con $\lambda_2 = 2$. Abbiamo

$$L(\mathbf{v}) = \lambda_2 \cdot \mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2y + z \\ y \\ -2x + 4y + 3z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema lineare nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} 2y + z = 2x \\ y = 2y \\ -2x + 4y + 3z = 2z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -2x + z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$$

dato che dalla seconda equazione del primo sistema, ossia $y = 2y$, si trae subito $y = 0$ che sostituita nelle restanti due fornisce il secondo sistema. Ora, in quest'ultimo, la seconda equazione è identica alla prima e, di conseguenza, è superflua. Pertanto, il sistema iniziale è equivalente all'equazione $-2x + z = 0$. Risolviamola fissando, ad arbitrio, una delle due variabili e ricavando l'altra. Posto $x = \xi$, otteniamo $z = 2\xi$ e, quindi, le soluzioni del sistema iniziale sono esprimibili come

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 2\xi \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \xi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{v_3} \rangle$$

dove abbiamo definito

$$\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto abbiamo $\dim(V_{\lambda_2}) = 1$. Ora, essendo

$$\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

la mappa lineare L è diagonalizzabile. Una base di autovettori si ottiene giustapponendo le basi di V_{λ_1} e di V_{λ_2} per cui è $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$. Rispetto a questa base la matrice di L ha la forma diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con $D = H^{-1}AH$, H matrice di cambiamento di base (dalla base B di autovettori alla base iniziale rispetto alla quale è data la matrice A) esprimibile come (ricordiamoci che la base iniziale rispetto a cui è data A è quella canonica per cui le coordinate di $\mathbf{v_k}$, $k = 1, 2, 3$ rispetto a questa base coincidono proprio con gli autovettori trovati!)

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Il calcolo di $L(\mathbf{v})$ è immediato:

$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \\ 2 \\ -2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

In alternativa avremmo potuto calcolare le coordinate α di $\mathbf{v}$ (immediato, la base è quella canonica!), ottenere le corrispondenti coordinate β di $L(\mathbf{v})$ come $\beta = A \cdot \alpha$ e quindi riottenere $L(\mathbf{v})$ partendo dalle sue coordinate β (immediato, la base è quella canonica!).

Esercizio 2. La mappa lineare $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$B = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Fornire, se esiste, una base di autovettori per L con i relativi autovalori.

(b) Dire, giustificando la risposta, se esiste una base rispetto alla quale la matrice di L assume la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Calcolare $L(\mathbf{v})$ dove $\mathbf{v}$ è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. (a) Utilizzando la definizione di matrice associata alla mappa lineare L, abbiamo

$$L(\mathbf{v_1}) = 2 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + 0 \cdot \mathbf{v_3} = 2 \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{v_1}$$

dove i numeri 2, 0, 0 sono la prima colonna della matrice A. Di conseguenza, $\mathbf{v_1}$ è autovettore per L relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$. Procedendo in maniera analoga troviamo che $\mathbf{v_2}$ è autovettore per L associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$ e che $\mathbf{v_3}$ è autovettore per L associato all'autovalore $\lambda_3 = 4$. Quindi, B è una base di autovettori.

(b) Dato che la matrice A_1 è diagonale con gli stessi autovalori di A messi in un ordine differente, è sufficiente considerare la nuova base $B_1 = \{\mathbf{w_1} = \mathbf{v_3}, \mathbf{w_2} = \mathbf{v_1}, \mathbf{w_3} = \mathbf{v_2}\}$ dove gli autovettori di B sono riordinati come gli autovalori di A_1. Infatti, abbiamo

$$L(\mathbf{w_1}) = L(\mathbf{v_3}) = \lambda_3 \mathbf{v_3} = \lambda_3 \mathbf{w_1} = \lambda_3 \cdot \mathbf{w_1} + 0 \cdot \mathbf{w_2} + 0 \cdot \mathbf{w_3}$$

per cui la prima colonna di A_1 è data da 4, 0, 0. Analogamente, troviamo

$$L(\mathbf{w_2}) = L(\mathbf{v_1}) = \lambda_1 \mathbf{v_1} = \lambda_1 \mathbf{w_2} = 0 \cdot \mathbf{w_1} + \lambda_1 \cdot \mathbf{w_2} + 0 \cdot \mathbf{w_3}$$

per cui la seconda colonna di A_1 contiene i numeri 0, 2, 0 e

$$L(\mathbf{w_3}) = L(\mathbf{v_2}) = \lambda_2 \mathbf{v_2} = \lambda_2 \mathbf{w_3} = 0 \cdot \mathbf{w_1} + 0 \cdot \mathbf{w_2} + \lambda_2 \cdot \mathbf{w_3}$$

per cui la terza colonna di A_1 contiene i numeri 0, 0, 3.

(c) Per calcolare $L(\mathbf{v})$ iniziamo calcolando le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base B. Abbiamo

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{v_2} + \alpha_3 \cdot \mathbf{v_3}$$

ossia, scrivendo esplicitamente i vettori che compaiono,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che equivale al sistema lineare nelle tre incognite α_1, α_2 e α_3

$$\begin{cases} \alpha_1 & & + & \alpha_3 & = & 1 \\ & & & \alpha_3 & = & 2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 3 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $\alpha_3 = 2$ che sostituito nella prima dà l'equazione nella incognita α_1

$$\alpha_1 + 2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_1 = 1 - 2 = -1$$

Infine, dalla terza equazione otteniamo α_2

$$-1 + \alpha_2 + 2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_2 = 3 - 2 - (-1) = 2$$

Quindi, risulta $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$. Pertanto, abbiamo

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &\overset{(1)}{=} L(-1 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} + 2 \cdot \mathbf{v_3}) \\ &\overset{(2)}{=} (-1) \cdot L(\mathbf{v_1}) + 2 \cdot L(\mathbf{v_2}) + 2 \cdot L(\mathbf{v_3}) \\ &\overset{(3)}{=} (-1) \cdot (\ 2 \cdot \mathbf{v_1}\ ) + 2 \cdot (\ 3 \cdot \mathbf{v_2}\ ) + 2 \cdot (\ 4 \cdot \mathbf{v_3}\ ) \\ &= (-2) \cdot \mathbf{v_1} + 6 \cdot \mathbf{v_2} + 8 \cdot \mathbf{v_3} \end{aligned}$$

dove il passaggio (1) sfrutta l'espressione di $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori della base B, il passaggio (2) sfrutta la linearità della mappa L, il passaggio (3) il fatto che la base è costituita da autovettori. Sostituendo nell'ultima espressione i vettori della base otteniamo

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Siano V uno spazio vettoriale e $L : V \mapsto V$ una mappa lineare che ha autovalori λ_1 con $\dim(V_{\lambda_1}) = 3$ e λ_2 con $\dim(V_{\lambda_2}) = 2$.

(a) Dimostrare che L è diagonalizzabile.

(b) Calcolare la molteplicità algebrica $\mu(\lambda_1)$ dell'autovalore λ_1.

Soluzione. (a) Sia

$$V_{\lambda_1} =< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >, \qquad V_{\lambda_2} =< \mathbf{v_4}, \mathbf{v_5} > .$$

con $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ autovettori di V_{λ_1} e $\mathbf{v_4}$, $\mathbf{v_5}$ autovettori di V_{λ_2}. La somma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ è diretta per cui risulta

$$\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) = 3 + 2 = 5 = \dim(V).$$

Quindi, L è diagonalizzabile e una base per V formata da autovettori è

$$B =< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}, \mathbf{v_5} > .$$

Rispetto a questa base la mappa L ha matrice associata diagonale data da

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

poiché

$$L(\mathbf{v_k}) = \lambda_1 \mathbf{v_k}, \;\; k = 1,2,3 \qquad L(\mathbf{v_k}) = \lambda_2 \mathbf{v_k}, \;\; k = 4,5.$$

(b) Dato che L è diagonalizzabile, è $\mu(\lambda_1) = \dim(V_{\lambda_1}) = 3$.

Esercizio 4. Sia $L : V \mapsto V$ una mappa lineare diagonalizzabile e λ un suo autovalore. Siano, inoltre, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore λ.

(a) Dimostrare che $\mathbf{v} = \mu_1 \cdot \mathbf{v_1} + \mu_2 \cdot \mathbf{v_2}$ con μ_1 e μ_2 non entrambi nulli è autovettore relativo all'autovalore λ.

(b) Dimostrare che $\mu(\lambda) \geq 2$.

Soluzione. (a) Essendo $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ autovettori per la mappa lineare L abbiamo $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v_2} \neq \mathbf{0}$; inoltre, poiché sono relativi allo stesso autovalore λ, è

$$L(\mathbf{v_1}) = \lambda \cdot \mathbf{v_1}, \qquad L(\mathbf{v_2}) = \lambda \cdot \mathbf{v_2}$$

Osserviamo che $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$ perché i vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono linearmente indipendenti per cui la combinazione lineare

$$\mu_1 \cdot \mathbf{v_1} + \mu_2 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

è soddisfatta se e solo se $\mu_1 = \mu_2 = 0$ fatto escluso per ipotesi. Infine, abbiamo

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(\mu_1 \cdot \mathbf{v_1} + \mu_2 \cdot \mathbf{v_2}) \\ &= \mu_1 \cdot L(\mathbf{v_1}) + \mu_2 \cdot L(\mathbf{v_2}) \\ &= \mu_1 \cdot (\ \lambda \cdot \mathbf{v_1}\ ) + \mu_2 \cdot (\ \lambda \cdot \mathbf{v_2}\ ) \\ &= (\mu_1 \lambda) \cdot \mathbf{v_1} + (\mu_2 \lambda) \cdot \mathbf{v_2} \\ &= \lambda \cdot (\ \mu_1 \cdot \mathbf{v_1} + \mu_2 \cdot \mathbf{v_2}\ ) \\ &= \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Quindi, dato che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{v} \in V$ è autovettore per L relativo all'autovalore λ.

(b) Dato che L è diagonalizzabile, abbiamo

$$\mu(\lambda) = \dim(V_\lambda) \geq 2$$

dato che V_λ contiene almeno i due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

Esercizio 5. Siano $L : V \mapsto V$ una mappa lineare e λ_1, λ_2 due suoi autovalori distinti. Dimostrare che $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$.

Soluzione. Sia $\mathbf{v} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$. Allora abbiamo

$$\mathbf{v} \in V_{\lambda_1} \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathbf{v}) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \in V_{\lambda_2} \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathbf{v}) = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}$$

Di conseguenza risulta,

$$L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v} - \lambda_2 \cdot \mathbf{v} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{v}$$

e quindi, dato che, per ipotesi, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Esercizio 6. Sapendo che λ è autovalore per la matrice A, dimostrare che λ^2 lo è per A^2.
Soluzione. Sia $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ un autovettore associato a λ tale per cui $A\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Allora abbiamo

$$A^2 \cdot \mathbf{v} = A\,(A\mathbf{v}) = A\,(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot A\mathbf{v} = \lambda \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Quindi, λ^2 è autovalore per A^2.
Esercizio 7. Sia A una matrice non singolare diagonalizzabile. Dimostrare che la matrice non può avere tra i suoi autovalori anche l'autovalore nullo.
Soluzione. Poiché A è diagonalizzabile, esiste una matrice invertibile H tale che $D = H^{-1}AH$ ha forma diagonale con gli autovalori di A sulla diagonale principale. Risulta inoltre

$$\det(D) = \det\left(H^{-1}AH\right) = \det\left(H^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(H) = \det(A)$$

dato che

$$\det\left(H^{-1}\right) \cdot \det(H) = \det\left(H^{-1} \cdot H\right) = \det(I_n) = 1$$

Ora, $\det(A) \neq 0$ perché A è non singolare; inoltre, $\det(D)$ è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale, ossia degli autovalori di A. Pertanto, essendo $\det(D) = \det(A)$, dobbiamo necessariamente avere $\det(D) \neq 0$ e quindi nessun autovalore di A è nullo.

Esercizi 5 – 3/1/2012

Esercizio 1. Dimostrare che i vettori geometrici

$$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{v}_2 = \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

sono linearmente indipendenti. Calcolare, poi, $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$. Infine, scrivere l'equazione della retta passante per $P = (1\ 3\ -1)$ e parallela a $\vec{v}_1$ ed il piano ortogonale a $\vec{v}_2$ e passante per $Q = (2\ -3\ 4)$.

Esercizio 2. Siano A e B matrici quadrate di ordine n invertibili e tali che $AB + BA = A$.

(a) Dimostrare che la matrice B è simile alla matrice $I_n - B$ dove I_n è la matrice identità di ordine n.

(b) Sia $\mathbf{v}$ un autovettore comune ad A e B nel senso che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tali che $A\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ e $B\mathbf{v} = \mu \cdot \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vettore colonna di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\mu = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Dimostrare che le seguenti mappe $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ non sono lineari

$$\text{(i)}\ \ L\,(\,(x\ y)\,) = x + y - 1, \qquad \text{(ii)}\ \ L\,(\,(x\ y)\,) = x^2 + y^2$$

Esercizio 4. Una matrice A, quadrata di ordine n, ha autovalore λ se esiste un vettore colonna $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Dimostrare che se la matrice non singolare A ha autovalore λ allora la matrice A^{-1} ha autovalore $\frac{1}{\lambda}$.

Esercizio 5. Trovare, se possibile, un insieme formato da sei vettori ortonormali di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 6. Si consideri la mappa lineare $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$.

(a) Dimostrare che la mappa non può essere suriettiva.

(b) Dimostrare o smentire l'esistenza di una mappa lineare L tale che

$$L(\ ((1\ 0)\ ) = (1\ 0\ 0), \qquad L(\ (1\ 1)\ ) = (1\ 0\ 2)$$

Nel caso in cui la mappa esista, scriverne la matrice associata alle basi canoniche.

(c) Calcolare, se possibile, i parametri reali a e b in modo che esista la mappa lineare L

$$L(\ ((1\ 0)\ ) = (1\ 0\ 0), \qquad L(\ (1\ 1)\ ) = (1\ 0\ 2), \qquad L(\ (a \quad 1-a)\ ) = (3\ \ b\ \ -4)$$

Esercizio 7. Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se lo è la mappa lineare che ha A come matrice associata rispetto alla base canonica. Dimostrare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare una matrice H tale che $D = H^{-1}AH$ con D data da

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$