Esercizi 2 – 13/12/2011

Esercizio 1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Indicare le eventuali matrici invertibili calcolandone l'inversa.

(b) Indicare le eventuali matrici simmetriche calcolando la trasposta delle altre.

(c) Calcolare i prodotti $A \cdot C$ e $C \cdot A$. Sono uguali? Che legame hanno con la matrice C?

(d) Calcolare, per induzione su n, A^n e B^n, $n \in \mathbb{N}$.

(e) Calcolare, usando il teorema di Binet, $\det(C^3)$.

Sugg. per (d): calcolare i primi prodotti per $n = 2, 3, 4$ per intuire come vanno le cose osservando che $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1}$.
Soluzione. (d) Risulta

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}, \qquad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Dimostriamolo, ad esempio, per B. Per $n = 1$ otteniamo proprio B. Assunta vera l'espressione data per B^n, dimostriamo che quella che si ha per B^{n+1} si ottiena da quella di B^n sostituendo n con $n + 1$. Abbiamo

$$B^{n+1} = B \cdot B^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Pertanto, per induzione, B^n ha l'espressione data.
Esercizio 2. Siano A e B due matrici simmetriche dello stesso ordine. Dimostrare che la matrice $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ è simmetrica.
Soluzione. Dobbiamo far vedere che $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Abbiamo

$$p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij} \overset{(1)}{=} \lambda \cdot a_{ji} + \mu \cdot b_{ji} = p_{ji}$$

dove (1) sfrutta il fatto che A e B sono simmetriche ossia $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Esercizio 3. Si consideri l'insieme delle matrici $M_{3,2}(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice nulla $O \in M_{3,2}(\mathbb{R})$;

(b) scrivere la matrice $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ che ha tutti gli elementi nulli tranne $a_{21} = -1$, $a_{12} = -2$. Calcolare, inoltre, le due matrici $B = 2 \cdot A$ e $C = -A$. Si può calcolare A^2? Perché?

(c) Sia $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Indicare quali delle affermazioni che seguono sono vere e quali false giustificando le risposte.

V☐ F☐ $A \cdot A^T$ è una matrice quadrata di ordine 3;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è una matrice quadrata di ordine 2;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è invertibile;
V☐ F☐ $A^T \cdot A$ è simmetrica;
V☐ F☐ esiste una matrice $A \neq 0$ tale che $\det(A \cdot A^T) = 0$;
V☐ F☐ esiste una matrice A tale che $A^T \cdot A$ è diagonale;
V☐ F☐ esiste una matrice $A \neq 0$ tale che $A \cdot A^T = 0$ (attenzione!).

Soluzione. (a) Lo spazio vettoriale $M_{3,2}(\mathbb{R})$ denota le matrici di tre righe e due colonne. La matrice nulla di questo spazio vettoriale ha tutti gli elementi nulli ed è quindi

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le matrici $B = 2A$ e $C = -A$ sono

$$B = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = -A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto $A^2 = A \cdot A$ non può essere effettuato perché la matrice A ha numero di colonne diverso dal numero di righe.
(c) La trasposizione scambia le righe con le colonne per cui A^T ha due righe e tre colonne; pertanto

- essendo $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ e $A^T \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ il prodotto $A \cdot A^T$ può essere effettuato ed ha 3 righe e 3 colonne, ossia è una matrice quadrata di ordine tre;
- essendo $A^T \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ e $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ il prodotto $A^T \cdot A$ può essere effettuato ed ha 2 righe e 2 colonne, ossia è una matrice quadrata di ordine due.

Esplicitando $A^T \cdot A$ abbiamo

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

per cui $A^T \cdot A$ è diagonale (e quindi simmetrica) con elementi sulla diagonale diversi da zero per cui è anche invertibile essendo $\det(A^T \cdot A) = 1 \cdot 4 = 4 \neq 0$. Si può provare che $A^T \cdot A$ è simmetrica senza esplicitarla in quanto risulta (ricordiamo che $(A^T)^T = A$)

$$\left(A^T \cdot A \right)^T = \left(A \right)^T \cdot \left(A^T \right)^T = A^T \cdot A$$

Consideriamo, ora, la generica matrice $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

per cui risulta

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 + e^2 & ab + cd + ef \\ ab + cd + ef & b^2 + d^2 + f^2 \end{pmatrix}$$

che evidenzia subito che affinché ci sia determinante nullo basta prendere $a = c = e = 0$ e gli altri parametri arbitrari (di cui almeno uno non nullo per $A \neq 0$). Ragionando in modo analogo otteniamo

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd & ae + bf \\ ac + bd & c^2 + d^2 & ce + df \\ ae + bf & ce + df & e^2 + f^2 \end{pmatrix}$$

Questa espressione mostra che, affinché sia la matrice nulla, deve essere $a^2 + b^2 = 0$ vera se e solo se $a = b = 0$; in modo analogo risulta $c^2 + d^2 = 0$ che è vera se e solo se $c = d = 0$; infine da $e^2 + f^2 = 0$ segue $e = f = 0$. Pertanto, nessuna matrice non nulla può soddisfare alla condizione richiesta.

Esercizio 4. Dimostrare o confutare con un controesempio, le affermazioni che seguono.

(a) Il prodotto di due matrici invertibili dello stesso ordine è una matrice invertibile.

(b) Se la matrice A è invertibile, allora lo è anche A^{1024}.

(c) $\det(A + A) = 2 \cdot \det(A)$ per ogni matrice quadrata A.

(d) Sapendo che $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$, allora è $\det(A + B) \neq 0$.

(e) Siano $A \in M_{2048,2028}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -1$ e B la matrice ottenuta da A scambiando tra loro le prime 1024 righe con le ultime 1024. Allora è $\det(B) = \det(A)$.

Soluzione. (a) Dette A_1 e A_2 le due matrici invertibili, abbiamo

$$\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \neq 0$$

giacché, essendo A_1 invertibile è $\det(A_1) \neq 0$ e essendo A_2 invertibile è $\det(A_2) \neq 0$. Pertanto, essendo $\det(A_1 \cdot A_2) \neq 0$, la matrice $A_1 \cdot A_2$ è invertibile.
(b) Abbiamo $\det\left(A^{1024} \right) = \left(\det(A) \right)^{1024} \neq 0$ per cui A^{1024} è invertibile.
(c) Detto n l'ordine della matrice A, abbiamo $\det(A + A) = \det(2 \cdot A) = 2^n \det(A)$ per cui la affermazione è falsa.
(d) L'affermazione è falsa: basta considerare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per cui è} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) La affermazione è corretta: lo scambio di una riga con un'altra cambia segno al determinante. Nel caso in esame, ci sono 1024 scambi per cui risulta

$$\det(B) = (-1)^{1024} \cdot \det(A) = \det(A)$$

Esercizio 5. Siano L_1, L_2 due matrici triangolari basse di ordine n. Dimostrare che $L_1 + L_2$ e $L_1 \cdot L_2$ sono matrici triangolari basse.
Soluzione. Siano $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ gli elementi delle matrici L_1 e L_2 rispettivamente. Allora, essendo triangolari basse, risulta

$$a_{ij} = 0,\ i < j \le n, \qquad b_{ij} = 0,\ i < j \le n.$$

Pertanto, è $a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$ per $i < j \le n$ e quindi la somma è triangolare bassa. Per il prodotto, detto c_{ij} l'elemento di posto (i, j) nella matrice $L_1 \cdot L_2$, abbiamo per $i < j \le n$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

dato che $b_{kj} = 0$, $1 \le k \le i < j$ per cui anche il prodotto è triangolare basso.
Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 3 \\ 6-\lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, se possibile, λ e μ tali che A sia simmetrica.

(b) Posto $\lambda = 3$ e $\mu = 0$, calcolare $\det(A)$ sviluppando il calcolo prima rispetto alla prima riga, poi rispetto alla seconda colonna e infine applicando la regola di Sarrus.

(c) Posto $\mu = 1$, calcolare λ in modo che A sia invertibile e calcolare A^{-1}.

Soluzione. (a) Affinché ci sia simmetria deve essere

$$\begin{cases} \lambda = 6 - \lambda \\ \mu = 3 \end{cases}$$

che porge $\lambda = 3$ e $\mu = 3$.
(b) Il determinante, sviluppato rispetto alla seconda colonna, vale

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) = 8$$

(c) Abbiamo, con Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 6-\lambda & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 \end{array} \right. \\ &= (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (6 - \lambda) + \lambda \cdot 1 \cdot 1 \\ &- [\,(6 - \lambda) \cdot 0 \cdot \lambda + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1\,] \\ &= 18 - 3\lambda + \lambda + 3 - 1 = 20 - 2\lambda \end{aligned}$$

Pertanto, la matrice è invertibile per tutti i λ tali che $20 - 2\lambda \ne 0$ ossia $\lambda \ne 10$. Il calcolo dell'inversa dà per $\lambda \ne 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{20 - 2\lambda} \cdot \begin{pmatrix} -3 & \lambda - 1 & 3 \\ 17 - 3\lambda & \lambda^2 - 6\lambda - 1 & \lambda + 3 \\ 1 & 7 - \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare $\det(A)$; basandosi su questo risultato, dire se A è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $\det(A^{-1})$ e $\det(A^{-3})$ ($A^{-3} = \left(A^{-1} \right)^3$.)

(b) Scrivere le tre matrici $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $H \cdot A$ sia

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Solo guardandole, quale delle matrici (i), (ii) e (iii) ha sicuramente determinante nullo? Quanto valgono i determinanti delle restanti due e che legame hanno con $\det(A)$?

(c) Calcolare il polinomio nella variabile λ definito da $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Qual è il suo grado? Quanto valgono i coefficienti di λ^2 e il termine noto? Che legami si possono intuire tra questi valori e la matrice di partenza?

Soluzione. (a) Risulta $\det(A) = 29$ per cui A è invertibile. Si ha allora,

$$1 = \det(I_3) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \qquad \Rightarrow \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{29}$$

e quindi pure

$$\det(A^{-3}) = \det(\ (A^{-1}\ )^3) = \left(\det(\ A^{-1}\ ) \right)^3 = \frac{1}{29^3}.$$

(b) Abbiamo

$$\text{(i)}\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\ H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)}\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{62}{29} & \frac{32}{29} & \frac{9}{29} \end{pmatrix}$$

dove, detta $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ l'ultima riga di H, la condizione da impostare per ottenere (iii) è

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 = 7 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 6 = 4 \\ \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 4 + \gamma \cdot 1 = 9 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\alpha \cdot (1\ 1\ 2) + \beta \cdot (3\ 0\ 4) + \gamma \cdot (5\ 6\ 1) = (7\ 4\ 9)$$

Chiaramente, la matrice (i) ha determinante nullo visto che ha le prime due righe uguali. Le altre due hanno determinante non nullo e pari a $3 \cdot 2 \cdot 1 \det(A)$ per il caso (ii) e $1 \cdot 1 \cdot \frac{9}{29} \det(A)$ per il caso (iii).

(c) Risulta $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 36\lambda + 29$ per cui ha grado 3 (pari all'ordine della matrice); il termine noto è $\det(A)$ e il termine di λ^2 è la somma degli elementi della diagonale principale.

Esercizio 8. Calcolare il determinante della matrice quadrata di ordine 4 data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

e calcolare il valore del parametro reale μ tale per cui $\det(A) = 0$. Indicare, quindi, per quali valori del parametro la matrice A è invertibile (senza calcolare l'inversa!).
Soluzione. Basta sviluppare rispetto alla quarta colonna. Si trova $\det(A) = 6\mu - 23$ per cui A è invertibile per $\mu \neq \frac{23}{6}$.
Esercizio 9. Sia S la matrice simmetrica di ordine 3 definita da

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & d_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Esprimere, in termini dei parametri che compaiono nella matrice, la funzione delle tre variabili reali x_1, x_2 e x_3 definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}^T \cdot S \cdot \mathbf{x} \quad \text{essendo} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare, infine, una matrice S tale per cui $F(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \cdot S \cdot \mathbf{x} \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con l'uguaglianza che vale se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Una matrice che soddisfa questa condizione è detta definita positiva.
Esercizio 10. Sia A una matrice quadrata di ordine n invertibile. Si può dimostrare che esiste un'unica coppia di matrici L ed U, la prima triangolare bassa con $l_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$ e la seconda triangolare alta, tali che $A = L \cdot U$ (decomposizione LU della matrice A).

(a) Sapendo che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vettori, quali sono le dimensioni di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$?

(b) Scrivere le matrici L ed U per il caso $n = 3$ indicando chiaramente quali sono i termini nulli e quelli non nulli denotando questi ultimi con lettere opportune (ad esempio, l_{21}).

(c) Dimostrare che

$$A \cdot \mathbf{x} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} L \cdot \mathbf{y} &= b \\ U \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{cases}$$

dove $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è un opportuno vettore colonna tale che $L\mathbf{y} = b$.

Esercizio 11. Molti problemi pratici richiedono la soluzione al calcolatore di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sono numeri assegnati e $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ funzioni continue del tempo t date. In alcuni metodi di soluzione intervengono matrici quadrate tridiagonali di ordine n che hanno non nulli solo gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali adiacenti. Ad esempio, per $n = 5$ si può avere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Detto N_n il numero di elementi non nulli (ossia, $a_{ij} \neq 0$) della matrice, calcolare il fattore di sparsità s_n definito da $s_n = N_n/n^2$; dimostrare che il limite di s_n per $n \to +\infty$ è zero. Una matrice che, indipendentemente da come sono disposti nella stessa gli elementi non nulli, ha fattore di sparsità $s_n < 0.1$ circa è detta sparsa.

(b) Calcolare, per la matrice data, L ed U tali che $LU = A$ sapendo che hanno la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{pmatrix}$$

Sugg: abbiamo $1 \cdot u_{11} = 3$ da cui $u_{11} = 3$. Quindi, $1 \cdot u_{12} = -1$ da cui segue $u_{12} = -1$. Quindi, abbiamo $l_{21} \cdot u_{11} = -1$ per cui risulta $l_{21} = -1/u_{11} = -1/3$, $l_{21}u_{12} + u_{22} = 3$ da cui $u_{22} = 3 - l_{21}u_{12} = 8/3$ e così via.

(c) Calcolare, a mano o, preferibilmente, con l'ausilio di un calcolatore, A^2, A^3 e A^4 per la matrice A indicata, valutare i fattori di sparsità di ognuna di queste matrici ed osservare che crescono portandosi a 1 per A^4. Questo tipo di comportamento, detto di riempimento o di *fill-in*, (perché la matrice da pochi elementi non nulli diventa con molti elementi non nulli, ossia si riempie) spesso non è desiderato nei procedimenti si soluzione numerica soprattutto quando l'ordine della matrice A è elevato.