Lezione di lunedì 11-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

- Introduzione al corso.
- Insiemi di numeri.
  - i numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.
  - i numeri interi $\mathbb{Z}$.
  - i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Richiami alle operazioni con le frazioni: somma, prodotto e loro inverse. L'opposto ed il reciproco. La notazione $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Proprietà dei numeri razionali: della somma, del prodotto, di ordinamento, di legame, di Archimede. Interpretazione geometrica della proprietà di Archimede con riferimento alla retta reale.
  - Irrazionalità di $\sqrt{2}$. I numeri reali e loro proprietà (pag. 3). Proprietà 1.1. Proprietà 1.2 (dimostrazione di R1 facoltativa!).

Lezione di mercoledì 13-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo I, pag. 5 - 8 comprese.

- Proprietà 1.3.
- Il valore assoluto e le sue proprietà (esclusa la dim. del corollario di fine pag. 8).
- Gli intervalli: definizione e simbologia. Intorno: $|x - x_0| < r$ e suo complementare.
- Definizione di successione $a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Successioni monotone crescenti e decrescenti.
- Il principio di incastro come proprietà caratterizzante $\mathbb{R}$. Dimostrazione che il principio è falso in $\mathbb{Q}$ prendendo due successioni a valori in $\mathbb{Q}$ che non hanno limite in $\mathbb{Q}$.

Lezione di lunedì 18-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo I, pag. 9 - 13 comprese.

- I limiti di successioni: illustrazione grafica (al calcolatore) dei seguenti casi
  - $a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$, $a_n \to L \in \mathbb{R}$. Formulazioni matematiche, in termini di disequazioni, dei concetti desunti dalle figure.
  - Successioni che non hanno limite: $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Illustrazione grafica (saltare Nota 1-3).
  - Primi teoremi sui limiti:
    - unicità del limite (senza dimostrazione);
    - teoremi di confronto sia nel caso di limite infinito che nel caso di limite finito (teorema dei due carabinieri);
    - teorema della permanenza del segno;
    - ogni successione convergente è limitata;
    - operazioni con i limiti (senza dimostrazione).

Lezione di mercoledì 20-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo I, pag. 14 - 20 comprese (leggere, per conoscenza, pag. 18-19; studiare bene gli esempi di fine pag. 20).

- Proprietà $(1+\xi)^n > 1 + n\xi$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi > 0$ con cenno alla dimostrazione.
- Richiamo sui limiti fondamentali n^k, $k \in \mathbb{N}$ e a^n, $a \geq 0$.
- Teorema sull'algebra dei limiti con dimostrazione solo della somma.
- Le forme indeterminate per somma, prodotto e quoziente (queste ultime evinte da quelle del prodotto). Commento a espressioni del tipo $5/+\infty$. Esempi di indeterminazione.
- Esercizio 1.7 (saltare il commento all'esercizio 1.6 e l'esempio 1.2).
- Il simbolo di sommatoria. Significato di scritture del tipo

  $$\sum_{k=1}^{10} a_k, \quad \sum_{k=5}^{8} a_k, \quad \sum_{k=10}^{10} a_k.$$

  La progressione geometrica come successione $S_n(x)$ e suo limite in tutti i casi (ossia, $\forall x \in \mathbb{R}$) (senza la dimostrazione). Esempi:

  - trovare la frazione generatrice di $0,\overline{3}$;
  - calcolare la somma

    $$\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{2}{3^k}.$$

Lezione di venerdì 22-10-2010 ore 14:15 - 16:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo I, pag. 21 - 24 comprese.

- Calcolo del valore della somma
$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$
a partire dall'identità $(1-x)\cdot(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$. E' stato trattato anche il caso $x=1$.
- Calcolare
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1}{10}\right)^k$$
- I numeri razionali hanno sviluppo periodico o finito (Teoremi 1.2 e 1.3, senza dimostrazione).
- Tra due numeri reali qualsiasi cadono numeri razionali e irrazionali (Teorema 1.4, con dimostrazione <u>facoltativa</u>).
- Metodo di dimostrazione per induzione.
- Il fattoriale
  - definizione ed esempi. $5! = 120$, $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$, $(n+1)! - n! = n \cdot n!$.
  - Stima elementare del fattoriale con dimostrazione della parte riportata pag. 22 (Esercizio 1.8).
- Legame tra limite di a_n e quello di $|a_{n+1}/a_n|$ (Proprietà 1.10).

Lezione di lunedì 25-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo I, pag. 26 - 35, comprese.

- Esercizio: dimostrare che $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.
- Potenze e radici
  - Fare Nota 1.6 e Nota 1.7 (leggere Nota 1.8)
  - Enunciato del Teorema 1.5 (senza dimostrazione)
  - Fare Definizione 1.4
- Alcune formule utili
  - Leggere pag. 28 e pag. 30
- Un limite importante
  - Conoscere bene il risultato (leggere la dimostrazione)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

  - Fare e conoscere bene l'Esercizio 1.12
- Estremo superiore
  - Conoscere le definizioni di insieme sup. limitato, inf. limitato, limitato, maggiorante e minorante (pag. 30 - 31).
  - Definizione 1.5 e analoga per l'estremo inferiore
  - Teorema 1.6 e analogo per l'estremo inferiore (senza dimostrazione)
  - Vedere Esercizio 1.16
  - Saltare Esercizi 1.13, 1.14, 1.15 e Teorema 1.7.
- Sottosuccessioni
  - Definizione
  - Teorema di Bolzano-Weierstrass (con dimostrazione facoltativa)
  - Enunciato del Teorema 1.10 a pag. 47.
  - Leggere la domanda a pag. 54.

Lezione di martedì 26-10-2010 ore 10:30 - 12:15, aula Lu3

Riferimento nel testo: esercizi.

- Risolvere l'equazione $|\,|x| + x\,| = 0$
- Risolvere le disequazioni

$$|3x + 2| \leq 5, \qquad \left|\frac{3x - 2}{2 + x}\right| \leq 4$$

- Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3 + n} - n\right), \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{n^p \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\right\},\ p \in \mathbb{R}$$

- Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3 + 3n + 1}{2^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n + n^3}{3^n + n^2}$$

- Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n + n}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{n^2 + 2}}.$$

Lezione di mercoledì 27-10-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo 2.

- Esercizio: calcolare

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + n^{1000}}$$

  utilizzando il teorema del confronto ed il limite fondamentale (Cap. 1, pag. 24)

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty, \ \ \forall\, a > 1,\ p \in \mathbb{N}$$

  Per $a = 3$ e $p = 1000$ si ha quindi

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^{1000}} = +\infty$$

  per cui preso $M = 1$ esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

  $$\frac{3^n}{n^{1000}} > 1 \quad \forall n > \nu$$

  Dunque, abbiamo

  $$n^{1000} < 3^n \quad \forall n > \nu$$

  che permette di giustificare la seguente disuguaglianza

  $$3^n < 3^n + n^{1000} < 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$$

  Estraendo le radici n-esime (ricordarsi di pag. 26, nota 1.6 del Cap. 1) si ottiene

  $$3 < \sqrt[n]{3^n + n^{1000}} < \sqrt[n]{2} \cdot 3$$

  da cui il risultato segue in virtù del teorema dei due carabinieri e del limite fondamentale

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

- Funzioni e loro grafici(pag. 17-18): dominio, codominio, immagine, grafico. Proprietà del grafico di una funzione: ogni retta verticale lo incontra in al più un punto.
  - Dell'Esempio 2.8, fare soli i punti a), b), c).
- Funzioni lineari affini $f(x) = mx+q$ (pag. 18-19): grafico (è una retta). Rette parallele e perpendicolari.
- La funzione $f(x) = ax^2+bx+c$: grafico (è una parabola) e sue proprietà, con particolare riguardo a
  - concavità (verso l'alto per $a > 0$ e verso il basso per $a < 0$;
  - simmetria rispetto alla retta $x = -b/(2a)$ (asse della parabola);
  - coordinate del vertice $V = (-b/(2a), f(-b/(2a)))$ ed eventuali intersezioni con l'asse delle ascisse (soluzioni di $f(x) = 0$).
- Valore assoluto.

- Funzioni monotone (pag. 20).
- Funzioni pari e dispari (pag. 20) compresa la simmetria del grafico rispetto all'asse y (pari) e all'origine (dispari).
- Composizione di funzioni (pag. 26): definizione, non commutatività, Esercizio 2.18.
- Funzioni iniettive, funzione inversa (pag. 27 - 28): definizioni, proprietà. Simmetria del grafico di f^{-1} rispetto alla retta $y = x$.
- limite di una funzione (pag. 5): definizione ed illustrazione grafica del concetto di limite.

Lezione di martedì 2-11-2010 ore 10:30 - 12:15, aula Lu3

Riferimento nel testo: capitoli 2 e 4.

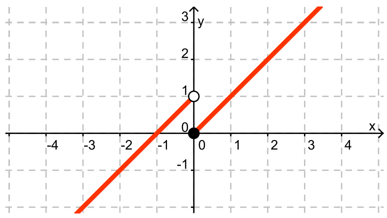
- Non sempre esiste il limite: la funzione

  $$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x<0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

  non ha

  $$\lim_{x \to 0} f(x)$$

  come s i vede dalla seguente figura.



- Limite sinistro e destro: formulazione in termini di disequazioni e traduzione sul grafico. Esempio: la funzione precedente ha

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

- Proprietà del limite.
  - Unicità del limite.
  - Algebra dei limiti (Proprietà 2.1).
  - Teorema dei due carabinieri con illustrazione grafica (Proprietà 2.2)
- Funzioni continue: definizioni ed esempi.
  - Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue è una funzione continua.
  - $F(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ è continua.
  - Pertanto, sono continue

    $$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$$

  - Una applicazione tipica: calcolare

    $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x}{x-1} \overset{(*)}{=} \frac{2^2+2}{2-1} = 6$$

    dove $(*)$ sfrutta la continuità della funzione $(x^2+x)/(x-1)$ per $x_0 = 2$.

- Esercizio: calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

- La derivata in un punto x_0: definizione come limite del rapporto incrementale $R(h)$. Funzioni derivabile in un intervallo I e funzione derivata $f'(x)$.

- Esempio: calcolare la derivata di $f(x)=\sqrt{x}$: si trova

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

valida per $x>0$. Commento al caso $x=0$. Estendo l'esempio enunciando che

$$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=nx^{n-1}$$

$$f(x)=x^{1/n}, n=2,3,4,5,\cdots \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

- Non sempre una funzione è derivabile nel punto x_0. Esempi: $f(x)=|x|$, $f(x)=\sqrt{|x|}$ per $x_0=0$. Per la prima abbiamo

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

dato che in un intorno destro di $x_0=0$ è $h<0$ e, di conseguenza, $|h|=-h$. Analogamente

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

dato che in un intorno destro di $x_0=0$ è $h>0$ e quindi $|h|=h$. Essendo i due limiti differenti, non esiste il limite del rapporto incrementale per $x=x_0$ e quindi la funzione $f(x)=|x|$ non è derivabile per $x_0=0$.

  - Derivata destra (pag. 16): esiste finito

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

  - Derivata sinistra (pag. 16): esiste finito

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

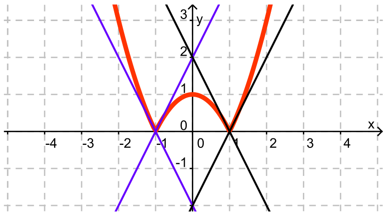
Quindi, la funzione $f(x)=|x|$ ha derivate sinistra (che vale -1) e destra (che vale $+1$).

  - Anche la derivata destra e/o sinistra possono non esistere. Esempio: $f(x)=\sqrt{|x|}$ non ha né derivata destra né derivata sinistra.

- Interpretazione geometrica della derivata. Retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto $(x_0,f(x_0))$

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Equivalenza tra l'esistenza della derivata prima e della retta tangente. Esempio: $f(x)=|x^2-1|$ non è derivabile per $x_0=-1$ e per $x_0=1$ dove, effettivamente, abbiamo due rette tangenti: una a destra del punto ed una a sinistra.



- Una funzione derivabile in x_0 è continua in x_0 (con dimostrazione). Il viceversa non è vero: $f(x) = |x|$ è continua in $x_=0$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$. Idem per $f(x) = \sqrt{|x|}$. Analogo per $f(x) = |x^2 - 1|$ per $x = \pm 1$.
- Algebra delle derivate (Proprietà 2.3):
  - Derivata della somma.
  - Derivata del prodotto.
  - Derivata del quoziente.
  - Derivata della funzione composta (Teorema 4.1, Cap. 4).
  - Derivata della funzione inversa (Teorema 4.2, Cap. 4).

Lezione di mercoledì 3-11-2010 ore 9:30 - 12:15, aula Lu4

Riferimento nel testo: capitolo 2.

- Esempio: calcolo delle derivate

$$\text{(i) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}, \qquad \text{(ii) } f(x) = \sqrt{2x^3+x^2}, \qquad \text{(iii) } f(x) = \sqrt{g(x)}.$$

- Derivate di ordine successivo: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ dove $f^{(0)}(x) = f(x)$ per convenzione.

- A partire dal polinomio di grado $n = 5$

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$$

  tramite il calcolo delle derivate e generalizzando il ragionamento ad un grado n arbitrario abbiamo ottenuto la relazione

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

  con la convenzione che $0! = 1$.

- Ponendo $x = a/b$ nel polinomio $P(x) = (1+x)^n$ ed utilizzando la relazione precedente si ottiene la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \text{dove} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

  sono i coefficienti binomiali. Questi coefficienti si possono ottenere dal triangolo di Tartaglia.

- Legame tra la monotonia di f ed il segno di f':
  - $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \uparrow$ in (a, b)
  - $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \downarrow$ in (a, b)
  - $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$costante in (a, b)

  Sostituendo il segno $\geq$ con $>$ e $\leq$ con $<$ si ottiene la crescenza e decrescenza stretta. Questo fatto con è però invertibile: la funzione $f(x) = x^3$ è monotona crescente in senso stretto su $\mathbb{R}$ ma è $f'(0) = 0$.

- Punti di massimo/minimo relativo e assoluto (detti punti di estremo).
  - definizioni
  - $f'(x_0) = 0$ allora x_0 è di massimo o minimo a seconda del (cambiamento di) segno della derivata prima in un intorno di x_0:

$$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + \quad \text{sign}(\, f'(x)\,) \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ è di minimo}$$

$$+ + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - \quad \text{sign}(\, f'(x)\,) \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ è di massimo}$$

- Esercizio: calcolare estremo inferiore ed estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{1}{n} - \frac{1000}{n^2}, n = 1, 2, 3, 4, \cdots \right\}$$

L'esercizio è stato risolto introducendo e studiando il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1000}{x^2}$$

Infatti, è $a_n = f(n)$. Dal grafico si trova che $a_1 = -999$ è il minimo e $a_{2000} = 1/4000$ è il massimo

- Esercizio: discutere il limite al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^p + n} - n \right)$$

Lezione di lunedì 8-11-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

Riferimento nel testo: capitolo 2, Capitolo 3, Capitolo 4.

- Concavità e convessità.
  - Definizione geometrica: f convessa in (a, b) se il segmento per P_1, P_2 sta sopra il grafico $\mathcal{G}(f)$ comunque si scelgono i punti P_1 e P_2. Esempio di grafico. (Cap. 2, pag. 22)
  - f concava in (a, b) se $-f$ è convessa in (a, b). Esempio di grafico.
  - Traduzione analitica dell'idea geometrica e sua generalizzazione (Cap. 2, pag. 23, 24). Tralasciare Esercizio 2.16. Sapere l'equazione (***) di pag. 24, Cap. 2.
  - Criterio di convessità basato sul segno di $f''(x)$: Teorema 2.2 (solo enunciato) e suo corollario (pag. 25).
  - Leggere osservazione 2.3 (Cap. 2, pag. 25).
  - Sapere bene Esercizio 2.17: grafici delle funzioni $fx) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ e delle corrispondenti inverse. (Cap. 2, pag. 25, 26).
- Definizione dei limiti (Cap. 3, pag. 8)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

  e degli analoghi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

  Formulazione in termini di disequazioni: ad esempio, per il primo limite si ha

$$\forall\, M > 0, \exists\, \delta = \delta(M) : f(x) > M \;\forall\, x : x_0 < |x - x_0| < \delta$$

  Interpretazione grafica delle varie situazioni in termini di intorni di x_0.
- Asintoti (Cap. 4, pag. 3, 4).
  - Definizione di asintoto obliquo ed orizzontale $y = ax + b$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
    - Significato geometrico dell'asintoto per $x \to +\infty$: il grafico di f tende a confondersi con quello della retta $y = ax + b$ per x "grandi".
    - Esempi (per via grafica) di asintoti.
    - Calcolo di a e b.
    - Non sempre le funzioni hanno asintoto obliquo: $f(x) = x^2$ non ha asintoti obliqui.
  - Asintoto verticali: definizioni ed esemplificazioni grafiche di varie situazioni.

Lezione di martedì 9-11-2010 ore 9:30 - 12:15, aula Lu4

Riferimento nel testo: Capitolo 3, Capitolo 4.

- Calcolare gli asintoti obliqui della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

- Calcolo dell'area

$$\int_a^b t^p dt \quad 0 < a < b, \quad p \in \mathbb{N}$$

  - Definisco l'area tra a ed $a < x$

$$A(x) = \int_a^x t^p dt$$

    e, dato che il trapezoide sparisce, $A(a) = 0$.

  - Fornisco una stima per eccesso ed una per difetto della variazione$A(x+h) - A(x)$ studiando separatamente i due casi di $h > 0$ e di $h < 0$. Il ragionamento utilizza le nozioni elementari di area.

  - Si fa tendere $h \to 0$ e si osserva che

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

  - E' noto che

$$F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \qquad \Rightarrow \qquad F'(x) = x^P$$

  - per cui risulta

$$[\,F(x) - A(x)\,]' = x^p - x^p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F(x) - A(x) = c$$

    dove c è una costante che può essere determinata osservando che

$$F(a) - A(a) = c$$

    ma $A(a) = 0$ per cui risulta $c = F(a) = a^{p+1}/(p+1)$.

  - In conclusione è

$$A(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

- Il logaritmo naturale

  - Per $x > 0$ introduciamo la funzione

$$L(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt & , \quad 1 \le x \\ -\int_1^x \frac{1}{t}\, dt & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Ragionando come per il caso di x^p, risulta

  $$L'(x) = \frac{1}{x}$$

  quindi, f è crescente ($f(x) > 0$ per $x > 0$) ed essendo

  $$L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

  con la concavità rivolta verso l'alto. Inoltre, valgono le relazioni (Proprietà 3.1 e relativo Corollario: dimostrazione solo del corollario)

  $$L(a \cdot b) = L(a) + L(b), \qquad L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b)$$

  e (Pag. 8, dimostrazione solo del limite per $x \to +\infty$, omessa quella per $x \to 0^+$)

  $$\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$$

- Esercizio 3.2: sapere **molto bene**, soprattutto la tecnica usata, perché è il capostipite di una famiglia di esercizi tipici dell'esame!

Lezione di mercoledì 10-11-2010 ore 16:15 - 18:15, aula P4

- Esercizi: calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2},\qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right),\qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}}$$

- Esercizio: determinare, al variare del parametro $\lambda\in\mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}=\lambda\cdot x$$

  Osservato che $x=0$ non può essere soluzione, il problema è equivalente a trovare il numero di intersezioni della retta orizzontale $y=\lambda$ con il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{3-x}{x^3}$$

  e, quindi, è ricondotto allo studio del grafico di una funzione.

- Proprietà 3.1 (senza dimostrazione), (Cap. 3, pag. 10) e relativo corollario (con dimostrazione) di pag. 11.
  - Esercizio 3.2, punto b). Fare gli altri.
  - Esercizio 3.3, punto a). Fare gli altri.