Capitolo 1

Introduzione informale alle equazioni differenziali ordinarie

Una equazione differenziale ordinaria esprime un legame tra la variabile indipendente $t \in \mathbb{R}$, la funzione incognita $y(t)$ e le sue derivate

$$F(t, y(t), y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{1.1}$$

dove $y^{(k)}, k = 1, \cdots, n$ denota la derivata k-esima di $y(t)$ e $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ è detto ordine dell'equazione differenziale. Una funzione $f(t)$ definita e derivabile n volte nell'intervallo $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ è soluzione o integrale di (1.1) in I se e solo se

$$F(t, f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)) = 0 \;\; \forall\, t \in \mathrm{I}$$

Nel caso in cui sia possibile esplicitare la derivata di ordine più elevato l'equazione differenziale si dice in forma esplicita:

$$y^{(n)} = G(t, y(t), y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)).$$

Esempio 1.1 *Sia $\xi(t)$ una funzione continua in $[a, b]$. L'equazione differenziale*

$$y' = \xi(t)$$

è di ordine 1 perché compare solo la $y'(t)$ e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, ha come soluzione in $[a, b]$ una qualunque delle funzioni

$$y(t) = f(t) = \int_a^x \xi(t)\, dt + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$. □

Esempio 1.2 *L'equazione differenziale nella funzione incognita $y(t)$*

$$y^{(3)} - 4 \cdot y' = 0$$

è di ordine 3 perché il massimo ordine di derivazione di y è 3. Ha come soluzione in $\mathbb{R}$ una qualsiasi delle funzioni

$$y(t) = f(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{2t} + c_3$$

ottenuta dando a ciascuna delle costanti reali c_1, c_2, c_3 un valore arbitrario. Infatti, qualunque siano i valori attribuiti alle costanti, risulta

$$\begin{array}{rcl} f^{(1)}(t) & = & -2 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2t} \\ f^{(2)}(t) & = & 4 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} + 4 \cdot c_2 \cdot e^{2t} \\ f^{(3)}(t) & = & -8 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} + 8 \cdot c_2 \cdot e^{2t} \end{array}$$

per cui è

$$f^{(3)}(t) - 4 \cdot f'(t) = -8 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} + 8 \cdot c_2 \cdot e^{2t} - 4 \cdot \left[-2 \cdot c_1 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2t} \right] = 0$$

che coincide col secondo membro. □

I due esempi mostrano che, in generale, la soluzione di una equazione differenziale dà una famiglia di curve che dipendono da un insieme di costanti. La scelta di una particolare funzione all'interno della famiglia può essere fatta aggiungendo delle condizioni.
Un tipico esempio di queste condizioni va sotto il nome di <u>problema di Cauchy</u> o ai valori iniziali: trovare $y(t)$ tale che

$$\begin{cases} y^{(n)} & = & G(t, y^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \\ \cdots & & \\ y^{(n-1)}(t_0) & = & y_{n-1} \end{cases}$$

dove t_0, detto istante iniziale, e y_0, y_1, ..., y_{n-1} sono numeri reali assegnati. Sotto opportune ipotesi per f si dimostra che esiste una sola soluzione definita in un intorno di t_0.

Esempio 1.3 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & \frac{2}{1+t^2} \\ & & \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Soluzione L'integrale generale della equazione differenziale è

$$y(t) = \int \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\mathrm{arctg}(t) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Risolviamo ora il problema di Cauchy; deve essere

$$y(0) = 1 = 2 \cdot \mathrm{arctg}(0) + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

dato che $\mathrm{arctg}(0) = 0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = 2\mathrm{arctg}(t) + 1$$

ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. □

Esempio 1.4 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & \frac{1}{1-t^2} \\ & & \\ y(-2) & = & 1 \end{cases}$$

Soluzione In questo caso l'integrale generale risulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\int \frac{1}{t^2-1}\,dt \\ &= -\int \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right\} dt \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\ln(|t-1|) + \frac{1}{2}\ln(|t+1|) + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) + c,\ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

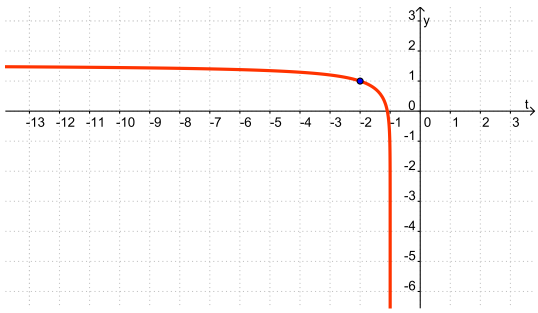
Il problema di Cauchy richiede che la costante c soddisfi l'equazione $y(-2) = 1$ che dà

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left| \frac{-2+1}{-2-1} \right| \right) + c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 + \frac{1}{2}\ln(3)$$

per cui la soluzione è

$$y(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) + 1 + \frac{1}{2}\ln(3)$$

Questa soluzione è definita in un intorno di $t_0 = -2$; l'intorno può essere esteso fino a considerare $(-\infty, -1)$ ma non oltre perché per $t = -1$ l'argomento del logaritmo si annulla rendendo non definita la funzione in questo punto.



Ci sono parecchie circostanze in cui le costanti che compaiono nell'integrale generale vengono determinate imponendo condizioni differenti da quelle del problema di Cauchy. Vediamo un esempio molto semplice.

Esempio 1.5 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale*

$$y'(t) = 3t^2 - 2t$$

tale che l'area l'area compresa tra i punti $t = 0$ *e* $t = 1$ *sia pari a 4.*

Soluzione. Abbiamo

$$y(t) = \int (3t^2 - 2t)dt = t^3 - t^2 + c$$

per cui la costante c deve soddisfare la relazione

$$\int_0^1 (t^3 - t^2 + c)dt = 4 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + c\,t\right]_0^1 = 4 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{49}{12}$$

Dunque, la soluzione cercata è

$$y(t) = t^3 - t^2 + \frac{49}{12}.$$

1.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Si possono scrivere nella forma

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

con g ed h funzioni continue in t ed y, rispettivamente. Nel caso in cui sia $g(t) = 1$ l'equazione differenziale si dice autonoma. Le soluzioni sono di due tipi.

- Eventuali funzioni costanti $y(t) = \overline{y}$, detti integrali singolari. Poiché, per queste funzioni, è $y'(t) = 0$, risulta

  $$0 = g(t) \cdot h(\overline{y}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad h(\overline{y}) = 0$$

  Quindi, gli integrali singolari sono soluzioni dell'equazione algebrica $h(y) = 0$.

- Sia $y = y(t), t \in I$ una soluzione dell'equazione differenziale tale che $h(y(t)) \neq 0\ \forall\, t \in I$. Abbiamo, quindi

  $$\frac{1}{h(y(t))} \cdot y'(t) = g(t) \quad (\star)$$

  per cui indicate con $H(y)$ e $G(t)$ le seguenti due primitive

  $$H(y) = \int \frac{1}{h(y)}\, dy, \qquad G(t) = \int g(t)\, dt$$

  per il teorema della derivazione della funzione composta risulta

  $$H'(y(t)) = \frac{1}{h(y(t))} \cdot y'(t) \overset{(\star)}{=} g(t) = G'(t)$$

  Dunque, è

  $$(\ H(y(t)) - G(t)\ )' = 0\ \forall\, t \in I \quad \Leftrightarrow \quad H(y(t)) - G(t) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

  che rappresenta, in forma implicita, le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale.

Esempio 1.6 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = y$$

Soluzione. E' una equazione differenziale autonoma. Abbiamo $g(t) = 1$ ed $h(y) = y$ per cui c'è l'integrale particolare $y(t) = 0$. Le soluzioni non costanti si ricavano osservando che

$$H(y) = \int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln(|y|), \qquad G(t) = \int g(t)\, dt = \int 1\, dt = t$$

per cui risulta

$$\ln(\,|y(t)|\,) - t = c.$$

In questo caso è possibile rendere esplicita $y(t)$:

$$|y(t)| = e^{c+t} = e^c \cdot e^t$$

e, quindi, ci sono due possibili gruppi di soluzioni

$$i)\ \begin{cases} y(t) \geq 0 \\ y(t) = Ke^t, \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} y(t) < 0 \\ y(t) = -Ke^t \end{cases}$$

dove abbiamo posto $K = e^c > 0$. Possiamo riunire questi due gruppi, e pure l'integrale particolare $y(t) = 0$, ponendo

$$y(t) = Ce^t$$

con C costante reale arbitraria. □

Esempio 1.7 *Risolvere l'equazione della logistica*

$$y' = (a - by)y$$

dove a, b sono parametri reali positivi.

Soluzione. E' una equazione differenziale autonoma per cui è $g(t) = 1$ e $G(t) = t$. Risulta inoltre $h(y) = (a - by)y$ per cui ci sono i due integrali singolari $y(t) = 0$ e $y(t) = a/b$. Per le soluzioni non costanti è

$$\begin{aligned} H(y) &= \int \frac{1}{(a-by)y}\,dy = \frac{1}{a}\int \left\{\frac{1}{y} + \frac{b}{a-by}\right\} dy \\ &= \frac{1}{a}\left\{\ln(|y|) - \ln(|a-by|)\right\} \\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\left|\frac{y}{a-by}\right|\right) \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione $y(t)$ soddisfa la relazione

$$\frac{1}{a}\ln\left(\left|\frac{y(t)}{a-by(t)}\right|\right) - t = \tilde{c} \qquad \text{o, anche,} \qquad \ln\left(\left|\frac{y(t)}{a-by(t)}\right|\right) = at + \tilde{c}$$

con $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Eliminando il logaritmo otteniamo

$$\left|\frac{y(t)}{a-by(t)}\right| = e^{\tilde{c}+at} = e^{\tilde{c}} \cdot e^{at} = Ke^{at} \tag{1.2}$$

con $K = e^{\tilde{c}} > 0$. Anche in questo caso ci sono gruppi di soluzioni differenti a seconda del segno dell'espressione entro il valore assoluto. Pertanto, studiamo il segno di

$$\frac{y}{a-by}$$

pensandola come una funzione della variabile reale y. Ricordando che $a/b > 0$, risulta subito Quindi, abbiamo tre casi.

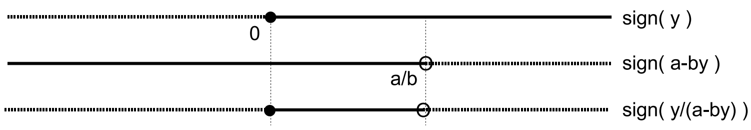


Figura 1.1: Segno della funzione $y/(a - by)$.

- Sia $y_0 = y(0) < 0$. Poiché $y(t)$ è continua in $t = 0$ (perché derivabile), risulta, per il teorema della permanenza del segno, $y(t) < 0$ in tutto un intorno di $t = 0$. In questo intorno, è $y(t)/(a - by(t)) < 0$ per cui l'equazione (1.2) diventa

$$-\frac{y(t)}{a - by(t)} = Ke^{at}$$

che risolta rispetto a $y(t)$ dà

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 - ce^{-at}}$$

dove $c = 1/(Kb) > 0$ è una costante arbitraria positiva. La costante c dipende dalla condizione iniziale y_0:

$$y_0 = \frac{\frac{a}{b}}{1 - c} \quad \Rightarrow \quad c = 1 - \frac{a}{by_0}$$

che sostituita nella equazione precedente dà

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 - \left(1 - \frac{a}{by_0}\right) e^{-at}}$$

La funzione $y(t)$ ha un asintoto verticale in

$$1 - \left(1 - \frac{a}{by_0}\right) e^{-a\hat{t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{a\hat{t}} = 1 - \frac{a}{by_0} \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{1}{a} \ln\left(1 - \frac{a}{by(0)}\right)$$

con $\hat{t} > 0$ dato che $1 - a/(by_0) > 1$ perché $a/(by_0) < 0$. Inoltre, per $t < \hat{t}$ abbiamo $y(t) < 0$ e, di conseguenza, $y'(t) = y(t)[a - by(t)] < 0$ per cui $y(t)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, \hat{t})$. La concavità si deduce osservando che abbiamo

$$\begin{aligned} y''(t) &= (\, y'(t)\,)' = (\, y(t)(a - by(t))\,)' = y'(t)(a - by(t)) - by(t)y'(t) \\ &= y'(t)\,[a - 2by(t)] < 0 \end{aligned}$$

per cui essendo $a - 2y(t) > 0$ e $y'(t) < 0$ per $t < \hat{t}$ si ha $y''(t) < 0$. Perciò, $y(t)$ ha la concavità verso il basso per $t < \hat{t}$. Infine, è

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$$

e, quindi, l'andamento qualitativo di $y(t)$ è riportato in Fig. 1.2

- Sia $0 < y(0) < a/b$. In questo caso esiste un intorno di $t = 0$ dove $y(t) > 0$ per cui è pure $y(t)[a - by(t)] > 0$ per cui l'equazione diventa

$$\frac{y(t)}{a - by(t)} = Ke^{at}$$

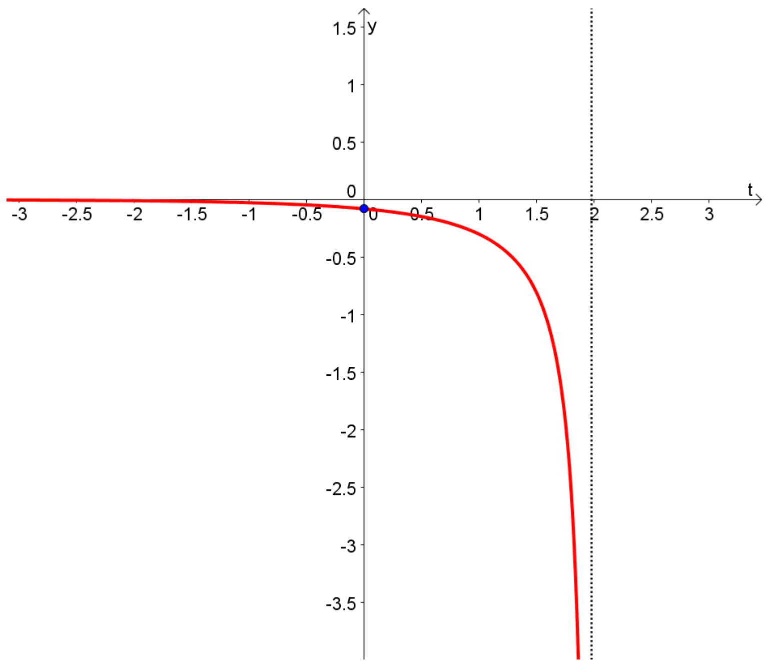


Figura 1.2: Soluzione dell'equazione logistica per $y(0) < 0$. La soluzione è definita per $t < \hat{t}$.

Procedendo come nel caso precedente, tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(-1 + \frac{a}{by_0}\right) e^{-at}}$$

che risulta definita su $\mathbb{R}$ dato che, essendo $0 < y_0 < a/b$, è

$$-1 + \frac{a}{by_0} > 0$$

Abbiamo, dato che il denominatore è sempre maggiore di 1,

$$0 < y(t) < \frac{a}{b} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e, inoltre,

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$$

Tenuto conto che $y(t)$ è positiva e superiormente limitata da a/b, risulta $y'(t) = y(t)[a - by(t)] > 0$ per cui $y(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Da ultimo, tenendo presente l'espressione della derivata seconda, si ha un flesso per

$$a - 2by(\tilde{t}) = 0$$

per cui $y(t)$ ha la concavità verso l'alto per $t < \tilde{t}$ e verso il basso per $t > \tilde{t}$. Infatti, $y''(t) > 0$ se e solo se $(a - 2by(t)) > 0$ ossia per $y(t) < a/(2b)$. Ma $y(t)$ è crescente per cui detto $\tilde{t}$ il punto in cui $y(\tilde{t}) = a/(2b)$, si ha, ad esempio, $y(t) < a/(2b)$ per $t < \tilde{t}$ (e, quindi, $y(t)$ ha la concavità verso l'alto per $t < \tilde{t}$).

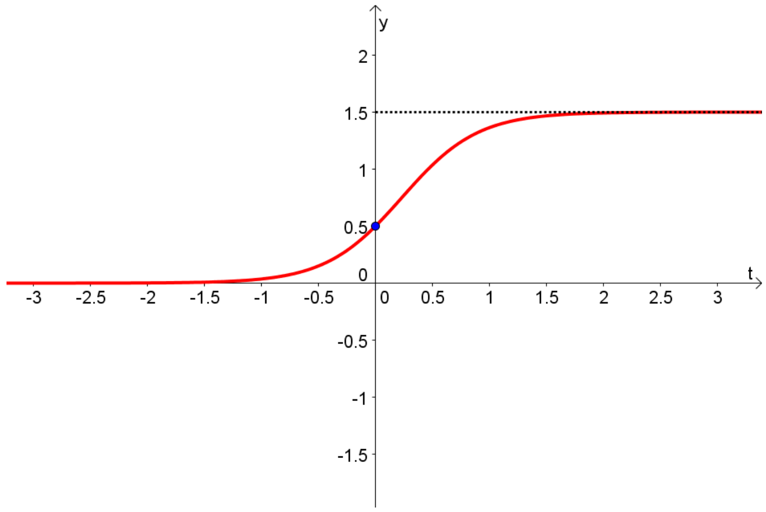


Figura 1.3: $y(t)$ per $0 < y(0) < a/b$. La soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

- Sia $a/b < y(0)$. Si tratta come il primo caso con la sola differenza che ora l'asintoto è posto in $\hat{t} < 0$ perché $a/(by(0) < 1$. Per $t > \hat{t}$ è $a/b < y(t)$; in corrispondenza è $y'(t) > 0$ e, quindi, $y(t)$ è monotona strettamente decrescente per $t > \hat{t}$. Infine, $y''(t) < 0$ dato che

  $$y''(t) = y'(t)[a - 2y(t)] > 0 \quad \text{dato che} \quad y(t) > \frac{b}{a} > \frac{b}{2a}$$

  per cui la concavità è rivolta sempre verso l'alto. Infine, abbiamo

  $$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{a}{b}$$

  per cui l'andamento qualitativo si presenta come nella Fig. 1.4

1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sono del tipo

$$y' + a(t)y = f(t)$$

dove $a(t)$ ed $f(t)$ sono funzioni assegnate. Per risolverle moltiplichiamo ambo i membri per il fattore integrante $\exp(\,A(t)\,)$ dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Abbiamo

$$[\,y' + a(t)y\,] \cdot e^{A(t)} = f(t) \cdot e^{A(t)}$$

ossia

$$y'(t) \cdot e^{A(t)} + y(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) = f(t)$$

Ma è

$$\left(e^{A(t)}\right)' = e^{A(t)} \cdot (\,A(t)\,)' = e^{A(t)} \cdot a(t)$$

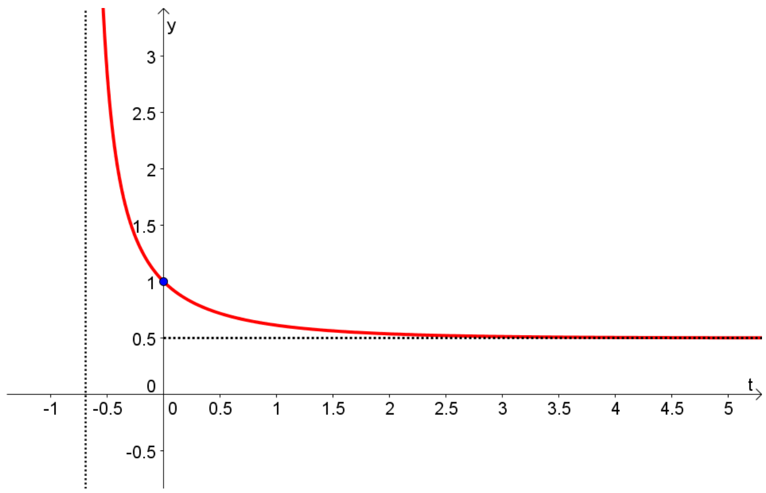


Figura 1.4: $y(t)$ per $a/b < y(0)$. La soluzione è definita per $(\hat{t}, +\infty)$.

perché $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Ora, tenendo conto della regola di derivazione del prodotto $y(t) \cdot \exp(A(t))$ otteniamo

$$\left(y(t) \cdot e^{A(t)}\right)' = f(t) \cdot e^{A(t)}.$$

Pertanto, detta $F(t)$ una primitiva del secondo membro, risulta

$$\left(y(t) \cdot e^{A(t)}\right)' = F'(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(y(t) \cdot e^{A(t)} - F(t)\right) = 0$$

che dà, al solito, la condizione

$$y(t) \cdot e^{A(t)} - F(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, ricordando la definizione di $F(t)$ ed esplicitando $y(t)$, risulta

$$y(t) = e^{-\int a(t)dt} \cdot \left(\int e^{\int a(t)dt} \cdot f(t)dt + c\right).$$

Esempio 1.8 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' + \lambda y = 0$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Soluzione. Si tratta di una equazione di primo ordine, omogenea con $a(t) = \lambda$, $f(t) = 0$. Risulta

$$A(t) = \int a(t)dt = \int \lambda\, dt = \lambda \cdot t, \qquad F(t) = \int f(t) \cdot e^{A(t)} dt = \int 0\, dt = 0$$

e quindi

$$y(t) = e^{-\lambda t}\,(0 + c) = ce^{-\lambda t}$$

dove c è una arbitraria costante reale. Questa soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Esempio 1.9 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + 2ty = t \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo il problema di Cauchy in due passi.

a) Soluzione generale dell'equazione differenziale. Abbiamo

$$A(t) = \int a(t)dt = \int 2tdt = t^2, \qquad F(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t)dt = \int e^{t^2} \cdot tdt = \frac{1}{2}e^{t^2}$$

e, quindi, la soluzione generale è

$$y(t) = e^{-t^2}\left(\frac{e^{t^2}}{2} + c\right) = \frac{1}{2} + ce^{-t^2}$$

dove c è una arbitraria costante reale.

b) Determinazione della costante c che risolve il problema di Cauchy. Deve essere $y(1) = 2$ per cui c deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{2} + ce^{-1^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3e}{2}.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3e}{2}\, e^{-t^2}$$

ed è definita su $\mathbb{R}$. □

1.3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sono del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{1.3}$$

dove $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $f(t)$ sono funzioni assegnate; $f(t)$ è detta forzante o termine forzante. L'equazione differenziale è detta omogenea se $f(t) = 0$. La nuova equazione differenziale che si ottiene imponendo $f(t) = 0$ è detta omogenea associata alla (1.3).

La soluzione dell'equazione differenziale (1.3) può essere espressa come

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) \tag{1.4}$$

dove $y_o(t)$ è la soluzione generale dell'omogenea associata ed $y_p(t)$ è una soluzione qualsiasi di (1.3) detta integrale particolare. A sua volta, $y_o(t)$ si può esprimere come

$$y_o(t) = C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t)$$

dove C_1, C_2 sono arbitrarie costanti reali e $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono soluzioni (linearmente indipendenti) dell'omogenea associata ossia tali che il determinante $W(t)$ (detto wronskiano)

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t) \neq 0.$$

Vedremo nel prossimo paragrafo come sia possibile trovare $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ nel caso in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono costanti.

Una soluzione particolare $y_p(t)$ si può ottenere da $y_o(t)$ mediante il metodo di variazione delle costanti: dette $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata, poniamo

$$y_p(t) = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t)$$

e cerchiamo due funzioni $C_1(t)$ e $C_2(t)$ tali che l'equazione differenziale (1.3) sia soddisfatta. Poiché $C_1(t)$ e $C_2(t)$ possono essere qualsiasi, imponiamo loro, al fine di semplificare i conti, l'ulteriore restrizione

$$C_1'(t) \cdot y_1(t) + C_2'(t) \cdot y_2(t) = 0.$$

Derivando due volte $y_p(t)$ e tenendo conto della restrizione adottata si ottiene

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= C_1'(t) \cdot y_1(t) + C_1(t) \cdot y_1'(t) + C_2'(t) \cdot y_2(t) + C_2(t) \cdot y_2'(t) \\ &= C_1(t) \cdot y_1'(t) + C_2(t) \cdot y_2'(t) \end{aligned}$$

e

$$y_p''(t) = C_1'(t) \cdot y_1'(t) + C_1(t) \cdot y_1''(t) + C_2'(t) \cdot y_2'(t) + C_2(t) \cdot y_2''(t)$$

che sostituite nella equazione differenziale di partenza (1.3) danno

$$\begin{aligned} & a_2(t) \cdot [C_1'(t) \cdot y_1'(t) + C_1(t) \cdot y_1''(t) + C_2'(t) \cdot y_2'(t) + C_2(t) \cdot y_2''(t)] + \\ + \quad & a_1(t) \cdot [C_1(t) \cdot y_1'(t) + C_2(t) \cdot y_2'(t)] + a_0(t) \cdot [C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t)] = f(t) \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} & C_1'(t) \cdot a_2(t) \cdot y_1'(t) + C_2'(t) \cdot a_2(t) \cdot y_2'(t) + \\ + \quad & C_1(t) \cdot [a_2(t) \cdot y_1''(t) + a_1(t) \cdot y_1'(t) + a_0(t) \cdot y_1(t)] + \\ + \quad & C_2(t) \cdot [a_2(t) \cdot y_2''(t) + a_1(t) \cdot y_2'(t) + a_0(t) \cdot y_2(t)] = f(t) \end{aligned}$$

Ora, $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ sono, per ipotesi, soluzioni dell'omogenea associata per cui i termini entro le due parentesi quadre sono nulli. Dunque, si ottiene

$$C_1'(t) \cdot a_2(t) \cdot y_1'(t) + C_2'(t) \cdot a_2(t) \cdot y_2'(t) = f(t)$$

che, aggiunta alla restrizione, forma un sistema di due equazioni nelle due incognite $C_1'(t)$ e $C_2'(t)$

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot y_1(t) & + & C_2'(t) \cdot y_2(t) & = & 0 \\ C_1'(t) \cdot y_1'(t) & + & C_2'(t) \cdot y_2'(t) & = & \frac{f(t)}{a_2(t)} \end{cases}$$

Questo sistema, che può essere risolto con la regola di Cramer, ha sicuramente soluzione dato che il determinante dei coefficienti è lo wronskiano W. Una volta che sono state determinate $C_1'(t)$ e $C_2'(t)$ risolvendo il sistema, si ricavano $C_1(t)$ e $C_2(t)$ mediante integrazione:

$$C_1(t) = \int C_1'(t)dt, \qquad C_2(t) = \int C_2'(t)dt.$$

Osservazione 1.1 *L'aggettivo lineari dato a questo genere di equazioni è dovuto al seguente aspetto: se $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata,* *allora anche* $y_{12}(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ *(combinazione lineare di* $y_1(t)$ *ed* $y_2(t)$*) è soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata. Infatti abbiamo*

$$y'_{12}(t) = \alpha_1 y'_1(t) + \alpha_2 y'_2(t), \qquad y''_{12}(t) = \alpha_1 y''_1(t) + \alpha_2 y''_2(t)$$

per cui sostituendo risulta

$$\begin{array}{rcl} a_2(t)y''_{12}(t) + a_1(t)y'_{12}(t) + a_0(t)y_{12}(t) & = & a_2(t)[\alpha_1 y''_1(t) + \alpha_2 y''_2(t)] \\ & + & a_1(t)[\alpha_1 y'_1(t) + \alpha_2 y'_2(t)] \\ & + & a_0(t)[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] \\ & = & \alpha_1[a_2(t)y''_1(t) + a_1(t)y'_1(t) + a_0(t)y_1(t)] \\ & + & \alpha_2[a_2(t)y''_2(t) + a_1(t)y'_2(t) + a_0(t)y_2(t)] \\ & = & \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

dato che i termini entro parentesi quadre sono nulli dato che $y_1(t)$ *ed* $y_2(t)$ *sono soluzioni dell'equazione differenziale* $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$.

Osservazione 1.2 (Principio di sovrapposizione degli effetti) *Sia* $y_1(t)$ *soluzione dell'equazione differenziale lineare*

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f_1(t)$$

con forzante $f_1(t)$ *ed* $y_2(t)$ *soluzione della medesiama equazione differenziale*

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f_2(t)$$

ma con forzante $f_2(t)$*. Allora,* $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ *è soluzione di*

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = \alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t).$$

Quindi, la soluzione che si ha applicando una combinazione lineare delle forzanti è l'analoga combinazione lineare delle soluzioni ottenute con le singole forzanti.

La dimostrazione è una semplice verifica: siano

$$y_1(t) = y_o(t) + y_{f1}(t) \qquad e \qquad y_2(t) = y_o(t) + y_{f2}(t)$$

le soluzioni con la prima e la seconda forzante, rispettivamente. Allora, abbiamo

$$\begin{array}{rl} & a_2(t)[\alpha_1 y''_1(t) + \alpha_2 y''_2(t)] + a_2(t)[\alpha_1 y'_1(t) + \alpha_2 y'_2(t)] + a_0(t)[\alpha_1 y'_1(t) + \alpha_2 y'_2(t)] \\ = & \alpha_1[a_2(t)y''_1(t) + a_1(t)y'_1(t) + a_0(t)y_1(t)] \\ + & \alpha_2[a_2(t)y''_2(t) + a_1(t)y'_2(t) + a_0(t)y_2(t)] \\ = & \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t). \end{array}$$

1.3.1 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Il calcolo di due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ non è in generale agevole. Fa eccezione il caso in cui i coefficienti sono costanti ossia

$$a_2(t) = a_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a_1(t) = a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_0(t) = a_0 \in \mathbb{R}.$$

In questo caso si può dimostrare il seguente

Teorema 1.1 *Si consideri l'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti*

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Detta

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

l'equazione (algebrica) caratteristica associata, due soluzioni linearmente indipendenti sono

- $\Delta > 0$*: siano* λ_1 *e* λ_2 *le due soluzioni dell'equazione caratteristica. Allora, è*

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t}, \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 \cdot t}$$

- $\Delta = 0$*: sia* λ *la soluzione dell'equazione caratteristica. Allora, è*

$$y_1(t) = e^{\lambda \cdot t}, \qquad y_2(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

- $\Delta < 0$*: siano* $\alpha \pm i\omega$ *le due soluzioni complesse (coniugate) dell'equazione caratteristica, ossia*

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}.$$

  Allora, è

$$y_1(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega t), \qquad y_2(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$$

dove $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0$ *è il discriminante.*

Dim. Omessa. □

Esempio 1.10 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale omogenea di secondo ordine a coefficienti costanti con $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = 2$. L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

che ha

$$\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0 = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$$

per cui ci sono due soluzioni reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a_2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \lambda_2 & = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

Dunque, la soluzione generale ha la forma

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-2t}$$

con C_1, C_2 costanti reali arbitrarie. □

Esempio 1.11 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti con $a_2 = 1$, $a_1 = -2$, $a_0 = 5$. L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

che ha $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$. Dunque, ci sono due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\,\omega$ con α, ω reali che valgono

$$\alpha = \frac{-a_1}{2a_2} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1, \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a_2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Quindi, la soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(t) = C_1 e^{\alpha \cdot t} \cos(\omega t) + C_2 e^{\alpha \cdot t} \sin(\omega t) = C_1 e^t \cos(2t) + C_2 e^t \sin(2t)$$

con C_1 eC_2 costanti reali arbitrarie. $\square$

Esempio 1.12 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Poiché si tratta di un problema di Cauchy, procediamo in due passi.

a) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione differenziale. Si tratta di un'equazione differenziale non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti con $a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_0 = 1$ e $f(t) = t$. Troviamo l'integrale generale dell'equazione differenziale in due passi.

  – Soluzione generale $y_o(t)$ dell'omogenea associata $y'' + 2y' + y = 0$. L'equazione caratteristica è
  $$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
  che ha $\Delta = 0$ per cui l'unica soluzione è $\lambda = -1$. Quindi, la soluzione generale è
  $$y_o(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$
  con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie.

  – Soluzione particolare $y_p(t)$. Utilizzando il metodo di variazioni delle costanti, il sistema da risolvere è
  $$\begin{cases} C_1'(t) \cdot e^{-t} & + & C_2'(t) \cdot te^{-t} & = & 0 \\ -C_1'(t) \cdot e^{-t} & + & C_2'(t) \cdot (1-t)e^{-t} & = & t \end{cases}$$
  Lo wrosnskiano vale
  $$\begin{aligned} W &= \det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = \left[e^{-t} \cdot (1-t)e^{-t}\right] - \left[-e^{-t} \cdot te^{-t}\right] \\ &= e^{-2t} \end{aligned}$$
  Quindi, il metodo di Cramer fornisce

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{1}{W} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & te^{-t} \\ t & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-2t}} \cdot \left\{ \left[0 \cdot (1-t)e^{-t}\right] - \left[t \cdot te^{-t}\right] \right\} \\ &= -t^2 \cdot e^{2t} \cdot e^{-t} = -t^2 e^t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2'(t) &= \frac{1}{W} \cdot \det \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} & t \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-2t}} \cdot \left\{ \left[e^{-t} \cdot t\right] - \left[e^{-t} \cdot 0\right] \right\} \\ &= te^t \end{aligned}$$

Quindi, integrando per parti abbiamo

$$C_1(t) = \int -t^2 e^t dt = -(t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$C_2(t) = \int te^t dt = (t-1)e^t$$

In conclusione, la soluzione particolare $y_p(t)$ è

$$\begin{aligned} y_p(t) &= C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t) = (-t^2 + 2t - 2)e^t \cdot e^{-t} + (t-1)e^t \cdot te^{-t} \\ &= -t^2 + 2t - 2 + t^2 - t = t - 2 \end{aligned}$$

Infine, la soluzione generale dell'equaione differenziale $y'' + 2y' + y = t$ è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + t - 2$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie.

b) Determiniamo le costanti C_1 e C_2 che risolvono il problema di Cauchy. Dalla soluzione generale risulta

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2(1-t)e^{-t} + 1$$

per cui le condizioni del problema di Cauchy impongono che le costanti C_1 e C_2 debbano soddisfare le seguenti due condizioni

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot e^{-0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} + 0 - 2 = C_1 - 2 = 0$$

e

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C_1 \cdot e^{-0} + C_2 \cdot (1-0) \cdot e^{-0} + 1 = -C_1 + C_2 + 1 = 0$$

Le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente per cui si ottiene il sistema lineare di due equazioni nelle incognite C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1 & & = & 2 \\ -C_1 & +C_2 & = & -1 \end{cases}$$

che risolto dà $C_1 = 2$ e $C_2 = 1$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2 = (t+2)e^{-t} + t - 2$$

che vive su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Come possiamo vedere dall'ultimo esempio, la ricerca di una soluzione particolare mediante il wronskiano è laboriosa. Illustriamo una alternativa per calcolare $y_p(t)$ nel caso in cui $f(t)$ sia esprimibile come

$$f(t) = P_n(t) \cdot e^{\mu t} \cdot \cos(\nu t) \qquad \text{oppure} \qquad f(t) = P_n(t) \cdot e^{\mu t} \cdot \sin(\nu t)$$

dove $P_n(t)$ è un polinomio di grado $n \geq 0$, $\mu, \phi \in \mathbb{R}$ con $\nu \geq 0$. Si può dimostrare che la soluzione particolare ha la forma

$$y_p(t) = t^m \cdot e^{\mu t} \cdot [\, Q_n(t) \cos(\nu t) + R_n(t) \sin(\nu t) \,]$$

con $Q_n(t)$ e $R_n(t)$ polinomi di grado n (da determinarsi) e dove $m = 0$ tranne che nei seguenti casi

- m=1: si verifica uno dei seguenti due casi
  - a) $\Delta > 0$, $\nu = 0$ e μ coincide con una delle due radici della equazione caratteristica.
  - b) $\Delta < 0$, $\mu = \alpha$ e $\nu = \omega$ dove $\alpha \pm i\omega$ sono le due radici complesse coniugate della equazione caratteristica.
- m=2: $\Delta = 0$, $\nu = 0$ e μ coincide con la radice della equazione caratteristica.

Esempio 1.13 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + y' - 2y = te^t$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti. La soluzione $y_o(t)$ dell'omogenea associata $y'' + y' - 2y = 0$ si ottiene facilmente a partire dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

per cui si ottiene

$$y_o(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie. Troviamo una soluzione particolare mediante lo schema appena illustrato. Nel caso in esame possiamo pensare la forzante $f(t)$ come

$$f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos(\, 0 \cdot t \,) \qquad \text{per cui è} \qquad P_1(t) = t, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0;$$

quindi siamo nel caso $\Delta > 0$ con $\mu = \lambda_1$ e la soluzione particolare va ricercata del tipo

$$y_p(t) = t(A_1 t + A_0)e^t = (A_1 t^2 + A_0 t)e^t$$

con A_1 ed A_0 costanti reali da determinarsi imponendo che $y_p(t)$ soddisfi l'equazione differenziale data. Abbiamo

$$y_p'(t) = (2A_1 t + A_0) \cdot e^t + (A_1 t^2 + A_0 t)e^t = [\, A_1 t^2 + (A_0 + 2A_1)t + A_0 \,]e^t$$

e

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= [\, 2A_1 t + (A_0 + 2A_1) \,]e^t + [\, A_1 t^2 + (A_0 + 2A_1)t + A_0 \,]e^t \\ &= [\, A_1 t^2 + (4A_1 + A_0)t + (2A_0 + 2A_1) \,]e^t \end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione differenziale data si ottiene

$$\begin{aligned}
& [\,A_1t^2+(4A_1+A_0)t+(2A_0+2A_1)\,]e^t+[\,A_1t^2+(A_0+2A_1)t+A_0\,]e^t\\
- \quad & 2(A_1t^2+A_0t)e^t=te^t
\end{aligned}$$

che, dopo aver semplificato il fattore e^t, equivale a

$$(A_1+A_1-2A_1)t^2+(4A_1+A_0+A_0+2A_1-2A_0)t+(2A_0+2A_1+A_0)=t$$

Quindi, per il principio di identità dei polinomi, le costanti A_1 e A_0 devono soddisfare il sistema lineare

$$\begin{cases} 6A_1 & & = & 1\\ 2A_1 & +3A_0 & = & 0\end{cases}$$

che risolto dà $A_1=1/6$, $A_0=-1/9$. Dunque, la soluzione particolare cercata è

$$y_p(t)=\left(\frac{t^2}{6}-\frac{t}{9}\right)e^t.$$

Infine, la soluzione generale delle'equazione è

$$y(t)=y_o(t)+y_p(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}+\left(\frac{t^2}{6}-\frac{t}{9}\right)e^t$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie. □

Nel caso in cui la funzione $f(t)$ sia esprimibile come più termini del tipo considerato una soluzione particolare si ottiene sommando le soluzioni particolari relative a ciascun termine.

Esempio 1.14 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''+y'=1+2\cos(t)\\ y(0)=1\\ y'(0)=2\end{cases}$$

Soluzione. L'omogenea associata è $y''+y'=0$ che ha equazione caratteristica $\lambda^2+\lambda=0$ che dà $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=-1$. La soluzione $y_o(t)$ è quindi

$$y_o(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}=C_1+C_2e^{-t}$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie. La $f(t)$ è la somma di due termini ciascuno dei quali inquadrabile nello schema, ossia $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ con $f_1(t)=1$, $f_2(t)=\cos(t)$. E' per $f_1(t)$

$$f_1(t)=1=1\cdot e^{0\cdot t}\cdot\cos(0\cdot t)\qquad\Rightarrow\qquad P_0(t)=1,\ \mu=0,\ \nu=0$$

Essendo $\Delta>0$ e $\mu=\lambda_1$ cerchiamo una soluzione particolare $y_{p,1}(t)$ del tipo

$$y_{p,1}(t)=t\cdot A$$

dove $A\in\mathbb{R}$ è da determinarsi imponendo che $y_{p,1}(t)$ sia soluzione della equazione differenziale con il solo $f_1(t)$ a secondo membro. Abbiamo

$$y'_{p,1}(t)=A,\quad y''_{p,1}(t)=0$$

per cui sostituendo risulta

$$0+A=1$$

che porge $A = 1$. Quindi, risulta $y_{p,1}(t) = t$.

Consideriamo ora l'altro addendo $f_2(t)$; è

$$f_2(t) = \cos(t) = 1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(1 \cdot t) \quad \Rightarrow \quad P_0(t) = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 1$$

per cui cerchiamo una soluzione del tipo

$$y_{p,2}(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

con A, B costanti reali da determinarsi imponendo che $y_{p,2}(t)$ sia soluzione dell'equazione differenziale data quando il secondo membro è il solo $f_2(t)$. Risulta

$$y'_{p,2}(t) = -A\sin(t) + B\cos(t), \qquad y''_{p,2}(t) = -A\cos(t) - B\sin(t)$$

che sostituite danno

$$[\,-A\cos(t) - B\sin(t)\,] + [\,-A\sin(t) + B\cos(t)\,] = 2\cos(t)$$

ossia

$$(-A + B)\cos(t) + (-B - A)\sin(t) = 2\cos(t)$$

che dà il sistema lineare

$$\begin{cases} -A & +B & = & 2 \\ -A & -B & = & 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -1$, $B = 1$. Pertanto, è

$$y_{p,2}(t) = -\cos(t) + \sin(t)$$

In definitiva, una soluzione particolare per $f(t)$ è

$$y_p(t) = y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = t - \cos(t) + \sin(t).$$

Siamo ora in grado di scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + t - \cos(t) + \sin(t)$$

con C_1, C_2 costanti reali arbitrarie.

Possiamo, a questo punto, risolvere il problema di Cauchy. Le costanti C_1 e C_2 devono essere tali per cui $y(t)$ soddisfa

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 e^{-0} + 0 - \cos(0) + \sin(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 2$$

e

$$y'(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -C_2 e^{-0} + 1 + \sin(0) + \cos(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -C_2 = 0$$

Dovendo essere soddisfatte entrambe, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} C_1 & +C_2 & = & 2 \\ & -C_2 & = & 0 \end{cases}$$

che dà $C_2 = -2$, $C_1 = 2$. Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = 2 + t - \cos(t) + \sin(t)$$

che vive su tutto $\mathbb{R}$.