Esercizi per il corso di Matematica per Biotecnologie Sanitarie
a.a. 2010–2011

Es. 1

Si considerino gli insiemi $A = \{2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.
(i) Calcolare $A \cap B$
(ii) Calcolare $B \backslash A$
(iii) Calcolare $A \times B$
(iv) Esiste una funzione $f : A \mapsto B$ tale che $\mathrm{Im}(f) = B$?

Es. 2

Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme delle coppie ordinate (x, y) date da

$$A = [-1, 1] \times (-1, 1)$$

Suggerimento: $(x, y) \in A$ se e solo se $x \in [-1, 1]$ e $y \in (-1, 1)$.

Es. 3

Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme delle coppie ordinate (x, y) date da

$$A = \{1\} \times \mathbb{R}.$$

Suggerimento: $(x, y) \in A$ se e solo se $x = 1$ e $y \in \mathbb{R}$. Quindi, si ottiene la retta $x = 1$.

Es. 4

Si considerino i due numeri $x = \sqrt{5}$ e $y = \sqrt{5} - 1$.
(i) Dimostrare che $x \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Sapendo che $x \notin \mathbb{Q}$, dimostrare che $y \notin \mathbb{Q}$.

Es. 5

Dimostrare che $\sqrt[3]{5}$ è irrazionale.

Es. 6

Si consideri il numero

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$$

(i) Esprimere x come frazione p/q dove $p, q \in \mathbb{N}$.
(ii) Calcolare il 50 % ed il 75 % di x.

Es. 7

Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?
V☐ F☐ tra due numeri irrazionali distinti c'è sempre almeno un numero intero;
V☐ F☐ tra due numeri razionali distinti c'è sempre almeno un numero irrazionale;
V☐ F☐ tra due numeri razionali distinti ci sono sempre infiniti numeri razionali;
V☐ F☐ il prodotto di due numeri irrazionali distinti è sempre un numero irrazionale.

Es. 8

Si consideri l'equazione di primo grado dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$(k^2 - 1)x = k - 1$$

(i) Per quali valori di k l'equazione ha un'unica soluzione?
(ii) Per quali valori di k l'equazione non ha soluzione?
(iii) Per quali valori di k l'equazione ha infinite soluzioni?

Es. 9

Determinare gli eventuali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinché l'equazione

$$kx^2 - (k^2 + 1)x + k = 0$$

non abbia alcuna soluzione (reale).

Es. 10

Rappresentare nel piano cartesiano i punti $A = (-1, 2)$ e $B = (2, -2)$.
(i) Calcolare $\overline{AB}$.
(ii) Calcolare le coordinate del punto medio M del segmento AB.
(iii) Trovare l'equazione della retta r passante per A e per B.
(iv) Calcolare il coefficiente angolare della retta r.
(v) Calcolare l'intersezione della retta r con l'asse x.

Es. 11

Determinare la retta s ortogonale a $r : 2x + y - 1 = 0$ e passante per $P = (1, 2)$.

Es. 12

Determinare la retta s parallela a $r : 2x + y - 1 = 0$ e passante per $Q = (2, 1)$.

Es. 13

Risolvere le seguenti disequazioni o sistemi di disequazioni

$$\text{(i) } x - 1 > \frac{1}{x} \qquad \text{(ii) } \begin{cases} -x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 5x < 0 \end{cases} \qquad \text{(iii) } \log_{1/2}(2x - 2) \leq -2 \qquad \text{(iv) } e^{x^2+1} > e^{2x}$$

Es. 14

Rappresentare nel piano cartesiano il grafico dell'equazione

$$F(x, y) = (y - 1) \cdot [y - x^2 + 2x)] = 0.$$

Es. 15

Rappresentare nel piano cartesiano i grafici delle equazioni

$$\text{(i) } F(x, y) = 9y^2 - 4x^2 = 0, \qquad \text{(ii) } F(x, y) = y^2 + x^2 = 0.$$

Es. 16

Rappresentare nel piano cartesiano i grafici delle equazioni

$$\text{(i) } F(x,y) = [x^2+y^2-4]\cdot[x^2+y^2-1] = 0, \qquad \text{(ii) } F(x,y) = x\cdot(y-x)^2 = 0.$$

Es. 17

Rappresentare nel piano cartesiano il grafico dell'equazione

$$F(x,y) = (y-x-1)\cdot[(x-1)^2+(y-2)^2-1)] = 0.$$

Es. 18 (*)

Rappresentare nel piano cartesiano il grafico dell'equazione

$$F(x,y) = |x|+|y|-1 = 0.$$

Suggerimento: Osservare che se la coppia (x,y) soddisfa l'equazione allora anche le coppie $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ la soddisfano (perché?). Dunque, basta studiare l'equazione per $x \geq 0$ e per $y \geq 0$ ed estendere il grafico ai restanti quadranti utilizzando le simmetrie precedenti. Ma, nel primo quadrante risulta $|x| = x$ e $|y| = y$ per cui l'equazione si riduce a $x+y=1$ e questa è una retta...

Es. 19

Calcolare le espressioni

$$\text{(i) } [\sin(\pi+x)+\cos(-x)]^2 - \sin(2x)$$

$$\text{(ii) } \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Es. 20

Sapendo che $0 < x < \pi/2$ e $\cos(x) = 1/3$, calcolare

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Suggerimento: Abbiamo

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Es. 21

Dimostrare che esistono infinite coppie (x,y) di numeri reali tali che

$$\sin(x+y)+\sin(x-y) = 1.$$

Trovare due di queste coppie.

Es. 22

Risolvere le equazioni

$$\text{(i) } \sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{(ii) } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(iii) } \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Es. 23

Un triangolo rettangolo ha l'angolo $\alpha = 15°$. Sapendo che l'ipotenusa misura 10 cm, calcolare l'area del triangolo. (Suggerimento: è $A = 0,5a \cdot b = 0,5c^2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$)

Es. 24

Appoggiandosi alle formule di bisezione, dopo aver osservato che $\pi/12 = (1/2) \cdot (\pi/6)$, calcolare

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Es. 25

Partendo dal sistema

$$\begin{cases} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) & = & 1 \\ \\ \mathrm{tg}(\alpha) & = & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

dimostrare le due identità

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\mathrm{tg}^2(\alpha)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)} \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)}$$

Per quali valori dell'angolo α valgono le due identità?

Es. 26

Determinare, se possibile, una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tale che

$$\text{(i) } \mathrm{Im}(f) = [\,0, 2\,], \quad \text{(ii) } [\,f(x)\,]^2 \leq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$$

Es. 27

Sia

$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Determinare, se possibile, uno $\xi \in [0, 1]$ ed un $\delta > 0$ tali che $f(x) > 0 \;\forall\, x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Es. 28

Sia

$$f(x) = \sqrt{|x|}.$$

Dopo aver dimostrato che f è pari, disegnarne il grafico. Determinare, poi, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \cos(x)$.

Es. 29

A partire dalla funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ si costruiscono le due funzioni

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dimostrare che

(i) p è pari e d è dispari;

(ii) vale la relazione

$$f(x) = p(x) + d(x)$$

e, quindi, ogni funzione può essere scritta come la somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

Es. 30

Trovare una coppia di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, continue, diverse tra loro e non costanti f e g, tali che

$$[\, f(x)\,]^2 + [\, g(x)\,]^2 = 2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es. 31

Trovare il periodo di ciascuna delle seguenti funzioni

$$\text{(i) } f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right), \qquad \text{(ii) } f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{(iii) } f(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$$

Es. 32

Le prese elettriche forniscono una tensione $v(t)$ che dipende dal tempo t secondo la legge

$$v(t) = V_M \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t + \phi\right)$$

dove $V_M = 220$ V (V sta per Volt, l'unità di misura della tensione) e ϕ è un angolo.

(i) dimostrare che v ha periodo T;

(i) sapendo che la frequenza è $f = 1/T = 50$ Hz (Hertz, 1Hz $= 1 \cdot s^{-1}$), calcolare il periodo T di v;

(ii) assunto $\phi = \pi/4$, riportare nel piano cartesiano alcuni periodi della funzione v.

Es. 33

La quantità $q(t)$ di materiale radioattivo varia con il tempo t secondo la legge

$$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

dove $\tau > 0$ è detto costante di tempo e Q_0 è un numero dato.

(i) riportare in un grafico l'andamento di $q(t)$ per $Q_0 = 1$ e $\tau = 0,1$ s;

(ii) determinare il tempo di emivita $t_{1/2}$ definito dall'equazione

$$q(t_{1/2}) = \frac{q(0)}{2};$$

(iii) quali sono i significati di $t_{1/2}$ e di Q_0?

Suggerimento: $2 = e^{\ln(2)}$.

Es. 34

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) = \log_\pi(x)$$

Es. 35

Risolvere l'equazione

$$e^x + 1 = e^{x+1}$$

Es. 36

Risolvere l'equazione
$$\sin^3(x) + 2\sin^2(x) = 0$$

Es. 37

Trovare, se esiste, una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tale che
$$f(\,f(x)\,) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Es. 38

Trovare, se possibile, due funzioni f e g, diverse tra loro, tali che
$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Es. 39

Siano
$$f(x) = 2x^2 + x - 1, \quad g(x) = \cos(x)$$

(i) dimostrare che $f \circ g(x) = \cos(2x) + \cos(x)$;
(ii) calcolare $f \circ g(\pi/2)$.

Es. 40

Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare
(i) grafico;
(ii) $\mathrm{Im}(f)$;
(iii) l'eventuale invertibilità.

$$\text{(i) } f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(ii) } f(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\text{(iii) } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Es. 41

Si consideri la funzione
$$f(x) = |x+1| + 2x.$$

(i) Trovarne il grafico e $\mathrm{Im}(f)$.
(ii) Stabilire se è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa.
(iii) Determinare eventuali intersezioni con l'asse x.
(iv) Risolvere la disequazione $f(x) < 10$.

Es. 42

Si consideri la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & , \quad x \leq 0 \\ \ln(x) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

(i) Trovarne il dominio di f.
(ii) Trovare $\mathrm{Im}(f)$. La funzione è limitata?
(iii) Determinare le soluzioni di $f(x) = 0$.

Es. 43

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\cos(x)| & , \quad x < \pi \\ \frac{1}{x-\pi} & , \quad x > \pi \end{cases}$$

(i) Trovarne il dominio di f.
(ii) Trovare $\mathrm{Im}(f)$. La funzione è limitata?
(iii) Determinare le soluzioni di $f(x) = 0$.

Es. 44

Dimostrare utilizzando la definizione di limite che

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$$

Es. 45

Dimostrare utilizzando la definizione di limite che

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

Es. 46

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 0 \\ -x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(i) tracciare il grafico di f;
(ii) constatare che f non ha limite per $x \to 0$;
(iii) calcolare

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Es. 47

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \{x \cdot \sin(f(x))\}$$

dove

$$f(x) = e^{\sin(x^2) + \cos^2(x)}.$$

Es. 48

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \{x \cdot \sin\left(e^x + \cos(2x)\right)\}$$

Es. 49

Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Es. 50

Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+4} = 2.$$

Es. 51

Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0.$$

Es. 52

Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 0} \ln(|x|) = -\infty.$$

Es. 53

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(i) Disegnare il grafico di f.
(ii) Determinare

$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Es. 54

Fornire un esempio di funzione che ha limite destro pari a 1 ma non ha limite sinistro per $x_0 = 0$.

Es. 55

Fornire un esempio di funzione f continua su tutto $\mathbb{R}$ per la quale non esiste

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Es. 56

Calcolare i limiti delle funzioni polinomiali

$$\text{(i)} \lim_{x\to+\infty} (-x^3+x), \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to-\infty} (-x^3+x), \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to+\infty} (2x^3-3x+1)$$

$$\text{(iv)} \lim_{x\to-\infty} (x^4+2x^2)$$

Es. 57

Calcolare i limiti delle funzioni razionali

$$\text{(i)} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{-x^3+1000x^2} \quad \text{(iii)} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3}{x^2+x+1}$$

$$\text{(iv)} \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-1)\cdot(x-3)}{4x^2-5x}, \quad \text{(v)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+2x}{2\sqrt{x}-x}$$

Es. 58

Tenendo conto delle regole di calcolo, calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}, \quad \text{(iii)} \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{x}, \quad \text{(iv)} \lim_{x\to0^-} \frac{-2}{x}$$

Es. 59

Tenendo conto delle regole di calcolo, calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{\ln(x)}, \quad \text{(iii)} \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{10^6}{\mathrm{tg}(x)}, \quad \text{(iv)} \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

Es. 60

Tenendo conto delle regole di calcolo, calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0} \left(x^2-10^{1000}+\frac{1}{x^4}\right), \quad \text{(ii)} \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\ln(x), \quad \text{(iii)} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{e^x}, \quad \text{(iv)} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{e^x},$$

Es. 61

Tenendo presente che $\sin(x)>0$ per $x>0$ e $\sin(x)<0$ per $x<0$, calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to0^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \text{(iii)} \lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{\sin(x)}, \quad \text{(iv)} \lim_{x\to0^-} \frac{x^2+2x-2}{\sin(x)}$$

Es. 62

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{3x}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{tg}(3x)}{x}, \quad \text{(iii)} \lim_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}, \quad \text{(iv)} \lim_{x\to0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$$

Es. 63

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{tg}(3\cdot\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad \text{(iii)} \lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x)}{\sin(\sqrt{x})},$$

Es. 64

La funzione f è continua in un intorno di $x_0 = 1$ e soddisfa la condizione

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\,f(x)-\alpha\,)}{f(x)-\alpha}.$$

Suggerimento: porre $t = f(x) - \alpha$ e osservare che

$$\lim_{x\to 1} t = \lim_{x\to 1}[f(x)-\alpha] = \lim_{x\to 1} f(x) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$$

per cui il limite proposto equivale a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\,f(x)-\alpha\,)}{f(x)-\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Es. 65

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1-x}-1)}{\sin(x)}.$$

Es. 66

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(\sqrt{x-1}-1)}{\sin(x-1)}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(\sqrt{x-1}-1)}{\sin(x-1)}.$$

Es. 67

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to +\infty} \sin(2x), \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to -\infty} \cos\left(x + \frac{\pi}{24}\right), \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to -\infty} \left\{\cos(2x) + 2\cdot\sin^2(x)\right\}.$$

Es. 68

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\sin(2x), \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \left\{x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to +\infty} \{\sin(x) + x\}.$$

Es. 69

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0^+} \left\{\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0^+} x^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es. 70

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to +\infty} \left\{x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right\}.$$

Es. 71

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin(x))}{x}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1-\sqrt{x})}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\ln(1-x^2)}.$$

Es. 72

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{x}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-\ln(x)}-1}{\ln(x)}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1-\sin^2(x)}}{1-\cos(x)}.$$

Es. 73

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+2}{x-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^3-8}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$$

Es. 74

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to +\infty} \left\{\sqrt{x^2+1}-x\right\}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to -\infty} \left\{\sqrt{x^2+x}-x\right\}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}.$$

Es. 75

Calcolare i limiti

$$\text{(i)} \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}.$$

Es. 76

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\cos(x)}{e^{2x}-1}.$$

Es. 77

Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\sin(x)}$$

Es. 78

La funzione $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ è continua in $[-1,1]$. Si può concludere che esiste sempre uno $\xi \in [-1,1]$ tale che $f(\xi) = 0$? Portare un esempio per avvalorare la propria risposta, sia che essa sia affermativa che negativa.

Es. 79

La funzione $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ con $f(a) < 0$ e $f(c) > 0$ per un certo $c \in (a, b)$. Si può concludere che esiste uno $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$?

Es. 80

E' vero che una funzione continua in (a, b) ha sempre massimo e minimo in (a, b)? Giustificare la risposta.

Nuovi Esercizi

Es. 81

Determinare le soluzioni dell'equazione

$$|\sin(x)| = 0.$$

Es. 82

(i) Dimostrare graficamente, senza calcolarle, che l'equazione

$$\ln(|x|) = 2 - x^2$$

ha due radici $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$.
(ii) Risolvere la disequazione

$$\ln(|x|) < 2 - x^2$$

esprimendo gli intervalli della soluzione in termini di ξ_1 e ξ_2.

Es. 83

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x} \le x.$$

Es. 84

Risolvere la disequazione

$$\sqrt[4]{x} > \sqrt[3]{x}.$$

Es. 85

Risolvere la disequazione

$$\log_2(x) > \log_{1/2}(x).$$

Es. 86

Giustificare o smentire la seguente affermazione: esiste uno $\xi > 0$ tale per cui la disequazione

$$2^x \cdot \log_2(x) > 1$$

è soddisfatta in $(\xi, +\infty)$.

Es. 87

Dimostrare che l'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{1/2}(x) = 1$$

ha una ed una sola soluzione reale ξ. Si può asserire che $0 < \xi < 1$?

Es. 88

Sia

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Giustificare o smentire la seguente affermazione: esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x : 0 < |x| < \delta.$$

Es. 89

Sia

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Giustificare o smentire la seguente affermazione: esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 10^5 \quad \forall\, x : 0 < |x - 1| < \delta.$$

In caso di risposta negativa, come va cambiata la conclusione affinché risulti vera?

Es. 90

Sia

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

(i) Può essere anche

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\ ?$$

(ii) Può esistere un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq k_0\ ?$$

Es. 91

Sia

$$\text{(i)} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \text{(ii)} \lim_{x \to -\infty} g_1(x) = \lim_{x \to -\infty} g_2(x) = 5$$

$$\text{(iii)}\ g_1(x) + f(x) \leq \phi(x) \leq g_2(x) + f(x) \quad \forall\, x \leq -10^5.$$

Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$$

Es. 92

Sia

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Cosa si può dire dei seguenti limiti?

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty} \{f(x)+10\}\,, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to+\infty} \left\{f(x)+5x^2\right\}$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2\,, \qquad \text{(iv)}\ \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^{-1}$$

$$\text{(v)}\ \lim_{x\to+\infty} \{f(x)+\sin(x)\}\,, \qquad \text{(vi)}\ \lim_{x\to+\infty} \left\{f(x)-[\sin(x)]^{10}\right\}$$

$$\text{(vii)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Es. 93

Sia

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^{67}\,, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to+\infty} [\,f(x)\,]^0\,, \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to+\infty} \left\{f(x)+[f(x)]^3\right\}.$$

Es. 94

Sia

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 2.$$

Si può dedurre qualcosa su

$$\lim_{x\to0} f(x)\ ?$$

Svolgimento: in generale, no. Ad esempio, $f(x) = x+2$ ha limite 2 mentre

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x<0 \\ 2 & , \quad x>0 \end{cases}$$

ha limite sinistro che vale 0 e limite destro che vale 2; dunque, non ha limite. Però, se il limite esiste, allora risulta

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 2.$$

Es. 95

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ x & , \quad 0\le x<1 \\ 1 & , \quad x\ge1 \end{cases}$$

(i) Disegnare il grafico di f.
(ii) Calcolare l'area $A(\xi)$ compresa tra l'asse x, la retta $x=\xi$ e la funzione f.
(iii) Disegnare il grafico di $A(\xi)$ e calcolare

$$\lim_{\xi\to+\infty} A(\xi).$$

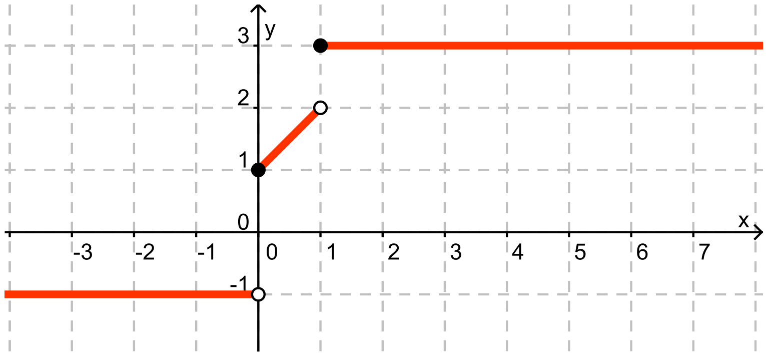


Figura 1: Figura dell'esercizio 96

Es. 96

Sia dato il grafico dell'equazione $F(x, y) = 0$ rappresentato nella figura 1

(i) Giustificare che si tratta del grafico di una funzione f.

(ii) Scrivere una possibile espressione di f.

(iii) Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni

$$\text{(a) } f(x) = -1, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{3}{2}, \qquad \text{(c) } f(x) = \frac{5}{2}.$$

(iv) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to 0} f(x)$$

Primo compitino

Es. 97

Dimostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Soluzione. Se fosse $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ esisterebbero due numeri naturali m, n che possiamo assumere primi tra loro tali che

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Pertanto, è $m^2 = 3 \cdot n^2$ e, di conseguenza, 3 è un fattore di m^2 e, quindi, anche di m. Allora, possiamo scrivere $m = 3 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$. Sostituendo otteniamo

$$(3 \cdot k)^2 = 3 \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 \cdot k^2 = 3 \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 3 \cdot k^2$$

Quindi, anche n^2 è divisibile per 3 e, di conseguenza, lo è n. Dunque, sia m che n sono divisibili per 3 in contraddizione con l'ipotesi che fossero primi tra loro. Pertanto, visto che questa contraddizione nasce dall'aver supposto che $\sqrt{3}$ fosse razionale, concludiamo che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Es. 98

Trovare due numeri irrazionali x ed y tali che $x + y \in [1, 3]$.

Soluzione: basta prendere

$$x = 1 + \sqrt{3}, \qquad y = 1 - \sqrt{3}$$

dato che sia x che y sono irrazionali e $x + y = 2 \in [1, 3]$. Infatti, se ad esempio fosse $x \in \mathbb{Q}$ ci sarebbero due numeri naturali primi fra loro p ed q (con $p > q$ perché $p/q = 1 + \sqrt{3} > 1$) tali che

$$1 + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p - q}{q} \overset{(\star)}{=} \frac{m}{n}$$

dove il passaggio $(\star)$ toglie anche gli eventuali fattori comuni ai numeri $p - q$ e q di modo che m ed n sono primi fra loro. Ma quest'ultima uguaglianza è impossibile perché sappiamo che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Dunque, risulta $1 + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Es. 99

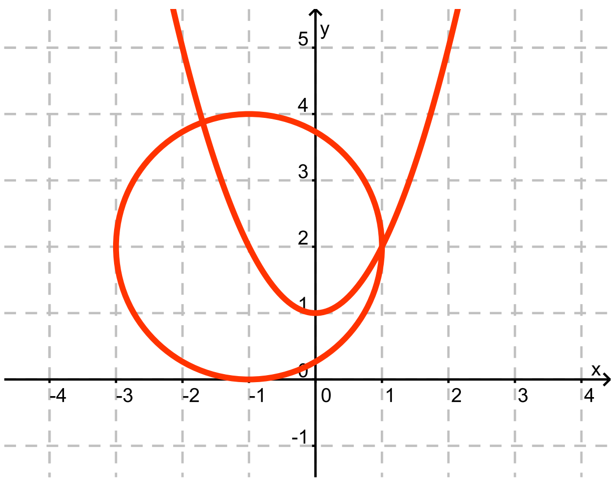
Disegnare il grafico dell'equazione

$$(x^2 + 1 - y) \cdot \left[(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4\right] = 0$$

Soluzione: per la legge di annullamento del prodotto, il grafico cercato è costituito dall'unione dei seguenti due grafici

$$\text{(a) } x^2 + 1 - y = 0, \quad \text{e} \quad \text{(b) } (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

La prima equazione rappresenta la parabola $y = x^2 + 1$ che ha vertice $V = (0, 1)$ ed asse di simmetria la retta $x = 0$. La seconda equazione è una circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{4} = 2$. Il grafico di $F(x, y) = 0$ è quindi il seguente:



Es. 100

(i) Scrivere l'equazione di una retta parallela alla retta $2y - x + 1 = 0$. (ii) Scrivere l'equazione di una retta ortogonale alla retta $2x - 4 = 0$.

Soluzione: (i) Scrivendo in forma esplicita la retta $2y - x + 1 = 0$ abbiamo

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

per cui il coefficiente angolare è $m = 1/2$. Quindi, una retta ad essa parallela è, ad esempio, $y = 1/2x$.

(ii) La retta data può essere riscritta come $x = 2$ e, di conseguenza, è parallela all'asse y. Una retta ad essa ortogonale è, ad esempio, $y = 1$.

Es. 101

Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 + 1}{\log_{1/3}(2x - 1)} > 0$$

Poiché $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ovunque la frazione sia definita, affinché il rapporto tra $x^2 + 1$ e $\log_{1/3}(2x - 1)$ sia positivo deve risultare positivo $\log_{1/3}(2x - 1)$. Ora, essendo la base del logaritmo $1/3 < 1$, l'ultima condizione equivale a $2x - 1 < 1$. Inoltre, il logaritmo deve esistere ciò che richiede che sia $2x - 1 > 0$. In conclusione, dovendo esere verificate contemporaneamente entrambe le condizioni, dobbiamo avere

$$\begin{cases} 2x - 1 & > & 0 \\ 2x - 1 & < & 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} 2x - 1 & > & 0 \\ 2x - 1 & < & 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & > & \frac{1}{2} \\ x & < & 1 \end{cases}$$

Quindi, il sistema e, di conseguenza, la disequazione di partenza, è soddisfatto per $1/2 < x < 1$.

Es. 102

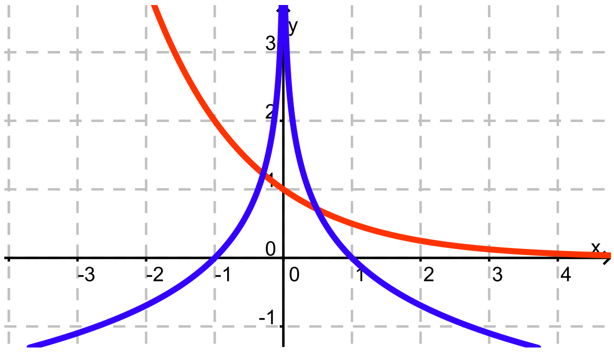
Determinare il numero di radici dell'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\ln(|x|)$$

Utilizziamo il confronto grafico delle due funzioni $f(x) = (1/2)^x$ e $g(x) = -\ln(|x|)$. f è una potenza con base $1/2 < 1$: è, quindi, positiva e monotona decrescente. Per g risulta, invece,

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(x) & , \quad x > 0 \\ -\ln(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

La porzione per $x > 0$ si ottiene dal logaritmo $\ln(x)$ mediante ribaltamento (del grafico) rispetto all'asse x mentre la parte per $x < 0$ si ottiene da $-\ln(x)$ per ribaltamento (del grafico) rispetto all'asse y. Si ottiene, dunque,



che mostra la presenza di due soluzioni.