1. Scrivere i numeri a) $35,89\overline{472}$ b) $0,0000\overline{1}$ c) $0,\overline{123456789}$ d) $11,00\overline{101}$ come frazioni.

2. Dimostrare che la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di due numeri x, y razionali è sempre razionale. Si può dire qualcosa se x e y sono irrazionali?. E se x è razionale e y è irrazionale?

3. Siano $a = 13,34685793, b = 13,34685794$; trovare x razionale ed y irrazionale tali che risulti $a < x < b, a < y < b$.

NOTA: Per gli esercizi 4 a 7 ricordare il
TEOREMA di EUCLIDE. Ogni intero positivo n si può scrivere come prodotto di fattori primi (eventualmente ripetuti). Tale scomposizione è unica.

4. Dimostrare che i numeri $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[9]{9}$ sono irrazionali.

5. Dire se i numeri $\sqrt{7^{77}}$, $\sqrt{6^{77!}}$, $\sqrt[13]{7^{77!}}$ sono irrazionali o meno.

6. Dimostrare che p primo $\Longrightarrow \sqrt{p} \notin$ **N**.

7. Dimostrare che la radice quadrata di un numero intero è intera oppure irrazionale.

8. Verificare che
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = \cdots$
$(a+b)^6 = \cdots$

9. Sia $A > 0$; dimostrare che l'equazione

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

rappresenta:
una circonferenza se $D^2+E^2-4AF > 0$ e trovare il centro ed il raggio della circonferenza in questione;
un solo punto se $D^2 + E^2 - 4AF = 0$ e trovare il punto in questione;
l'insieme vuoto se $D^2 + E^2 - 4AF < 0$.

Suggerimento: completare quadrati.

10. Determinare i seguenti luoghi geometrici:

a) $3x^2 + 3y^2 - 10x + y + 2 = 0$ b) $3x^2 + 3y^2 - 10x + y + \dfrac{303}{36} = 0$
c) $3x^2 + 3y^2 - 10x + y + 20 = 0$

11. Trovare i punti del piano la cui distanza da ciascuno dei due assi coordinati è uguale alla distanza dal punto $(4,2)$.

Risposta: i punti cercati sono $(2,2)$ e $(10,10)$

12. Trovare il punto $P=(x,y)$ equidistante dai tre punti

$$P_1 = (-9,0)\ ,\ P_2 = (6,3)\ , P_3 = (-5,6)\ \ .$$

Risposta: $P=(-1,-1)$.

13. Dimostrare che i punti

$$(0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

sono i vertici di un parallelogramma.

14. Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ l'equazione

$$(1-2k)x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 - k = 0$$

ha radici reali.

Risposta: $k \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

15. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $x^5 - 81x < 0$ b) $\sqrt{2x-3} < 7$ c) $\sqrt[3]{x^3-8} < x-2$ d) $\sqrt{5}+x > \sqrt{4+|1-x^2|}$

Risposte: a) $(-\infty,-3)\cup(0,3)$ b) $(-4,+\infty)$ c) $(0,2)$ d) $(0,+\infty)$

16. Sia $r>0$; dimostrare che

a) $|A(x)| \le r \iff -r \le A(x) \le r$

b) $|A(x)| \ge r \iff A(x) \le -r$ oppure $A(x) \ge r$

17. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $|3x+2|=5$ b) $|5x+4|=x$ c) $|7x|=4-x$ d) $2x+3=|4x+5|$

e) $|3x-2|=-3$ f) $|2x-1|=|4x+3|$ g) $\Big||x|+x\Big|=0$

h) $\Big|x-|x|\Big|=r\ (r>0)$ i) $\left|\Big||x|+x\Big|+x\right|=0$

Risposte: a) $x=1, x=-\dfrac{7}{3}$ b) nessuna soluzione c) $x=\dfrac{1}{2}, x=-\dfrac{2}{3}$ d) $x=-1, x=-\dfrac{4}{3}$

e) nessuna soluzione f)$x=-2, x=-\dfrac{1}{3}$ g) $x\leq 0$ h) $x=-\dfrac{r}{2}$ i) $x=0$

18. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $|x-5|<4$ b) $|3x+2|\leq 5$ c) $|9-2x|\leq 4$

Risposte: a) $1<x<9$ b) $x\leq -\dfrac{7}{3}$ oppure $x\geq 1$ c) $x\leq \dfrac{5}{2}$ oppure $x\geq \frac{13}{2}$

19. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right|\leq 1$ b) $\left|\dfrac{3x-2}{2+x}\right|\leq 4$ c) $\dfrac{|4-3x|}{3-|3x|}>0$

Risposte: a) $\dfrac{9}{11}<x<\dfrac{5}{3}$ b) $x\leq -10$ oppure $x\geq -\dfrac{6}{7}$ c) $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{2}{3}$

20. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n\geq 2$; dimostrare che x_0 è una radice di $P(x)$ se e soltanto se $P(x)$ è divisibile per $x-x_0$.

21. Scrivere il polinomio $P(x)=1-x^6+3x^4-3x^2$ come prodotto di 6 polinomi di grado 1.

22. Fattorizzare il polinomio $P(x)=3x^5-27x$

23. Scrivere il polinomio x^4-81 come prodotto di due polinomi reali di grado 2.
Suggerimento: ricordare che $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

24. Dimostrare o smentire la seguente affermazione: se $P(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ha come radici $x_1, x_2, \cdots, x_n$, allora

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right) \quad .$$

25. Dimostrare che il principio di incastro è falso in $\mathbf{Q}$.

Suggerimento: ragionare su approssimazioni razionali per difetto ed eccesso di $\sqrt{2}$.

26. Dimostrare che la proprietà di ARCHIMEDE è conseguenza dell'esistenza di estremo superiore.

Suggerimento: Sia $a > 0$; supponendo per assurdo che

$$A = \{a, 2a, 3a, 4a, \cdots\} = \{na : n \in \mathbf{N}\}$$

sia superiormente limitato, ragionare su $s = \sup A$.

27. Dimostrare il principio di induzione:

Sia $\mathcal{A}(n), n \in \mathbf{N}$, un'affermazione che dipende da $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}(1) \text{ vera} \\ \\ \mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1) \end{array}\right] \implies \mathcal{A}(n) \text{ è vera } \forall\, n \in \mathbf{N} \quad .$$

Suggerimento: Supponendo che sia

$$F = \{n \in \mathbf{N} : \mathcal{A}(n) \text{ è falsa}\} \neq \emptyset \quad ,$$

ragionare su $\xi = \inf F$.

28. Dimostrare le seguenti uguaglianze per induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

29. Dimostrare per induzione la disuguaglianza di BERNOULLI:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\, x \geq -1 \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$$

30. Trovare (se esiste) il più piccolo $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che sia

$$10n \leq 2^n \;\; \forall\, n \geq n_0$$

Risposta: $n_0 = 6$

31. Trovare (se esiste) il più piccolo $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che sia

$$100n \leq 2^n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Risposta: $n_0 = 10$

32. Trovare (se esiste) il più piccolo $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che sia

$$1000n \leq 2^n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Risposta: $n_0 = 14$

33. Trovare (se esiste) il più piccolo $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che sia

$$10000n \leq 2^n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Risposta: $n_0 = 18$

34. Dimostrare che

a) $2^n \geq n^3 \ \ \forall\, n \geq 10$ b) $2^n \geq n^4 \ \ \forall\, n \geq 16$ c) $3^n \geq n2^n \ \ \forall\, n \geq 1$

d) $3^n \geq n^3 \ \ \forall\, n \geq 1$ d) $1^n \geq (n + 10^6)^2 \ \ \forall\, n \geq 13.$

35. Dimostrare o smentire le seguenti affermazioni:

a) $10^n \geq 10n^2 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ b) $10^n \geq 10n^3 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ c) $10^n \geq 10n^4 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$

Suggerimento: se si ha un pò di sale in zucca, si comincia dalla c)

36. Trovare (se esiste) il più piccolo $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{3}{2}n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Risposta: $n_0 = 5$

37. Dimostrare per induzione che

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

38. Dimostrare che

a) $n! > 2^n$ a partire da $n_0 = ?$
b) $n! > 3^n$ a partire da $n_0 = ?$
c) $n! > 4^n$ a partire da $n_0 = ?$

Risposta: a) $n_0 = 4$ b) $n_0 = 7$ c) $n_0 = 9$

39. Calcolare

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{100} \frac{1}{10^k} \quad \text{b) } \sum_{k=10}^{1000} \frac{1}{10^k} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2^{k-10}} \quad \text{d) } \sum_{k=10}^{1000} \frac{1}{2^{k-10}} \quad \text{e) } \sum k = 1^k(k+1)(k+2)$$

$$\text{f) } \sum_{k=9}^{20} k(k+1)k+2) \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{n} k!k$$

Risposte: a) $\dfrac{10^{101}-1}{9 \cdot 10^{100}} = 1,\underbrace{11\cdots1}_{100}$ b) $0,\underbrace{0\cdots0}_{9}\underbrace{11\cdots1}_{991}$ c) $2^{10}\left(1 - \dfrac{1}{2^{100}}\right)$

d) $2 - \dfrac{1}{2^{990}}$ e) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ f) 45210

g) $(n+1)! - 1$ Suggerimento: osservare che $k!k = (k+1)! - k!$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k!k = \sum_{k=1}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!.$$

40. Trovare sup e inf dei seguenti insiemi e dire se sono massimi e minimi:

a) $A = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1000}{n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}$ b) $A = \left\{\dfrac{40n}{64+n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}$

c) $A = \{2^n - 100n : n \in \mathbf{N}\}$ d) $A = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n}{100} : n \in \mathbf{N}\right\}$

e) $A = \left\{n^3 + \dfrac{8000}{n^3} : n \in \mathbf{N}\right\}$ f) $A = \left\{n^2 + \dfrac{8100}{n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}$

Suggerimento: studiare le zone di crescenza e decrescenza delle successioni coinvolte.

Risposte: a) $\sup A = a_{2000} = \frac{1}{4000} = \max A$, $\inf A = a_1 = -999 = \min A$

b) $\sup A = a_8 = \frac{5}{2} = \max A$, $\inf A = 0$, non esiste $\min A$

c) $\inf A = a_7 = -572 = \min A$, $\sup A = +\infty$, non c'è massimo.

d) $\inf A = a_6 = \frac{1}{64} + \frac{1}{100} = \min A$, $\sup A = +\infty$, non c'è massimo.

e) $\inf A = a_4 = a_5 = 189 = \min A$, $\sup A = +\infty$, non c'è massimo.

f) $\inf A = a_9 = a_{10} = 181 = \min A$, $\sup A = +\infty$, non c'è massimo.

ERRATA CORRIGE

La risposta corretta all'esercizio 14 è $k \in [-1/2, 2] \cup \{1/2\}$.

Libro di testo
pagina 9, terza riga dal basso: al posto di $(1+v)$ va $(1+\varepsilon)$.
pagina 11, dodicesima riga dal basso: al posto di $0 \le |L_1 - L_2| < \varepsilon$ va $0 \le |L_1 - L - 2| < 2\varepsilon$
pagina 11, nonna riga dal basso: al posto di $a_n \ge 0$ va $a_n > 0$.
pagina 11, sesta riga dal basso: al posto di $|a_n - L| \ge \dfrac{L}{2}$ va $|a_n - L| \le \dfrac{L}{2}$
pagina 15, esercizio 1.5 b): al posto di $\exists\ \lim_n b_n$ va $\nexists\ \lim_n b_n$
pagina 15, esercizio 1.5 c): al posto di $\nexists\ \lim_n b_n$ va $\exists\ \lim_n b_n$
pagina 21, penultima riga: al posto di $\forall\ n \in \mathbf{N}$ va $\forall\ n \in \mathbf{N}, n > 1$.
pagina 22, sesta riga riga: al posto di $\forall\ n \in \mathbf{N}$ va $\forall\ n \in \mathbf{N}, n > 1$.

41. Dimostrare che la successione $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ è strettamente decrescente.

42. Sia $p > 0$; determinare il luogo geometrico di tutti i punti (x, y) del piano che sono equidistanti dal punto $F = (0, p)$ e dalla retta orizzontale di equazione $y = -p$.

Risposta: Si tratta della parabola di equazione $y = \dfrac{x^2}{4p}$; il punto $F = (0, p)$ si chiama **fuoco** della parabola, la retta $y = -p$ **direttrice** della parabola.

43. Completare le frasi seguenti:
a) (a, b) e $(a, -b)$ sono simmetrici rispetto a $\cdots$
b) (a, b) e $(-a, b)$ sono simmetrici rispetto a $\cdots$
c) (a, b) e $(-a, -b)$ sono simmetrici rispetto a $\cdots$
d) (a, b) e (b, a) sono simmetrici rispetto a $\cdots$

44. Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$, trovare le coordinate del punto $P = (x, y)$ tale che

$$\mathrm{dist}(P_1, P) = \frac{1}{3}\mathrm{dist}(P_1, P_2) \quad , \quad \mathrm{dist}(P_2, P) = \frac{2}{3}\mathrm{dist}(P_1, P_2)$$

Risposta: $x = \dfrac{2x_1 + x_2}{3}$, $y = \dfrac{2y_1 + y_2}{3}$.

45. Dimostrare che in un triangolo il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e la sua lunghezza è metà di quella del terzo lato.

Suggerimento: è molto facile se si sceglie il sistema di riferimento di modo che i vertici del triangolo siano $(0, 0), (a, 0), (b, c)$

46. Dimostrare che il punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equidistante dai vertici del triangolo.

Suggerimento: scegliere il sistema di riferimento di modo che i vertici del triangolo siano $(0,0),(b,0),(0,c)$.

47. Dimostrare che le diagonali di un parallelogramma si intersecano nel loro punto medio.

Suggerimento: scegliere il sistema di riferimento di modo che i vertici del parallelogramma siano $(0,0),(x_1,0),(x_2,y_2),(x_3,y_2)$

48. Dimostrare che la somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati di ciascun lato.

Suggerimento: scegliere il sistema di riferimento come nell'esercizio precedente.

49. Le **mediane** di un triangolo sono i segmenti che uniscono ogni vertice con il punto medio del lato opposto. Siano $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ i vertici del triangolo. Trovare il punto di ogni mediana che è a $2/3$ della distanza del vertice dal punto medio del lato opposto. Farlo per ogni mediana e verificare che i punti coincidono e hanno coordinate date da

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad , \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \quad .$$

Quindi, le tre mediane di un triangolo si intersecano in un punto.

50. Dire quale fra le seguente possibilità è vera, dimostrando ciò che si afferma:

a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n+1]{n+1} \;\; \forall\, n \geq n_0$

b) $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \;\; \forall\, n \geq n_0$

c) nessuna delle possibilità a), b) è verificata.

Suggerimento: tenere conto che $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2 \;\; \forall n \in \mathbf{N}, n > 1$, come dimostrato nel libro di testo, pagina 22

51. Dimostrare, usando la definizione, che la successione

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2k-1 \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

non ha limite.

52. Dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left| \frac{n^2}{4n^2+1} - \frac{1}{4} \right| \leq \varepsilon \;\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad .$$

Concludere che $\lim\limits_n \dfrac{n^2}{4n^2+1} = \dfrac{1}{4}$.

53. Dimostrare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left|\frac{n+5}{n^2-8}\right| \le \varepsilon \quad \forall\ n \ge \varepsilon \quad .$$

Concludere che $\lim_n \frac{n+5}{n^2-8} = 0$.

54. Dimostrare, usando la definizione, che

$$\lim_n \frac{3n^2-8}{10n^2+5} = \frac{3}{10}$$

55. Dimostrare, usando la definizione, che

$$\lim_n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

56. Calcolare

$$\text{a)} \lim_n \left(\sqrt{n^3+n} - n\right) \qquad \text{b)} \lim_n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \qquad \text{c)} \lim_n \left(\sqrt{2n} - n\right)$$

Risposte: a) $+\infty$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) 0

57. Calcolare, al variare di $p \in \mathbf{R}$,

$$\text{a)} \lim_n n^p \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad \text{b)} \lim_n n^p \left(\sqrt{n^8+n^3} - n^4\right) \quad \text{c)} \lim_n \left(\sqrt{n^p+n} - n\right)$$

$$\text{d)} \lim_n \left(\sqrt[p]{2n} - \sqrt[p]{2n-1}\right) \quad (p \in \mathbf{N}) \qquad \text{e)} \lim_n \frac{1}{n^p} \left(\sqrt{n^4+n^3+n} - n^2\right)$$

Risposte: a) $+\infty$ se $p > 1$, $\frac{1}{2}$ se $p = 1$, 0 se $p < 1$
b) $+\infty$ se $p > 1$, $\frac{1}{2}$ se $p = 1$, 0 se $p < 1$ c) $+\infty$ se $p > 2$, $\frac{1}{2}$ se $p = 2$, $-\infty$ se $p < 2$
d) 1 se $p = 1$, 0 se $p \ge 2$. Suggerimento: verificare che

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \quad ,$$

e porre $x = \sqrt[p]{2n}$, $y = \sqrt[p]{2n-1}$
e) 0 se $p > 1$, $\frac{1}{2}$ se $p = 1$, $+\infty$ se $p < 1$.

58. Calcolare

$$\text{a)} \lim_n \frac{n^3+3n+1}{2^n} \quad \text{b)} \lim_n \frac{2^n-3^n}{1+3^n} \quad \text{c)} \lim_n \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2} \quad \text{d)} \lim_n \sqrt[n]{2^n+n} \quad \text{e)} \lim_n \frac{2^n}{\alpha^{n^2}} \quad (\alpha > 0)$$

Risposte: a) 0 b) -1 c) 0. Suggerimento: dimostrare che $\frac{n^3}{3^n} \leq \frac{1}{n}$ $\forall\, n \geq 8$

d) 2 e) $+\infty$ se $0 < \alpha \leq 1$, 0 se $\alpha > 1$. Suggerimento: $\dfrac{2^n}{\alpha^{n^2}} = \left(\dfrac{2}{\alpha^n}\right)^n$.

59. Sapendo che $\lim_n a_n = 0$, calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_n \frac{\left|\sqrt{1+a_n}-1\right|}{|a_n|^\alpha} \quad , \quad (a_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N})$$

Risposta: 0 se $\alpha < 1$, $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$, $+\infty$ se $\alpha > 1$.

60. Dimostrare che

$$a_n > 0 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}\ , \ \lim_n a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \frac{\sqrt{a_n}}{1-\sqrt{1+a_n}} = -\infty$$

61. Dimostrare che

$$\lim_n a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \left(\sqrt{a_n^2+a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2}$$

62. Sia $\varepsilon > 0$; dimostrare che esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left|\sqrt[n]{10}-1\right| \quad \forall\, n \geq \in_\varepsilon \quad .$$

$$\text{d)} \lim_n n^2 \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \qquad \text{e)} \lim_n \left(n\sqrt{n^2+1}-n\right) \qquad \text{f)} \lim_n \sqrt{n}\left(n^2+1-n\right)$$

Suggerimento: ricordare che $(1+\varepsilon)^n \geq n\varepsilon$.

63. Dimostrare che $\lim\limits_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Suggerimento: dimostrare prima che $(1+\varepsilon)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.

64. Calcolare

$$\text{a)} \lim_n \sqrt[n]{7^n+n^7} \quad \text{b)} \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{7^n}+n^7} \quad \text{c)} \lim_n \left(7+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{d)} \lim_n \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{e)} \lim_n \sqrt[n]{2^n+n^2} \quad \text{f)} \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+n^2} \quad \text{g)} \lim_n \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{h)} \lim_n \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$$

a) 7 b) 1 c)$+\infty$ d) 0 e) 2 f) 1 g) $+\infty$ h) 0

65. Calcolare $\lim_n \dfrac{a^n - 10^n}{a^n + 10^n}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

Risposta: 1 se $|a| > 10$, -1 se $|a| < 10$, 0 se $a = 10$. La successione non è definita per $a = -10$.

66. Calcolare $\lim_n \left(\dfrac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^2+5}{n-\sqrt{n}}}$

Risposta: 0

67. Calcolare

$$\text{a) } \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^3}{n^2+2}} \qquad \text{b) } \lim_n \sqrt[n]{3\cdot n^{1000}+5} \qquad \text{c) } \lim_n \sqrt[n]{3^n+n^{1000}}$$
$$\text{d) } \lim_n \sqrt[n]{n^2+2^n+10^n} \qquad \text{e) } \lim_n \sqrt[n]{1+2n+3n^2+4n^3} \qquad \text{f) } \lim_n \sqrt[n]{10^n+n^{5000}}$$

Risposte: a) 1 b) 1 c) 3 d) 10 e) 1 f) 10

68. Calcolare, al variare di $a \geq 0$, $\lim_n (a^n + 10^n)^{\frac{1}{n}}$.

Risposta: a se $a > 1$, 1 se $0 \leq a \leq 1$

69. Calcolare

$$\text{a) } \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} \qquad \text{b) } \lim_n \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{5n} \qquad \text{c) } \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \text{d) } \lim_n \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}$$
$$\text{d) } \lim_n \left(\frac{n^4+1}{n^4}\right)^{n} \qquad \text{f) } \lim_n \left(\frac{n^4+1}{n^3}\right)^{n} \qquad \text{g) } \lim_n \left(\frac{n^4+1}{n^5}\right)^{n} \qquad \text{h) } \lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Risposte: a) e^5 b) $e^{\frac{5}{3}}$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) 1 f) $+\infty$ g) 0 h) $\frac{1}{e}$

70. Calcolare $\lim_n \left(\dfrac{an+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}\right)^{n}$ al variare di $a > 0$.

Risposta: Se $a \geq 2$ il limite è $+\infty$, se $0 < a < 2$ il limite è 0.

71. Calcolare

$$\text{a) } \lim_n \left(\frac{n^3-2n+1}{n^3+n^2}\right)^{\frac{2n^2+1}{n-3}} \qquad \text{b) } \lim_n \left(1-\frac{3\sqrt{n}}{1+n}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \text{c) } \lim_n \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{10n}$$
$$\text{d) } \lim_n \left(1+\frac{1}{10n}\right)^{19n} \qquad \text{e) } \lim_n \left(1+\frac{1}{17n}\right)^{33n} \qquad \text{f) } \lim_n \left(1+\frac{1}{7n}\right)^{22n} \qquad \text{g) } \lim_n \left(\frac{n+11}{n+1}\right)^{n}$$

Risposte: a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e^3}$ c) $e^{\frac{10}{3}}$ d) $e^{\frac{19}{10}}$ e) $e^{\frac{33}{17}}$ f) $e^{\frac{22}{7}}$ g) e^{10}

72. Calcolare, al variare di $p \in \mathbf{R}$,

$$\text{a)} \lim_n \left(\frac{n^2+1}{n^p}\right)^n \quad \text{b)} \lim_n \left(\frac{n^4+1}{n^p}\right)^n \quad \text{c)} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^p} \quad \text{d)} \lim_n \left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n$$

Risposte: a) 1 se $p = 2$, 0 se $p > 2$, $+\infty$ se $p < 2$.
b) 1 se $p = 4$, 0 se $p > 4$, $+\infty$ se $p < 4$
c) $+\infty$ se $p > 1$, e se $p = 1$, 1 se $p < 1$
d) 1 se $p > 1$, e se $p = 1$, $+\infty$ se $p < 1$

73. Dire se esistono (e in caso affermativo calcolarlo) i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_n \left(\sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \quad \text{b)} \lim_n (-1)^n \left(\frac{n-5}{n}\right)^n$$

$$\text{c)} \lim_n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}\right) \quad \text{d)} \lim (-1)^n \left(\frac{n+7}{n}\right)^n$$

Risposte: a) 1 b) $\frac{1}{e^5}$ c) non esiste d) non esiste

74. Calcolare $\lim_n \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}$.

Risposta: 1. Suggerimento: tenere conto che $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ e quindi $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

75. Dimostrare che

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = +\infty \quad \text{e che} \quad \lim_n \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \leq 1$$

Suggerimento: Per il primo limite si noti che, posto $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$, risulta $a_{2^n-1} > \frac{n}{2}$ $\forall$ $n \in \mathbf{N}$.
Per il secondo limite si noti invece che $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ $\forall$ $n \geq 2$ e quindi

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n} \frac{3}{4} \quad .$$

ERRATA CORRIGE

pagina 16: nella soluzione d) prendere $a_n = (-1)^n + 2$ al posto di $(-1)^n$.
pagina 23, rigo 10 dal basso: al posto di $f(x_2)(\alpha x_1 + \beta x_1 - x_1)$ va $f(x_2)(\alpha x_1 + \beta x_2 - x_1)$
Capitolo II, pagina 10, secondo rigo: al posto di $= \dfrac{1}{n[f(x)]^{\frac{n-1}{n}}}$ va $= \dfrac{f'(x)}{n[f(x)]^{\frac{n-1}{n}}}$.
Esercizio 34, d): al posto di 1^n va 10^n,
Esercizio 39, e): al posto di $\sum k = 1^k(k+1)(k+2)$ va $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

76. Calcolare sup e inf di

$$\text{a) } A = \left\{ \binom{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N} \right\} \qquad \text{b) } A = \left\{ \sqrt[n]{n} \ : \ n \in \mathbf{N} \right\}$$

Risposte: a) $\inf A = 0$, non esiste minimo , $\sup A = \max A = \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$, raggiunto in $n = 4$.

b) $\inf A = 1 = \sqrt[1]{1} = \min A$, $\sup A = \max A = \sqrt[3]{3}$

77. Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni di numeri reali; dimostrare che

a) $\sup\{a_n + b_n : n \in \mathbf{N}\} \le \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbf{N}\}$

b) $\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbf{N}\} \ge \inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbf{N}\}$

77. Si trovino numeri $a_n \in \mathbf{R}$ tali che risulti

$$\text{a) } \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{b) } \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ,$$

indicando per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ sono validi i risultati ottenuti.

Risposte: a) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$.

b) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, $|x| < 1$. Suggerimento: determinare prima $A, B \in \mathbf{R}$ tali che $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$.

78. Sia $\varepsilon > 0$; trovare, se possibile, $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

a) $|x-5| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 25| < \varepsilon$

b) $|x-5| < \delta \Longrightarrow |x^3 - 125| < \varepsilon$

c) $x - 5| < \delta \Longrightarrow |x^p - 5^p| < \varepsilon$, $p \in \mathbf{N}$

Risposte: a) Basta prendere $\delta = 10^{-3}$ b) Basta prendere $\delta = \frac{1}{11000}$ c) Basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{p^{6p-1}}$

79. Sia $\varepsilon > 0$; trovare, se possibile, $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - 9| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$$

Risposta: Basta prendere $\delta = 3\varepsilon$

80. Poichè $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, fissato $\varepsilon = 1$ $\exists$ $\delta = \delta_a > 0$ tale che

$$|x - a| < \delta_a \Longrightarrow |x^2 - a^2| < 1 \quad .$$

Si dimostri che

$$\lim_{a \to +\infty} \delta_a = 0 \quad .$$

81. Dire se ha senso calcolare

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0} \sqrt{x^4 - x^2} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 - x^4}$$

Risposta: a) No b) Si (giustificare le risposte)

82. Dimostrare che se $P(x)$ è un polinomio di grado ≤ 4 e inoltre

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x^4} = 0 \quad ,$$

allora $P(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$. Generalizzare.

83. Calcolare

$$\text{a)} \lim_{x \to 3} \frac{x^{10} - 3^{10}}{x^{11} - 3^{11}} \qquad \text{b)} \lim_{x \to 10} \frac{x^9 - 10^9}{x^{14} - 10^{14}} \qquad \text{c)} \lim_{x \to 3} \frac{x^{17} - 3^{17}}{x^{10} - 3^{10}}$$

Risposte: a) $\dfrac{10}{3}$ b) $\dfrac{1}{14 \cdot 10^4}$ c) $\frac{17 \cdot 3^7}{10}$

84. Calcolare

$$\text{a)} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right) \quad \text{b)} \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}} \quad \text{c)} \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}} \quad \text{d)} \lim_{y \to 1} \frac{y - 4\sqrt{y} + 3}{y^2 - 1}$$

Risposte: a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$

85. Calcolare

$$\text{a)} \lim_{t \to 0} \frac{t^3 - 3t}{(t+2)^2 - (t-2)^2} \quad \text{b)} \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) \quad \text{c)} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{x^2} \quad \text{d)} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$$

Risposte: a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{1}{4}$

86. Trovare, se esiste, una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e due successioni $\{x_n\}, \{y_n\}$, con $|x_n - y_n| \xrightarrow{n} 0$ di modo che risulti

$$|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n} +\infty$$

Risposta: Si prenda, ad esempio, $f(x) = x^2$, $x_n = n$, $y_n = n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

87. Mostrare che il polinomio $P(x) = x^3 - 15x + 1$ ha le sue tre radici nell'intervallo $[-4, 4]$.
Risposta: Basta notare che $P(-4) < 0, P(0) > 0, P(1) < 0, P(4) > 0$

88. Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua; dimostrare che $\exists\ \xi \in [0, 1]$ tale che $f(\xi) = \xi$.

89. Sia $a < b$; si dimostri che, posto $f(x) = (x - a)(x + b) + x$, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

Suggerimento: osservare che $f(a) = a < \dfrac{a+b}{2} < b = f(b)$.

90. Trovare l'equazione della retta normale alla curva $y = \dfrac{1}{x}$ nel punto di ascissa $x = a$ $(a \neq 0)$.
Risposta: $y = a^2x - a^3 + \dfrac{1}{a}$.

91. Esistono due rette distinte che passano per il punto $(1, 3)$ e sono tangenti alla curva $y = x^2$. Trovare le loro equazioni.
Risposta: Le rette richieste sono $y + 3 = 6(x - 1)$ e $y + 3 = -2(x - 1)$

92. Determinare l'equazione della retta passante per $(-2, 0)$ che è tangente alla curva $y = \sqrt{x}$.
Risposta: $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x + 2)$.

93. Mostrare che la derivata di una funzione derivabile dispari è pari, e che la derivata di una funzione derivabile pari è dispari.

94. La curva $y = ax^2 + bx + c$ passa per il punto $(1, 2)$ ed è tangente alla retta $y = x$ nell'origine. Si trovino a, b, c.
Risposta: $a = b = 1$, $c = 0$

95. Le curve $y = x^2 + ax + b$ e $y = cx - x^2$ sono tangenti l'una all'altra nel punto $(1, 0)$. Si trovino a, b, c.
Risposta: $a = -3$, $b = 2$, $c = 0$

96. Trovare il punto sulla retta $y = ax + b$ più vicino a $(0, 0)$.
Risposta: $(x, y) = \left(-\frac{ab}{1+a^2}, \frac{b}{1+a^2}\right)$

97. Sia $x_0 > 0$. Calcolare l'area $A(x_0)$ del triangolo determinato dagli assi coordinati e dalla tangente alla curva $y = \frac{1}{x}$ per il punto $\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$
Risposta: $A(x_0) = 2$

98. Sia $b > 0$; trovare il punto sul grafico di $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, più vicino al punto $(b, 0)$.
Risposta:
Se $b \leq \frac{1}{2}$ il punto di minimo è $(0, 0)$ e la distanza minima è $\sqrt{f(0)} = b$.
Se $b > \frac{1}{2}$ il punto di minimo è $\left(b - \frac{1}{2}, \sqrt{b - \frac{1}{2}}\right)$ e la distanza minima è $\sqrt{f\left(b - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{b - \frac{1}{4}}$.

99.
a) Trovare il più grande $a > 0$ tale che la funzione $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 100$ sia crescente in $[0, a]$.
b) Idem con $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 36x + 200$
c) Idem con $f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 30x + 300$
Idem con $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 72x + 300$

Risposte: a) $a = 2$ b) $a = 2$ c) $a = 5$ d) $a = 4$

100. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall\ x, y \in \mathbf{R} \quad .$$

Dimostrare che f è costante.

101. Determinare (se esistono) $a, b \in \mathbf{R}$ di modo che sia

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - (ax + b)\right] = 0$$

Risposta: $a = 1$, $b = -1$

102. Trovare (se esiste) $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che sia

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 + \lambda} + x\right) = 2$$

Risposta: $\lambda = 4$

103. Asintoto (se esiste) per $x \to +\infty$ di

$$f(x) = 2x + \sqrt{x}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} - 1\right)$$

Risposta: $y = 2x$

104. Asintoto per $x \to +\infty$ di

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

Risposta: $y = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)$

105. Determinare (se possibile) $a \in \mathbf{R}$ di modo che la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + x}{3x^2 - ax + 1}$$

abbia $y = \frac{x}{3} + 2$ come asintoto obliquo.
Risposta: $a = \frac{9}{2}$

106. Dire qual'è l'unica risposta corretta, giustificando la risposta. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = 100$; allora
a) f assume tutti i valori fra 200 e 300
b) f è positiva in $(-\infty, 0]$
c) f assume tutti i valori fra $-\infty$ e 100
Risposta: La risposta giusta è la a)

107. Idem precedente, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, nulla soltanto in $x = -1$ ed $x = 1$; allora
a) f è crescente in $(-\infty, -1]$
b) f può cambiare segno in $[1, +\infty)$
c) f ha segno costante in $[1, +\infty)$
Risposta: la risposta giusta è la c).

108. Posto $f(x) = |x-1| + |2x+3|$,

a) tracciare il grafico di f e determinare $f(\mathbf{R})$;
b) trovare la più piccola costante L tale che $|f(x) - f(z)| \leq L|x-z| \;\; \forall\, x, z \in \mathbf{R}$;
c) determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$;
d) trovare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x) \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}$, $F(0) = 0$;
e) calcolare (dove esiste) $f'(x)$, determinando il dominio di f'.

Risposte:

a) $f(\mathbf{R}) = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ b) $L = 3$

c) $\lambda < \frac{5}{2}$: nessuna soluzione; $\lambda = \frac{5}{2}$: una soluzione; $\lambda > \frac{5}{2}$: due soluzioni

d) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 4x \;\; , \;\; -\dfrac{3}{2} \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1 \;\; , \;\; x \geq 1 \\ -\dfrac{3x^2}{2} - 2x - \dfrac{9}{2} \;\; , \;\; x \leq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} -3 \;\; , \;\; x < -\dfrac{3}{2} \\ 1 \;\; , \;\; -\dfrac{3}{2} < x < 1 \\ 3 \;\; , \;\; x > 1 \end{cases} \quad , \quad \text{dominio di } f' = \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{2} \; , \; 1\right\}$$

109. Dominio, asintoti e grafico di $f(x) = \dfrac{x^2 - (x+1)|x+2|}{2x+3}$

Risposta: Il dominio di f è $\left\{x \in \mathbf{R} \; : \; x \neq -\frac{3}{2}\right\}$; $x = -\frac{3}{2}$ è asintoto verticale. $y = \frac{1}{2}$ è asintoto per $x \to +\infty$, $y = x - 2$ è asintoto per $x \to -\infty$.

110. Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi:

$$\text{a) } A = \left\{\frac{x^2+10}{x^2+1} \; : \; x \in \mathbf{R}\right\} \qquad \text{b) } A = \left\{\frac{x^2+3}{x^2+9} \; : \; x \in \mathbf{R}\right\}$$

$$\text{c) } A = \left\{|x|^7 - x^8 \; : \; x \in \mathbf{R}\right\} \qquad \text{d) } A = \left\{\frac{x^2+6}{x+2} \; : \; x \geq 0\right\}$$

Risposte: a) $\inf A = 1$ (non raggiunto) , $\sup A = 10$ (raggiunto in $x = 10$)

b) $\sup A = 1$ (non raggiunto) , $\inf A = 1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (raggiunto in $x = 0$)

c) $\inf A = -\infty$ (ovviamente non raggiunto) , $\sup A = \frac{7^7}{8^8}$ (raggiunto in $-\frac{7}{8}$)

d) $\sup A = +\infty$ (ovviamente non raggiunto) , $\inf A = -4\frac{20}{\sqrt{10}} = -4 + 2\sqrt{10}$, raggiunto in $x = -2 + \sqrt{10}$)

111. Calcolare sup e inf di $A = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, x < y \right\}$, e dire se sono massimi e/o minimi.

Risposta: $\inf A = -\frac{1}{2} = \min A$ (raggiunto per $y = -x$) , $\sup A = \frac{1}{2}$, non c'è massimo.

112. Sia $\{a_n\}$ definita da
(1) $a_0 = 0$
(2) $a_1 = 1$
(3) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall\, n \geq 1$.
Dimostrare che esistono numeri reali A, B, x, y tali che

$$a_n = Ax^n + By^n \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Suggerimento: Dedurre da (1) che $A = -B$; quindi, da (2), si ottiene $A = \frac{1}{x-y}$, $x \neq y$ e quindi $B = \frac{-1}{x-y}$. Infine, da (3) si ottiene che x e y devono verificare l'equazione di secondo grado $t^2 - t - 1 = 0$.
La risposta è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

113. Sia $f(x)$ tale che $f''(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathbf{R}$ ed inoltre esiste x_0 tale che $f'(x_0 = 0$. Quant'è $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?. Giustificare rigorosamente la risposta.

114. Dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^4}{4} + bx^3 + c = 0 \quad , \quad b, c \in \mathbf{R}$$

ha al più due soluzioni reali.

115. Determinare, al variare di $c \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + c = 0 \quad .$$

Risposta:
$c > 0$: nessuna soluzione
$c = 0$: una soluzione
$c < 0$: due soluzioni (una positiva ed una negativa)

ERRATA CORRIGE.
Esercizio 76: al posto di $\left(\frac{1}{n}\right)$ va $\left(\frac{10}{n}\right)^n$.

116. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = \lambda x \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lambda x \quad \textbf{c)}\ \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \lambda x \quad \textbf{d)}\ \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \lambda x$$

Risposte

a) $\lambda \geq 0$: una soluzione ; $-\frac{4}{243} < \lambda < 0$: tre soluzioni ; $\lambda = -\frac{4}{243}$: due soluzioni ; $\lambda < -\frac{4}{243}$: una soluzione.

b) $\lambda \geq 0$: una soluzione ; $-\frac{4}{27} < \lambda < 0$: tre soluzioni ; $\lambda = -\frac{4}{27}$: due soluzioni ; $\lambda < -\frac{4}{27}$; una soluzione.

c) $\lambda > 4$: una soluzione ; $\lambda = 4$: due soluzioni ; $0 < \lambda < 4$: tre soluzioni ; $\lambda \leq 0$: una soluzione

d) $\lambda > \frac{32}{27}$: una soluzione ; $\lambda = \frac{32}{27}$: due soluzioni ; $0 < \lambda < \frac{32}{27}$: tre soluzioni ; $\lambda \leq 0$: una soluzione.

117. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{x^{10}} = \lambda x + 10 \quad (x > 0) \qquad\qquad \textbf{b)}\ x^4 + \lambda = x^3 \quad .$$

Risposta:

a) $\lambda = -10\left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$: una soluzione

$\lambda < -10\left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$: nessuna soluzione

$-10\left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}} < \lambda < 0$: due soluzioni

b) $\lambda < \frac{27}{256}$: due soluzioni ; $\lambda = \frac{27}{256}$: una soluzione ; $\lambda > \frac{27}{256}$: nessuna soluzione.

118. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \ x^5 + \lambda = x^4 \quad \textbf{b)}\ \ x^5 = \lambda(x-1) \quad \textbf{c)}\ \ x^6 = \lambda(x-1) \quad \textbf{d)}\ \ x^7 = \lambda(x-1)$$

Risposta:

a) $\lambda < 0$: una soluzione ; $\lambda = 0$: due soluzioni ; $0 < \lambda < \dfrac{4^4}{5^5}$: tre soluzioni ; $\lambda = \dfrac{4^4}{5^5}$: due soluzioni ; $\lambda > \dfrac{4^4}{5^5}$: una soluzione.

b) $\lambda < \dfrac{5^5}{4^4}$: una soluzione ; $\lambda = \dfrac{5^5}{4^4}$: due soluzioni ; $\lambda > \dfrac{5^5}{4^4}$: tre soluzioni.

c) $\lambda < 0$: due soluzioni ; $\lambda = 0$: nessuna soluzione ; $0 < \lambda < \dfrac{6^5}{5^5}$: nessuna soluzione ; $\lambda = \dfrac{6^6}{5^5}$: una soluzione ; $\lambda > \dfrac{6^6}{5^5}$: due soluzioni.

d) $\lambda < \dfrac{7^7}{6^6}$: una soluzione ; $\lambda = \dfrac{7^7}{6^6}$: due soluzioni ; $\lambda > \dfrac{7^7}{6^6}$: tre soluzioni.

119. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ x^8 = \lambda(x-1) \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda \quad \textbf{c)}\ x^5 - \lambda = x^2 \quad \textbf{d)}\ \frac{x^3}{x^2+2x+2} = \lambda \ .$$

Risposte:

a) $\lambda < 0$: due soluzioni ; $\lambda = 0$: una soluzione ; $0 < \lambda < \dfrac{8^8}{7^7}$: nessuna soluzione ; $\lambda = \dfrac{8^8}{7^7}$: una soluzione ; $\lambda > \dfrac{8^8}{7^7}$: due soluzioni.

b) $\lambda < \dfrac{1}{20}$: nessuna soluzione ; $\lambda = \dfrac{1}{20}$: due soluzioni ; $\dfrac{1}{20} < \lambda < \dfrac{11}{10}$: quattro soluzioni ; $\lambda = \dfrac{11}{10}$: tre soluzioni ; $\lambda > \dfrac{11}{10}$: due soluzioni.

c) $\lambda > 0$ oppure $\lambda < -\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$: una soluzione ; $\lambda = 0$ oppure $\lambda = -\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$: due soluzioni ; $-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \lambda < 0$: tre soluzioni.

d) Una soluzione se $\lambda \geq 1$ oppure $\lambda < \dfrac{27}{35}$; tre soluzioni se $\dfrac{27}{35} < \lambda < 1$; due soluzioni se $\lambda = \dfrac{27}{35}$.

120. Sia $f(x) = x^7 + x$; verificare che f è invertibile su $\mathbf{R}$, con f^{-1} derivabile, e calcolare $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(2)$.

Risposta: $(f^{-1})(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{8}$.

121.
a) Dimostrare che $f(x) = x^{13} + 3x$ è invertibile in tutto $\mathbf{R}$ e calcolare $(f^{-1})'(4)$.

b) Idem $f(x) = x^{11} + 8x$, $(f^{-1})'(9)$ **c)** Idem $f(x) = x^{15} + 10x$, $(f^{-1})'(11)$.

Risposte:
a) $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{16}$ **b)** $(f^{-1})'(9) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{19}$ **c)** $(f^{-1})'(11) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{25}$.

122. Dimostrare che $e^2(x-1) \le e^x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$.

123. Studiare la funzione $f(x) = x^x$.

Risposta: f è definita per $x > 0$; si ha

$$\lim_{x\to 0^+} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty \quad , \quad f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e} \quad , \quad f''(x) > 0 \ \ \forall\, x > 0 \quad ,$$

quindi f è strettamente convessa, $x = \dfrac{1}{e}$ è punto di minimo assoluto. Si noti che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$.

124.
a) Posto $f(x) = e^{x^5+10x}$, dimostrare che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è invertibile e calcolare $(f^{-1})'(1)$.

b) Idem con $f(x) = e^{x^7+14x}$.

Risposta: **a)** $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{10}$ **b)** $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{14}$.

125. Sia $f(x) = \ln\left(\sqrt{2+e^x} - e^{\frac{x}{2}}\right)$; calcolare $\sup f(\mathbf{R})$, $\inf f(\mathbf{R})$ e dire se f ha massimo e/o minimo.

Risposta: $\sup f(\mathbf{R}) = \ln\sqrt{2}$, $\inf f(\mathbf{R}) = -\infty$.

126. Sia $n \in \mathbf{N}$; dimostrare che

$$-\frac{1}{x^n} \le -\frac{1}{n}(1 + \ln n) + \ln x \quad \forall\, x > 0 \quad .$$

127. Dimostrare o smentire la seguente disuguaglianza:

$$\frac{x \ln x}{x-1} < 1 \quad \forall\, x \in (0,1) \quad .$$

128. Risolvere la disequazione

$$e^x > x^2 + 1 \quad , \quad x \in \mathbf{R} \quad .$$

Risposta: $x > 0$.

129. Posto $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \ln(x^2)$, determinare i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ , \ x \neq 0 \ : \ f(x) > g(x)\} \quad ; \quad B = \{x \in \mathbf{R} \ , \ x \neq 0 \ : \ f(x) < g(x)\} \quad ;$$

$$C = \{x \in \mathbf{R} \ , \ x \neq 0 \ : \ f(x) = g(x)\} \quad .$$

Risposta: $A = \mathbf{R} - \{0, 1, -1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{-1, 1\}$.

130. Dimostrare che la successione

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

ha limite finito.
Risposta: È immediato che p_n è crescente. Per vedere che è limitata, notare che $0 < \ln p_n \leq 1$.

131. Studiare la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ e determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda \quad (x > 0)$.

Risposta: f è definita per $x > 0$, è strettamente positiva, strettamente crescente per $0 < x < e$, strettamente decrescente per $x > e$. Quindi, $x = e$ è punto di massimo assoluto, $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $x = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Risulta

$\lambda \leq 0$: nessuna soluzione ; $0 < \lambda \leq 1$: una soluzione ; $1 < \lambda < e^{\frac{1}{e}}$: due soluzioni

$\lambda = e^{\frac{1}{e}}$: una soluzione ; $\lambda > e^{\frac{1}{e}}$: nessuna soluzione.

132. Posto $f(x) = \dfrac{x^2}{a} - \ln x$, $x > 0$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ quando

a) $a = 2$; **b)** $a > 2$

Risposta:
a) una soluzione $\forall \ \lambda \ \in \mathbf{R}$.
b) $\lambda > \dfrac{1}{a}$: una soluzione ; $\lambda = \dfrac{1}{a}$: due soluzioni ; $\dfrac{1}{2}\left(1 - \ln \dfrac{a}{2}\right) < \lambda < \dfrac{1}{a}$: tre soluzioni
$\lambda = \dfrac{1}{2}\left(1 - \ln \dfrac{a}{2}\right)$: due soluzioni ; $\lambda < \dfrac{1}{2}\left(1 - \ln \dfrac{a}{2}\right)$: una soluzione.

133. Posto $f(x) = e^x - a|x|$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$

a) quando $a = 1$; **b)** quando $a > 1$.

Risposta:
a) una soluzione $\forall\ \lambda \in \mathbf{R}$.
b) $\lambda > 1$: una soluzione ; $\lambda = 1$: due soluzioni ;
$a(1 - \ln a) < \lambda < 1$: tre soluzioni ; $\lambda = a(1 - \ln a)$: due soluzioni ;
$\lambda < a(1 - \ln a)$: una soluzione.

134. Siano $a, b \in \mathbf{R}, a \geq e^b$; posto $f(x) = e^x - a|x - b|$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.
Risposta:
a) una soluzione $\forall\ \lambda \in \mathbf{R}$.
b) $\lambda > e^b$: una soluzione ; $\lambda = e^b$: due soluzioni ; $f(\ln a) < \lambda < e^b$: tre soluzioni ;
$\lambda = f(\ln a)$: due soluzioni ; $\lambda < f(\ln a)$: una soluzione

135. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $\ln|x| = \lambda x$ **b)** $e^x = \lambda x$ **c)** $e^{x^2+x} = \lambda x$

Risposta:
a) $\lambda > \frac{1}{e}$: una soluzione ; $\lambda = \frac{1}{e}$: due soluzioni ; $0 < \lambda < \frac{1}{e}$: tre soluzioni $\lambda = 0$: due soluzioni ; $-\frac{1}{e} < \lambda < o$: tre soluzioni ; $\lambda = -\frac{1}{e}$: due soluzioni $\lambda < -\frac{1}{e}$: una soluzione.

b) $\lambda > e$: due soluzioni $x_0, x_1, 0 < x_0 < 1 < x_1$; $\lambda = e$: una soluzione $(x = 1)$; $0 \leq \lambda < e$: nessuna soluzione ; $\lambda < 0$: una soluzione (negativa).

c) $\lambda < -1$: due soluzioni ; $\lambda = -1$: una soluzione ; $-1 < \lambda < 2e^{\frac{3}{4}}$: nessuna soluzione; $\lambda = 2e^{\frac{3}{4}}$: una soluzione ; $\lambda > 2e^{\frac{3}{4}}$: due soluzioni.

136. Determinare, al variare del parametro $\lambda > 1$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda \quad .$$

Risposta:
$\lambda = e$: una soluzione ; $1 < \lambda < e$: due soluzioni ; $\lambda > e$: due soluzioni.

137. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = ax + \lambda \qquad (a > 0 \ \text{ fissato }) \quad .$$

Risposta:
$\lambda < a(1 - \ln a)$: nessuna soluzione ; $\lambda = a(1 - \ln a)$: una soluzione ; $\lambda > a(1 - \ln a)$: due soluzioni.

138. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\mathbf{a)} \ \ \lambda \ln x = \sqrt[5]{x} \qquad\qquad \mathbf{b)} \ \ \lambda \ln x = \sqrt[7]{x} \quad .$$

Risposta:
a) $\lambda < 0$: nessuna soluzione ; $0 \le \lambda < \dfrac{e}{5}$: nessuna soluzione ; $\lambda = \dfrac{e}{5}$: una soluzione ; $\lambda > \dfrac{e}{5}$: due soluzioni.

b)$\lambda < 0$: nessuna soluzione ; $0 \le \lambda < \dfrac{e}{7}$: nessuna soluzione ; $\lambda = \dfrac{e}{7}$: una soluzione ; $\lambda > \dfrac{e}{7}$: due soluzioni.

139. Determinare, al variare del parametro λ, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\mathbf{a}) \quad e^x = \lambda x^2 \qquad\qquad \mathbf{b}) \quad x^2 e^{-2x} = \lambda \quad .$$

Risposta:
a) $\lambda \le 0$: nessuna soluzione ; $0 < \lambda < \dfrac{e^2}{4}$: una soluzione ; $\lambda = \dfrac{e^2}{4}$: due soluzioni ; $\lambda > \frac{e^2}{4}$: tre soluzioni.

b) $\lambda > e^{-2}$: una soluzione ; $\lambda = e^{-2}$: due soluzioni ; $0 < \lambda < e^{-2}$: tre soluzioni ; $\lambda = 0$: una soluzione ; $\lambda < 0$: nessuna soluzione.

140. Determinare, al variare del parametro $\lambda > 0$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\mathbf{a)} \ \ \ln(\lambda |x|) = 2x \qquad ; \qquad \mathbf{b)} \ \ \ln|x| = \lambda x \quad .$$

Risposta:
a) $\dfrac{\lambda}{e} > 2$: tre soluzioni ; $\dfrac{\lambda}{2} = 2$: due soluzioni ; $0 < \dfrac{\lambda}{e} < 2$: una soluzione.

b) $\lambda > \dfrac{1}{e}$: una soluzione ; $\lambda = \dfrac{1}{e}$: due soluzioni ; $0 < \lambda < \dfrac{1}{e}$: tre soluzioni.

141. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\quad \ln x - \ln(\ln x) = \lambda \qquad ; \qquad \textbf{b)}\quad \ln(x+2) = \ln(x+1) + \lambda$$

Risposta:
a) $\lambda = 1$: una soluzione ; $\lambda < 1$: nessuna soluzione ; $\lambda > 1$: due soluzioni.

b) $\lambda \leq 0$: nessuna soluzione ; $\lambda > 0$: una soluzione.

142. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{x+1} - e^{100}|x| = \lambda \quad .$$

Risposta:
$\lambda > e$: una soluzione ; $\lambda = e$: due soluzioni ; $-98e^{100} < \lambda < e$: tre soluzioni ; $\lambda = -98e^{100}$: due soluzioni ; $\lambda < -98e^{100}$: una soluzione.

143. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$|\ln x| - \frac{x^2}{8} = \lambda \quad .$$

Risposta:
$\lambda > \ln 2 - \frac{1}{2}$: una soluzione ; $\lambda = \ln 2 - \frac{1}{2}$: due soluzioni ; $-\frac{1}{8} < \lambda < \ln 2 - \frac{1}{2}$: tre soluzioni ; $\lambda = -\frac{1}{8}$: due soluzioni ; $\lambda < -\frac{1}{8}$: una soluzione.

144. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n^{10}}^{n^{100}} k^2 \quad \textbf{b)}\ \lim_n n^\alpha \sum_{k=n^3}^{n^4} \frac{1}{k^2} \quad \textbf{c)}\ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n^5}^{n^{1000}} k^{99} \quad \textbf{d)}\ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n^4}^{n^6} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Risposta:
a) $+\infty$ se $\alpha < 3000$; $\frac{1}{3}$ se $\alpha = 3000$; 0 se $\alpha > 3000$.
b) 0 se $\alpha < 3$; 1 se $\alpha = 3$; $+\infty$ se $\alpha > 3$
b) $+\infty$ se $\alpha < 100 \cdot 000$; $\frac{1}{100}$ se $\alpha = 100 \cdot 000$; 0 se $\alpha > 100 \cdot 000$
d) $+\infty$ se $\alpha < 3$; 2 se $\alpha = 3$; 0 se $\alpha > 3$.

145. Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{9n} k^{11} \qquad \textbf{b)} \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{n^2} k^{11} \qquad \textbf{c)} \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=n}^{n^n} k^{11} \quad .$$

Risposta:
a) 0 se $\alpha > 12$, $\dfrac{9^{12}-1}{12}$ se $\alpha = 12$, $+\infty$ se $\alpha < 12$.
b) 0 se $\alpha > 24$, $\dfrac{1}{12}$ se $\alpha = 24$, $+\infty$ se $\alpha < 24$.
$+\infty \ \ \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$.

146. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \textbf{b)} \ \lim_n n^\alpha \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^2} \quad \textbf{c)} \ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \quad \textbf{d)} \ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[7]{k^3}}$$

Risposte:
a) $+\infty$ se $\alpha < 4$, $\dfrac{1}{4}$ se $\alpha = 4$, 0 se $\alpha > 4$
b) 0 se $\alpha < 1$, 1 se $\alpha = 1$, $+\infty$ se $\alpha > 1$
c) $+\infty$ se $\alpha < \dfrac{1}{3}$, 3 se $\alpha = \dfrac{1}{3}$, 0 se $\alpha > \dfrac{1}{3}$
d) $+\infty$ se $\alpha < \dfrac{4}{7}$, $\dfrac{7}{4}$ se $\alpha = \dfrac{4}{7}$, 0 se $\alpha > \dfrac{4}{7}$

147. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \ \lim_n n^\alpha \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^2} \qquad \textbf{b)} \ \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^{10} \qquad \textbf{c)} \ \lim_n \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$\textbf{d)} \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad\qquad \textbf{e)} \quad \lim_n \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=1}^{n\alpha} k^{10} \quad (\alpha \in \mathbf{N}$$

Risposte:
a) $+\infty$ se $\alpha > 1$, 1 se $\alpha = 1$, 0 se $\alpha < 1$
b) 0 se $\alpha > 11$, $\dfrac{1}{11}$ se $\alpha = 11$, $+\infty$ se $\alpha < 11$
c) $\dfrac{1}{\alpha+1} \ \ \forall\, \alpha > 0$
d) $+\infty$ se $\alpha < \dfrac{1}{2}$, 2 se $\alpha = \dfrac{1}{2}$, 0 se $\alpha > \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\alpha^{11}}{11} \ \ \forall\, \alpha \in \mathbf{N}$

148. Calcolare, al variare di $p > 0$,

$$\textbf{a)}\ \lim_n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^p} \qquad\qquad \textbf{b)}\ \lim_n \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k^p}$$

Risposte:
a) $+\infty$ se $0 < p < 1$, $\ln 2$ se $p = 1$, 0 se $p > 1$.
a) $+\infty$ se $0 < p < 2$, 1 se $p = 2$, 0 se $p > 2$

149. Calcolare, al variare di $p \in \mathbf{R}$,

$$\textbf{a)}\ \lim_n \frac{1}{(\ln n)^p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textbf{b)}\ \lim_n \sum_{k=1}^{n^n} \frac{1}{k^p} \qquad \textbf{c)}\ \lim_n \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{p}$$

Risposta:
a) $+\infty$ se $0 < p < 1$, 1 se $p = 1$, 0 se $p > 1$
b) 0 se $p > 1$, $+\infty$ se $p \leq 1$
c) $+\infty$ se $p < 1$, $\ln 2$ se $p = 1$, 0 se $p > 1$

150. Calcolare

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Risposta:
a) $\dfrac{3}{5}$ **b)** 0 **c)** $-\dfrac{1}{2}$

151. Dimostrare rigorosamente che $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ non esiste.

152. Trovare, se possibile, $\delta > 0$ tale che, posto $\varphi(x) = \sin(x^2)$, sia

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < 1 \quad \forall\, x, y \ \text{ tali che } \ |x - y| < \delta$$

Risposta: Non è possibile; si prenda ad esempio

$$x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad , \quad y_n = \sqrt{n\pi} \quad .$$

153. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uniformemente continua. Dimostrare che allora esistono due numeri a, b tali che

$$f(x) \leq ax + b \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad .$$

Illustrare con un grafico.

154. Dimostrare che $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

ERRATA CORRIGE
La soluzione corretta dell'esercizio 39 f) è

$$\sum_{k=9}^{20} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k+2) - \sum_{k=1}^{8} k(k+1)(k+2) = \frac{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 - 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{4} = \cdots$$

Nell'esercizio 56 cancellare le risposte d), e)
Nell'esercizio 91 sostituire $(1, 3)$ con $(1, -3)$

155. Dimostrare che $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è uniformemente continua in $\mathbf{R}$.

156. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \arctan x = \lambda x \quad (x \in \mathbf{R} \qquad \textbf{b)}\ \tan x = \lambda x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Risposta:
a) $\lambda \geq 1$: l'equazione ha esattamente una soluzione (che è $x = 0$) ; $0 < \lambda < 1$: l'equazione ha esattamente tre soluzioni (una negativa, $x = 0$, una positiva) ; $\lambda \leq 0$: l'equazione ha esattamente una soluzione (che è $x = 0$).
b) $\lambda > 1$: l'equazione ha esattamente tre soluzioni (una negativa, $x = 0$, una negativa) ; $\lambda \leq 1$: l'equazione ha esattamente una soluzione (che è $x = 0$).

157. Trovare, se possibile, $a, b \in \mathbf{R}$ di modo che sia

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - (ax + b)}{x} = 0 \quad .$$

Risposta: $a = 0, b = 1$. **158.** Calcolare

$$\textbf{a)}\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \textbf{b)}\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{x^6} \quad \textbf{c)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2} \quad \textbf{d)}\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \quad .$$

Risposta: a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{15}$ d) 0

159. Funzioni iperboliche. Posto

$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ,$$

verificare che

a) $\cosh x$ è pari, $\sinh x$ è dispari;
b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
c1) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$;
c2) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x + \sinh y$.
d) Tracciare un grafico qualitativo di $\sinh x, \cosh y$.
e) Mostrare che $\sinh \mathbf{R} \to \mathbf{R}/, / \cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ sono invertibili e calcolare le inverse.

Risposta: $\sinh^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \ \ \forall\, t \in \mathbf{R}$, $\cosh^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2-1}) \ \ \forall\, t \geq 1$.

160. Dimostrare che

a) $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \quad \forall\, x \geq 0$;

b) $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad \forall\, x \geq 0$;

c) $1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1 + \dfrac{x^2}{2} \quad \forall\, x \in [0, \delta]$, δ opportuno;

d) $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} \quad \forall\, x \geq 0$.

161. Trovare, se possibile, $a, b \in \mathbf{R}$ di modo che sia

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - ax - b}{x-1} = 0$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - (ax+b)}{x} = 0$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{\ln x} - (ax+b)}{x-e}$.

Risposte: a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = b = 1$ c) $a = 0$, $b = e$.

161. Posto

$$a_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad b_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\ln n} \quad ,$$

dire quale possibilità è vera:

a) $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $a_n < b_n \ \ \forall\, n \geq n_0$;
b) $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $a_n > b_n \ \ \forall\, n \geq n_0$;
c) nessuna delle due possibilità precedenti.

Risposta: vale a)

162. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:
a) $\exists\, \delta > 0$ tale che $\ln(1+x) < \sin x \quad \forall\, x \in (0,\delta)$;
b) $\exists\, \delta > 0$ tale che $\ln(1+x) > \sin x \quad \forall\, x \in (0,\delta)$;
c) non vale nessuna delle affermazioni precedenti.

Risposta: vale a)

163. Dimostrare che e è irrazionale.
Suggerimento: supponendo per assurdo che sia $e = \dfrac{m}{n}$, moltiplicare per $n!$ la disuguaglianza

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

e arrivare ad una contraddizione.

164. Calcolare

$$\textbf{a)} \quad \int \sin^2 x dx \qquad \textbf{b)} \quad \int \sin^3 x dx \quad .$$

Risposta:

a) $\dfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ b) $-\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$.

165. Calcolare $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Risposta: $\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$.

166. Posto $F_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, verificare che

a) $F_1(x) = \arctan x$;

b) $F_n(x) = \dfrac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2} F_{n-1}(x) \quad \forall\, n > 1.$

167. Posto $F_n(x) = \displaystyle\int \sin^n x dx$, dimostrare che

$$F_n(x) = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} F_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

Trovare una formula analoga per

$$\int \cos^n x dx \quad .$$

168. Dimostrare che se f è continua poer $x \geq 0$ allora

$$\lim_n \int_{1/n^2}^{1/n} f(x)dx = 0 \quad .$$

Che succede se f è continua soltanto per $x > 0$?.

Suggerimento: per la seconda parte considerare la funzione $\dfrac{1}{x^2}$.

169. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continua e tale che

$$f''(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in (0,1) \quad , \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) = 0 \quad , \quad \int_0^1 f(x)dx = a > 0 \quad .$$

Dimostrare che $f(0) \geq 6a$.

170. Calcolare la derivata di $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Risposta: $F'(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{1+9x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

171. Posto $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{13+t^{10}}$,

a) dimostrare che F è invertibile;
b) calcolare l'equazione della retta tangente $T(x)$ a F per il punto di ascissa $x = 1$;
c) dimostrare o smentire l'affermazione $F(x) \leq T(x) \ \ \forall\, x \geq 1$;
d) detta G l'inversa di F, calcolare $G'(0)$.

Risposta:

a) $F'(x) = \dfrac{1}{13+x^{10}} > 0$, quindi F è strettamente crescente;

b) $T(x) = \dfrac{1}{14}(x-1)$;

c) è vera;

d) $G'(0) = \dfrac{1}{F'(1)} = 14$.

172. Calcolare

$$\textbf{a)} \ \int \frac{dx}{1+x^2)^2} \qquad \textbf{b)} \ \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} \quad .$$

Risposta: a) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$ b) $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)\right]$.

173. Calcolare

$$\textbf{a)} \quad \int x \arctan x dx \qquad \textbf{b)} \quad \int x^2 \sin x dx \quad .$$

Risposta:

bsk a) $\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{\arctan x}{2}$ b) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$

174. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos x dx$.
Risposta: $-\pi$.

175. Calcolare

$$\textbf{a)} \quad \int \cos^4 x dx \quad \textbf{b)} \quad \int \cos^5 x dx \quad \textbf{c)} \quad \int \sin^4 x dx \quad \textbf{d)} \quad \int \sin^5 x dx \quad .$$

Risposta:

$$\textbf{a)} \quad \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right) \quad \textbf{b)} \quad \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}$$

$$\textbf{c)} \quad -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) \quad \textbf{d)} \quad -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x \quad .$$

176. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) = a^x - x$ ha minimo. Dire quindi per queli valori di a il punto di minimo (che è unico) è positivo.

Risposta: C'e' minimo per $a > 1$ e il punto di minimo è

$$x_a = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a} \quad ;$$

$x_a > 0$ se $1 < a < e$.

177. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la funzione $f(x) = e^x + ax$ ha minimo in tutto $\mathbf{R}$. Per tali a trovare il valore minimo di f.

Risposta: f ha minimo per $a < 0$, il punto di minimo è $x_a = \ln(-a)$ ed il valore minimo è $f(x_a) = -a + a\ln(-a)$.

178. Posto

$$f(x) = \int_{-3}^{x} \frac{e^{\sqrt[4]{\pi-4}}}{-3+\cos t} dt \quad , \quad x \leq \pi \quad ,$$

calcolare (se esiste) $(f^{-1})'(0)$.
Risposta:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{-3+\cos(-3)}{e^{\sqrt[4]{\pi+3}}} = \frac{-3+\cos 3}{e^{\sqrt[4]{\pi+3}}} \quad .$$

179. Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t-a)(t-b)}{\ln(2+t^2)} dt \quad , \quad a < b \quad .$$

180. Dire per quali valori di x è negativa la funzione

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{\sin t} dt \quad .$$

Risposta: $x \in (0, 1)$.

181. Calcolare

$$\textbf{a)} \int x^3 \ln x dx \qquad \textbf{b)} \int x^{10} \ln x dx \qquad \textbf{c)} \int x^2 e^x dx \quad .$$

Risposta:

$$\textbf{a)} \ \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \qquad \textbf{b)} \ \frac{x^{11}}{11} \left(\ln x - \frac{1}{11} \right) \qquad \textbf{c)} \ x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \quad .$$

182. Calcolare $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.
Risposta: 2

183. Calcolare

$$\textbf{a)} \int e^{2x} \sin x dx \qquad \textbf{b)} \int \frac{(\ln x)^{-1} + (\ln x)^2}{x} dx \qquad \textbf{c)} \int e^x \cos 3x dx \qquad \textbf{d)} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \quad .$$

Risposta:

$$\textbf{a)} \ \frac{e^{2x}}{5} \left(2 \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \qquad \textbf{b)} \ \ln(\ln |x|) + \frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$\textbf{c)} \ \frac{e^x}{10} (3 \sin 3x + \cos 3x) \qquad \textbf{d)} \ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x \quad .$$

184. Sia

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \quad ;$$

per quali valori di x positivi si ha $F(x) \geq \ln x$? .
Risposta: $x \geq 1$.

185. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \lim_n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}\int_1^{n^{10}} \frac{dx}{x+\sin^2 x} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}\int_1^{n^n} \frac{dx}{x+\sin^2 x}$$

$$\textbf{c)}\quad \lim_n \frac{1}{(\ln x)^p}\int_1^{n^p} \frac{dx}{x+\sin^2 x} \quad \text{al variare dei } p>0 \quad .$$

Risposta:
a) 0 b) $+\infty$ c)) se $p>1$, 1 se $p=1$, $+\infty$ se $p<1$.

186. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln\left(1-\frac{5}{2}x^2\right)+\cos x\right]^{\frac{1}{x^2}} \quad .$$

Risposta: -3 .

187. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{\ln(1+x)} e^{\sin t}dt}{x} \quad .$$

Risposta: 1

188. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{t^2-t}dt}{1-\cos x} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x} \sin t^2 dt}{x^3} \qquad \textbf{c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^4}\sqrt{1+t^{10}}dt}{10^{x^4}-1}$$

$$\textbf{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sqrt{1+t^{8}}dt}{7^{x^3}-1} \qquad \textbf{e)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x}\ln(1+t^2)dt}{7^{x^3}-1} \quad .$$

Risposta:
a) 2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{\ln 10}$ d) $\frac{1}{\ln 7}$ e) $\frac{1}{3\ln 7}$

189. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sin^2 x} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+\sin x}}{x} \quad .$$

Risposta:
a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

190. Dimostrare che

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \quad .$$

Suggerimento:

$$\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k \quad \text{e} \quad \int_1^n \ln x dx < \sum_{k=1}^{n}\ln k < \int_1^{n+1}\ln x dx \quad .$$

191. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \lim_n \sqrt[n]{\ln(n!)} \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \lim_n \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{n!}} \quad , \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad .$$

Risposta: a) 1 b) $+\infty$ se $\alpha > 1$, e se $\alpha = 1$, 0 se $\alpha < 1$.

192. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sqrt{1+t^3}}{2^{x^2}-1} \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1+\sin t)dt}{x^2} \quad .$$

Risposta:
a) $\dfrac{1}{\ln 2}$ b) 0

193. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \quad .$$

Risposta: $\dfrac{e}{2}$

193. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$.

Risposta: $\ln\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$.

194. Calcolare

$$\textbf{a)}\quad \int \frac{3x^2+7x-4}{(x+2)(x-1)(x-10)}dx \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\textbf{c)}\quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} \qquad\qquad \textbf{d)}\quad \int \frac{x^2+5x-100}{(x-1)^3}$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\quad -\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{6}\int \frac{19x-7}{(x-1)(x-10)}dx \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \ln|x-2| - \int \frac{x}{(x-1)^2}dx$$

$$\textbf{c)}\quad 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x \qquad\qquad \textbf{d)}\quad \frac{47}{(x-1)^2} + \int \frac{x+6}{(x-1)^2}dx \quad .$$

195. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, l'integrale

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)} \quad .$$

Risposta:

Se $a = b$ la risposta è $-\dfrac{2}{(x+a)^2}$.

Se $a \neq b$ la risposta è $\dfrac{1}{(a-b)^2}\left[\ln\left|\dfrac{x+b}{x+a}\right| + \dfrac{a-b}{x-a}\right]$.

196. Calcolare

$$\textbf{a)} \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-10)} \qquad \textbf{b)} \int \frac{dx}{(x-3)^2(x+4)} \qquad \textbf{c)} \int \frac{dx}{(x+7)^2(x+100)}$$

$$\textbf{d)} \int \frac{dx}{(x+13)^2(x+6)} \qquad \textbf{e)} \int \frac{dx}{(x-3)(x+5)(x-7)} \qquad \textbf{f)} \int \frac{dx}{(x+3)(x-4)(x+5)}$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{121}\left[\ln\left|\frac{x-10}{x+1}\right| + \frac{11}{x+1}\right] \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{49}\left[\ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right| - \frac{7}{x-3}\right] \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{93^2}\left[\ln\left|\frac{x+100}{x+7}\right| - \frac{93}{x+7}\right]$$

$$\textbf{d)}\ \frac{1}{49}\left[\ln\left|\frac{x+6}{x+13}\right| + \frac{7}{x+13}\right] \qquad \textbf{e)}\ \frac{1}{32}\ln|x-3| - \frac{1}{96}\ln|x+5| - \frac{1}{48}\ln|x-7|$$

$$\textbf{f)}\ \ -\frac{1}{14}\ln|x+3| + \frac{1}{63}\ln|x-4| + \frac{1}{18}\ln|x-5|$$

197. Calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+2)^2(x-1)} \quad .$$

Risposta: Una primitiva è

$$\frac{1}{9}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{6}{x+2}\right) \quad ;$$

quindi, il valore dell'integrale richiesto è

$$\frac{1}{9}\ln 4 + \frac{1}{6} \quad .$$

198. Calcolare $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

Risposta: $\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}$.

Suggerimento: Usare la sostituzione

$$\sqrt{1+x^2}-x=t \implies x=\frac{1-t^2}{2t} \quad , \quad dt=-\frac{t^2+1}{2t^2} \quad ,\cdots$$

In alternativa, si può usare la sostituzione $x=\sinh t$, cioè $t=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, ecc., ecc.

199. Calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Risposta: $\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$.

200.

a) Calcolare $F(z)=\int_0^1 \frac{zdx}{1+e^{zx}}$.

b) Verificare che F è strettamente crescente

c) Calcolare $\lim_{z\to-\infty} F(z) \quad , \quad \lim_{z\to+infty} F(z)$.

Risposta:

a) $\ln\frac{2e^z}{e^z+1}$ (usare la sostituzione $t=e^{zx}$.

b) Basta verificare che $F'(z)$ è sempre positiva.

c) $\lim_{z\to-\infty} F(z)=-\infty \quad , \quad \lim_{z\to+\infty} F(z)=\ln 2$.

201.

a) Calcolare $\int \frac{dx}{\sin x}$.

b) Trovare una formula ricorsiva per calcolare $\int \frac{dx}{\sin^n x} \quad , \quad n\in\mathbf{N}$.

Risposta:

a) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ (usare la sostituzione $t=\tan\frac{x}{2}$).

b) Porre $\int \frac{dx}{\sin^n x}=\int \frac{\sin x}{\sin^{n+1} x}dx$ e integrare per parti.

202. Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 10 tale che sia

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-x^3} - P(x)}{x^{10}} = 0 \quad .$$

Risposta:

$P(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9$.

203. Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 3 tali che risulti

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x) - \sin x}{x^3} = 0 \quad .$$

Risposta: $P(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$

204. Posto $f(x) = \dfrac{2-x^2}{(1+x)^2}$, trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che risulti

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0 \quad .$$

Risposta: $P(x) = 2 - 4x + 5x^2$

205. Trovare un polinomio $P(x)$ di grado ≤ 2 tale che sia

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^2 - P(x)}{x^2} =) \quad .$$

Risposta: $P(x) = 1 - x^2$; infatti

$$(\cos x)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) = 1 - x^2 + \cdots$$

206. Posto $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che sia

$$\lim_{x\to 1} \frac{P(x) - f(x)}{(x-1)^2} = 0 \quad .$$

Risposta: $P(x) = 2 + \dfrac{e}{2}(x-1)^2$

207. Trovare il polinomio $P(x)$ di grado minimo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x) - \tan x}{x^5} = 0 \quad .$$

Risposta: $P(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}$.
Suggerimento: Un modo economico di procedere è il seguente. Poichè $\tan x$ è dispari, $P(x)$ sarà dispari, $P(x) = ax + bx^3 + cx^5$. Quindi, dea

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = ax + bx^3 + cx^5 + \circ(x^5) \quad ,$$

si ricava

$$x - \frac{x}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5) \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^5)\right] \cdot \left[ax + bx^3 + cx^5 + \circ(x^5)\right] \quad ,$$

ed i coefficienti a, b, c si ottengono risolvendo un (semplicissimo) sistema di tre equazioni lineari nelle incognite a, b, c.

208. Dire se è possibile trovare una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due volte derivabile tale che sia

$$f''(x) + f'(x)\sin x - f(x)e^x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad , \quad f(0) > 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} = -\infty \quad .$$

209. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\tan(2x)}{\ln\tan x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\cdot \sin x \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

Risposta: a) 1 b) 0 c) 0

209. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)} \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^{3x} - 1 - 3x} \qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right] \qquad \textbf{f)}\ \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(1\frac{5}{2}x^2\right) + \cos x\right]^{\frac{1}{x^2}}$$

Risposta: a) e b) $\dfrac{1}{e}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{4}{9}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) e^{-3}

210. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{2\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$ **b)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x\sqrt{37+\cos t}dt}{e^{x^2}-1}$ **c)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x\sqrt{23+\cos t}dt}{e^{x^2}-1}$

Risposta: a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\sqrt{38}$ c) $\sqrt{24}$

211. Calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+(x\sin x)^{\frac{1}{4}}\right]}{|x|^\alpha}$ **b)** $\lim_{x\to 0+}\dfrac{(1-\cos x)\ln c+x^\alpha}{\ln(1+x)}$ **c)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x^\alpha\ln x}{\ln(1+x^\alpha}$

d) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$ **e)** $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$

Risposta:

a) $\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<\frac{1}{2}\\ 1 & \text{se } \alpha=\frac{1}{2}\\ +\infty & \text{se } \alpha>\frac{1}{2}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>1\\ 1 & \text{se } \alpha=1\\ +\infty & \text{se } \alpha<1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>2\\ -\infty & \text{se } \alpha\le 2\end{cases}$

d) $\begin{cases}-\infty & \text{se } \alpha>1\\ -\frac{e}{2} & \text{se } \alpha=1\\ 0 & \text{se } \alpha<1\end{cases}$ **e)** $\begin{cases}-\infty & \text{se } \alpha>1\\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha=1\\ 0 & \text{se } \alpha<1\end{cases}$

212. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n}\dfrac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\sin\frac{1}{n}}$ **b)** $\lim_{n}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$

c) $\lim_{n}\left[n-\ln(n^2+1)\right]$ **d)** $\lim_{n}\left(1+\sin\dfrac{2}{n}\right)^n$

Risposta: a) $\dfrac{e}{2}$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) e^2

213. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n}\left(1+\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ **b)** $\lim_{n}\left(1-\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

c) $\lim_{n}\left(1+\sin\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ **d)** $\lim_{n} n\left(\sqrt[n]{10}-1\right)$

Risposte: a) $+\infty$ b) e^{-1} c) 1 d) $\ln 10$

214. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \qquad \textbf{b)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{\log n} - 1\right)$$

$$\textbf{c)}\ \lim_n \left(1 + \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right)^\alpha \qquad \textbf{d)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{100} - \sqrt[n]{10}\right)$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\textbf{c)}\ \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \textbf{d)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \ln 10 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

215. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_n \left(\sqrt[n]{\alpha} - 1\right) \qquad \textbf{b)}\ \lim_n \left(1 + \sin\frac{1}{n^\alpha}\right)^n$$

$$\textbf{c)}\ \lim_n \left(1 - \sin\frac{1}{n^\alpha}\right)^n \qquad \textbf{d)}\ \lim_n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha}$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\ \ln\alpha \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 11 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \qquad \textbf{c)}\ \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \qquad \textbf{d)}\ \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

216. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il limite

$$\lim_n \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(\alpha + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha}} \quad .$$

Risposta: $+\infty$ se $0 < \alpha \leq 1$, 0 se $\alpha > 1$

217. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{39} - \sqrt[n]{13}\right) \qquad \textbf{b)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{48} - \sqrt[n]{12}\right)$$

$$\textbf{c)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{77} - \sqrt[n]{7}\right) \qquad \textbf{d)}\ \lim_n n^\alpha \left(\sqrt[n]{56} - \sqrt[n]{7}\right)$$

Risposta

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \ln 3 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad \textbf{b)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \ln 4 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad \textbf{c)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \ln 11 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad \textbf{d)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \ln 8 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

218. Calcolare $\lim_n \left(\dfrac{n+A}{n+B)}\right)^n$ al variare di $A, B \in \mathbf{R}$.
Risposta: e^{A-B}

219. Calcolare $\lim_n n\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)$ al variare di $a > 0, b > 0$.
Risposta: $\ln \dfrac{a}{b}$

220. Calcolare, al variare di $p \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_n n^p \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \textbf{b)}\quad \lim_n n^p\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad \textbf{c)}\quad \lim_n n^p\left(\frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}\right)$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 1 \\ 1 & \text{se } p = 1 \\ 0 & \text{se } p < 1 \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } p = 2 \\ 0 & \text{se } p < 2 \end{cases} \qquad \textbf{c)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } p = 3 \\ 0 & \text{se } p < 3 \end{cases}$$

221. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_n n^\alpha\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \textbf{b)}\quad \lim_n n^\alpha\left[\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$\textbf{c)}\quad \lim_n n^\alpha\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{n^2}} + 1\right) \qquad \textbf{d)}\quad \lim_n n^\alpha\left(1 - \sqrt[n]{10}\right)$$

Risposte:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4 \end{cases} \quad \textbf{b)}\ \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4 \end{cases} \quad \textbf{c)}\ \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ -\frac{2}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4 \end{cases} \quad \textbf{d)}\ \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\ln 10 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

222. Calcolare

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sin^2 x} \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x} \quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sqrt{1+\sin x}}{x} \quad \textbf{d)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{1}{2}x + x^3}{\tan x - 1 + \cos x}$$

Risposta: a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $3\ln 2$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$

223. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0+}[\ln(1+x)]^x \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0+}(\tan x)^{\sin x}$$

$$\textbf{c)}\quad \lim_{x\to 0+}(\arctan x)^x \qquad \textbf{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x}{e^x-1}$$

Risposta: a) 0 b) 1 c) 1 d) 1

224. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0+}\arcsin x\cdot\log x$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 1+}\frac{2^x-4\cdot 2^{-x}}{(x-1)^2} \qquad \textbf{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+x^2-2}{x\sin^3 x-3\tan^5 x}$$

Risposta: a) 0 b) 0 c) $+\infty$ d) $\dfrac{1}{12}$

225. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{16^x+25^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \textbf{c)}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Risposta: a) $\dfrac{\ln 16+\ln 25}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 1

226. Dimostrare che

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)$$

227. Calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{|x|^\alpha} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\cos x)}{x^2+x^\alpha} \qquad \textbf{c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2-x^2}{|x|^\alpha}$$

$$\textbf{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-e^{x^2}+1}{|x|^\alpha} \qquad \textbf{e)}\quad \lim_{x\to 0+}\frac{\tan x^2+x\ln x}{x^\alpha} \qquad \textbf{f)}\quad \lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)\ln x+x^\alpha}{\ln(1+x)}$$

Risposta:

$$\textbf{a)}\quad \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<4\\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha=4\\ +\infty & \text{se } \alpha>4\end{cases} \qquad \textbf{b)}\quad \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha>2\\ -\frac{1}{4} & \text{se } \alpha=2\\ 0 & \text{se } \alpha<2\end{cases} \qquad \textbf{c)}\quad \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<4\\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha=4\\ -\infty & \text{se } \alpha>4\end{cases}$$

$$\textbf{d)}\quad \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<4\\ -\frac{2}{3} & \text{se } \alpha=4\\ -\infty & \text{se } \alpha>4\end{cases} \qquad \textbf{e)}\quad \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<1\\ -\infty & \text{se } \alpha\geq 1\end{cases} \qquad \textbf{a)}\quad \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1\\ 1 & \text{se } \alpha=1\\ 0 & \text{se } \alpha>1\end{cases}$$

228. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}(\cos t)^2dt}{x}\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-e^{x^2}+1}{\sin^4 x}\qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\frac{1}{2}x+x^3}{\tan x-1+\cos x}$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x\sqrt{10-\cos t}dt}{1o^{x^2}-1}\qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{3^{x^2}-1}\qquad \textbf{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x\sqrt{4\cos t+1}dt}{4^{x^2}-1}$$

Risposta: a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{\ln 10}$ e) $\frac{1}{\ln 3}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{\ln 4}$

229. Calcolare i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n}\left(\frac{3n^2-\ln n+\sqrt{n}}{2n^2+\ln n-\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}\quad \textbf{b)}\ \lim_{n}\left[(n+1)e^{\frac{1}{n+1}}-ne^{\frac{1}{n}}\right]\quad \textbf{c)}\ \lim_{n}\left[2n\sqrt{\ln(2n)}-n\sqrt{\ln n}\right]$$

Risposta: a) $+\infty$ b) 1 c) $+\infty$

230. Dimostrare che $\forall\ x\geq 0$ si ha

$$x-\frac{x^2}{2}+\cdots-\frac{x^n}{n}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\cdots-\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad\forall\ n\in\mathbf{N}\ ,\ n\text{ pari}\quad .$$

228. Dire se le seguenti disuguaglianze sono vere o false:

$$\textbf{a)}\ (1,01)^{1000}<(1,1)^{150}\qquad\qquad \textbf{b)}\ (1,1)^{150}>(1,01)^{10000}$$

Risposta: Si ha

$$1000\ln(1,01)=1000\left(0,01-\frac{(0,01)^2}{2}+\frac{(0,01)^3}{3}-\cdots\right)<1000\cdot 0,01<150\left(0,1+\frac{(0,1)^2}{2}\right)<$$

$$<150\left(0,1-\frac{(0,1)^2}{2}+\frac{(0,1)^3}{3}-\cdots\right)=150\ln(1,1)\quad ,$$

quindi

$$1000\ln(1,01)<150\ln(1,1)\quad ,\quad \text{cioè}\ \ (1,01)^{1000}<(1,1)^{150}\quad .$$

Pertanto la disuguaglianza a) è vera.
La disuguaglianza b) è invece falsa, per dimostrarlo si procede allo stesso modo.

229. Calcolare $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x-1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ con errore minore di $\frac{1}{10}$.

Risposta: $\displaystyle\int_0^1\frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}}{x^{\frac{3}{2}}}dx=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{12}{5}$ dà il valore dell'integrale con errore minore di $\frac{1}{10}$, come richiesto.

230. Calcolare $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$ con errore minore di $\frac{1}{100}$.

Risposta: $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx = \int_o^1 \sqrt{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) dx$, con errore minore di $\frac{1}{100}$.

231. Trovare la curva pasante per il punto $(1,1)$ del piano x, y che ha in ogni punto pendenza uguale a $-\frac{y}{x}$.

Risposta: $y(x) = \frac{1}{x}$.

232. Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Risposta: $y(x) = c \cdot x$

233. Trovare il polinomio di McLaurin $P(x)$ di grado 3 della soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} .$$

Risposta: $P(x) = 2 + 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$

234. Idem 233 per i problemi

$$\textbf{a)} \begin{cases} y'(x) = x + y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} y'(x) = -\frac{y(x)}{x+y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risposta: a) $P(x) = -1 - x$ b) $P(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$

234. Risolvere il problema

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) + 4 = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = \frac{5}{t} - 4$, definita per $t < 0$.

235. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{t}y = 3t \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = 3t(t-1)$

236. Risolvere l'equazione $y'(t) + y(t) = 1$ e calcolare $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Risposta: $y(t) = 1 + ce^{-t}$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.

237. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y' + y = 1 \\ y(0) = 5 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = 4e^{-t} + 1$.

238. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y' + y = e^{-t} \\ y(0) = 5 \end{cases} .$$

Risposta: $5e^{-t} + te^{-t}$.

239. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y' + 2ty = 2t \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = 1 - e^{-t^2}$.

240. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = 100y(t) - y^2(t) \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

e calcolare, se esiste, $T > 0$ tale che sia $y(T) = 500$.

Risposta: $y(t) = \dfrac{100}{1 - \frac{9}{10}e^{-100t}}$, $T = \dfrac{1}{100} \ln \dfrac{9}{8}$.

241. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = 10y(t) - y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e calcolare, se esiste, $T > 0$ tale che sia $y(T) = 50$.

Risposta: $y(t) = \dfrac{10}{1 + \frac{9}{10}e^{-10t}}$, T non esiste (in questo caso $y(t) < 10 \ \ \forall\, t$.

242. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)\,[N - y(t)] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e calcolare T tale che $y(T) = \dfrac{N}{2}$.

Risposta: L'equazione si scrive $\dfrac{y'}{y(N-y)}$, cioè $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{y'}{y} + \dfrac{y'}{N-y}\right) = 1$, e quindi

$$\frac{1}{N}\left(\ln|y| - \ln|N-y|\right) = t + c \quad , \quad \text{cioè} \quad \ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = N(t+c) \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\left|\frac{y}{N-y}\right| = e^{N(t+c)} \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{y}{N-y} = ke^{Nt} \quad .$$

Da $y(0) = 1$ si ricava $\dfrac{1}{N-1} = k$ e quindi la soluzione è data da

$$\frac{y}{N-y} = \frac{e^{Nt}}{N-1} \quad .$$

Da $y(T) = \dfrac{N}{2}$ si ottiene $\dfrac{\frac{N}{2}}{N - \frac{N}{2}} = \dfrac{e^{NT}}{N-1}$, cioè $N - 1 = e^{NT}$ e quindi

$$T = \frac{\ln(N-1)}{N} \quad .$$

243. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y''(t) = ty'^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}.$$

Risposta: $y(t) = 1 - 2\arctan t$. Suggerimento: porre $v(t) = y'(t)$.

244. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y''\sqrt{y} - y' = 0 \\ y(0) = \frac{1}{4} \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Risposta: $y(t) = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2$. Suggerimento: scrivere l'equazione nella forma $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = (2\sqrt{y})'$.

245. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Risposta: $y(t) = -e^{-2t} + 2e^t$.

241. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $y'' - y' - 2y = 0$ **b)** $y'' - 2y' - 8y = 0$ **c)** $y'' - 8y' + 15y = 0$

d) $y'' + 16y = 0$ **e)** $y'' + a^2y = 0$ **f)** $y'' + y' - 3y = 0$

Risposta:

a) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ **b)** $y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-2t}$ **c)** $y(t) = c_1e^{5t} + c_2e^{3t}$

d) $y(t) = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t$ **e)** $y(t) = c_1\cos|a|t + c_2\sin|a|t$ **f)** $y(t) = c_1e^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}t} + c_2e^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}t}$

242. Risolvere i seguenti problemi:

a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y'' - 2y' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y'' + 25y = 0 \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = 10 \end{cases}$

Risposta: a) $y(t) = -e^t + 2e^{2t}$ b) $y(t) \equiv 0$ c) $y(t) = 2e^t + e^{-2t}$ d) $y(t) = e^t(4\cos 3t - \sin 3t)$
e) $y(t) = e^{(1+\sqrt{2})t} - e^{1-\sqrt{2})t}$ f) $10\cos 5t + 2\sin 5t$

243. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = t^2 e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = e^t - te^t + \dfrac{t^4 e^t}{12}$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare della forma $y_p(t) = ct^4 e^t \quad , \quad c$ costante.

244. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + 25y = 5t \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -4,8 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = 5\cos 5t - 5\sin 5t + 0,2t$.

245. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 4e^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = e^t + 2te^{3t}$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare della forma $y_p(t) = cte^{3t}$.

246. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18t^2 - 7 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} .$$

Risposta: $y(t) = -e^{3t} + 3t^2 + 5t + 2$.

247. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' + 9y = \cos t \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \dfrac{1}{3}\cos 2t$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare della forma $y_p(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$.

248. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - 2py' + p^2 y = e^{pt} \quad , \quad p \in \mathbf{R} \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 e^{pt} + c_2 te^{pt} + \dfrac{1}{2}t^2 e^{pt}$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare della forma $y(t) = At^2 e^{pt}$.

249. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - (p+q)y' + pqy = e^{pt} \quad , \quad p, q \in \mathbf{R} \quad , \quad p \neq q \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{qt} + \dfrac{te^{pt}}{p-q}$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare del tipo $y_p(t) = Ate^{pt}$.

250. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' + y' = t^4 \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \dfrac{t^5}{5} - t^4 + 4t^3 - 12t^2 + 24t$.

251. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenxiale

$$y'' + q^2 y = \cos qt \qquad (q \in \mathbf{R}, q \neq 0) \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 \cos qt + c_2 \sin qt + \dfrac{t \sin qt}{2q}$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare del tipo $y(t) = x(\cos qt + B \sin qt)$.

252. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' + q^2 y = \sin qt \qquad (q \in \mathbf{R}, q \neq 0) \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 \cos qt + c_2 \sin qt + \dfrac{t \cos qt}{2q}$.

253. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos t \quad .$$

Risposta: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \dfrac{1}{2} t \sin t$.

254. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + y = \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad .$$

Risposta: $y(t) = \sin t + \dfrac{1}{2} t \sin t$.

255. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \ y'' + y' + y = e^{-t} \qquad \textbf{b)}\ \ y'' + y' + y = \cos t \qquad \textbf{c)}\ \ y'' + y' = t^2$$

Risposta:

a) $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + e^{-t}$

b) $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + \sin t$

c)$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + 2t - t^2 + \dfrac{t^3}{3}$

256. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - y' + y = te^t$$

Risposta: $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}t \right) + e^t + te^t$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare del tipo $y_p(t) = Ate^t + Be^t$.

257. Risolvere i problemi

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \sin t \\ y(0) = \frac{3}{10} \\ y'(0) = \frac{1}{10} \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} y'' + 25y = 50t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \textbf{c)}\ \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risposta:
a) $y(t) = \dfrac{3}{10} \cos t + \dfrac{1}{10} \sin t$ b) $y(t) = 2t$ c) $y(t) = 1 + e^{-2t} \sin t$.

258. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$\textbf{a)}\ \ y'' - 4y' + 3y = e^t \quad \textbf{b)}\ \ y'' - 5y' + 6y = e^{2t} \quad \textbf{c)}\ \ y'' - y' - 2y = e^{-t}$$

Risposta:

a) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \dfrac{te^t}{2}$ **b)** $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - te^{2t}$ **c)** $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \dfrac{1}{3} e^{-t}$

259. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = (2t + 1)e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{4}{25} \end{cases} .$$

Risposta: $-\dfrac{1}{50} e^t + \dfrac{1}{50} e^{6t} - \left(\dfrac{t^2}{5} + \dfrac{7t}{25} \right) e^t$. Suggerimento: cercare una soluzione particolare del tipo $y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^t$.

260. Trovare, al variare del parametro $\lambda > 0$, le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} .$$

Risposta: Se $\lambda = k^2\pi^2, k \in \mathbf{Z}$, allora tutte le funzioni del tipo $y(t) = c \sin \sqrt{\lambda} t$, $c \in \mathbf{R}$, sono soluzioni del problema. Altrimenti deve essere $c = 0$ e quindi l'unica soluzione del problema è quella identicamente nulla.

261. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = A \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = B \end{cases} .$$

Risposta: la soluzione (unica) è $y(t) = A \cos t + B \sin t$.

262. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = A \\ y(\pi) = B \end{cases} .$$

Risposta: se $A \neq -B$ il problema non ha soluzione, mentre se $A = -B$ il problema ha come soluzioni tutte le funzioni della forma $y(t) = A \cos t + C \sin t$, $c \in \mathbf{R}$.

263. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0 \end{cases} .$$

Risposta: Le soluzioni sono tutte le funzioni della forma $y(t) = e^{-2t}(c \sin t + \cos t)$, $c \in \mathbf{R}$.