Esercizi 5 – 3/1/2012

Esercizio 1. Dimostrare che i vettori geometrici

$$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{v}_2 = \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

sono linearmente indipendenti. Calcolare, poi, $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$. Infine, scrivere l'equazione della retta passante per $P = (1\ 3\ -1)$ e parallela a $\vec{v}_1$ ed il piano ortogonale a $\vec{v}_2$ e passante per $Q = (2\ -3\ 4)$.

Esercizio 2. Siano A e B matrici quadrate di ordine n invertibili e tali che $AB + BA = A$.

(a) Dimostrare che la matrice B è simile alla matrice $I_n - B$ dove I_n è la matrice identità di ordine n.

(b) Sia $\mathbf{v}$ un autovettore comune ad A e B nel senso che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tali che $A\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ e $B\mathbf{v} = \mu \cdot \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vettore colonna di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\mu = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Dimostrare che le seguenti mappe $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ non sono lineari

$$\text{(i)}\ \ L\,(\,(x\ y)\,) = x + y - 1, \qquad \text{(ii)}\ \ L\,(\,(x\ y)\,) = x^2 + y^2$$

Esercizio 4. Una matrice A, quadrata di ordine n, ha autovalore λ se esiste un vettore colonna $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Dimostrare che se la matrice non singolare A ha autovalore λ allora la matrice A^{-1} ha autovalore $\frac{1}{\lambda}$.

Esercizio 5. Trovare, se possibile, un insieme formato da sei vettori ortonormali di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 6. Si consideri la mappa lineare $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$.

(a) Dimostrare che la mappa non può essere suriettiva.

(b) Dimostrare o smentire l'esistenza di una mappa lineare L tale che

$$L(\,((1\ 0)\,) = (1\ 0\ 0), \qquad L(\,(1\ 1)\,) = (1\ 0\ 2)$$

Nel caso in cui la mappa esista, scriverne la matrice associata alle basi canoniche.

(c) Calcolare, se possibile, i parametri reali a e b in modo che esista la mappa lineare L

$$L(\,((1\ 0)\,) = (1\ 0\ 0), \qquad L(\,(1\ 1)\,) = (1\ 0\ 2), \qquad L(\,(a \quad 1-a)\,) = (3\ \ b\ \ -4)$$

Esercizio 7. Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se lo è la mappa lineare che ha A come matrice associata rispetto alla base canonica. Dimostrare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e calcolare una matrice H tale che $D = H^{-1}AH$ con D data da

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$