Esercizi sulle derivate

Es. 97

La funzione $f(x)$, definita e derivabile su $\mathbb{R}$ ha un punto di minimo relativo per $x = 0$ dove vale $f(0) = 0$ ed un punto di massimo relativo in $x = \pi$.

(i) Può essere $f(\pi) = 0$?

(ii) Dimostrare che esiste un punto $\xi \in (0, \pi)$ tale che

$$f'(\xi) + \cos(\xi) = 0.$$

Es. 98

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$\text{a) } f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3\ln(x), \quad \text{b) } f(x) = e^x - \sin(x) + 3\cos(x)$$

$$\text{c) } f(x) = \sin^2(x) + \tan(x) + \cos^2(x)$$

Es. 99

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$\text{a) } f(x) = x^3 \cdot \sin(x) - x \cdot \ln(x), \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^x}{\sin(x) + \cos(x) + 2}$$

Es. 100

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$\text{a) } f(x) = \ln(e^x + 1), \quad \text{b) } f(x) = \sin(x^2), \quad \text{c) } f(x) = \sin(2x)$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad \text{e) } f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x), \quad \text{f) } f(x) = \cos^2(e^x)$$

Es. 101

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili. Esprimere le derivate delle seguenti funzioni in termini di f, g, f', g'.

$$\text{a) } 3 \cdot f(x) - 5 \cdot g(x), \quad \text{b) } f(3 - 2x), \quad \text{c) } \sin(f(x)), \quad \text{d) } \ln\left(\frac{f^2(x)}{g(x)}\right)$$

Es. 102

Un'equazione differenziale omogenea del primo ordine a coefficienti costanti **nella <u>funzione</u> incognita** y ha la forma

$$y' + ay = 0$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è assegnato. Una funzione $y = f(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale data se e solo se risulta

$$f'(x) + af(x) = 0$$

Dimostrare che la funzione $y = f(x) = e^{-ax}$ è soluzione della equazione differenziale.

Es. 103

Dopo averne disegnato il grafico, indicare gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni

$$\text{a) } f(x) = |x^2 - x| \quad \text{b) } f(x) = x \cdot |x|.$$

Es. 104

Studiare le seguenti funzioni al fine di poterne abbozzare il grafico

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad \text{b) } f(x) = xe^x, \quad \text{c) } f(x) = x\ln(x)$$

Es. 105

Siano f e g derivabili su tutto $\mathbb{R}$.

- E' vero che $f(x) \cdot g(x)$ è continua in $x_0 = 0$?
- Calcolare la derivata di
$$\frac{f(x) + g(x)}{f(x) - g(x)}$$
- Calcolare la derivata di (va applicata con cura le regola della derivazione della funzione composta!!)
$$\sin\left(f^2(\sqrt{x})\right).$$

Es. 106

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x}$$

a) Calcolare la retta tangente ad f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

b) Verificare che per $x_0 = 0$ risulta

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

Il punto $x_0 = 0$ è di derivabilità per f? Inoltre, come si può utilizzare il risultato del limite per rappresentare il comportamento del grafico di f nell'intorno (piccolo) destro di $x_0 = 0$?

Es. 107

Sia f derivabile su $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^{\cos(x)}$. Dimostrare o confutare con un controesempio che

$$|f(\pi) - f(0)| \geq \frac{\pi}{e} \quad \forall\, x \in (0, \pi).$$

Suggerimento: osservare che

$$\left|e^{\cos(x)}\right| = e^{\cos(x)} \geq \frac{1}{e}$$

e tenere presente il teorema di Lagrange.

Es. 108

Fornire un esempio di funzione continua in $x_0 = 1$ e non derivabile in x_0 ma con

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -1, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2.$$

Es. 109

Calcolando le derivate successive di $f(x) = \sin(x)$, dimostrare che il suo sviluppo in serie di Mac-Laurin di ordine 5 è

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Utilizzando una calcolatrice tascabile, valutare l'errore assoluto $E_5 = |\sin(x) - P_5(x)|$ che si commette nell'approssimare $\sin(x)$ con $P_5(x)$ quando $x = 1$ radiante. Quanto diventa l'errore per $x = 10$ radianti? E per $x = 0,1$ radianti? Come mai si ha questo tipo di comportamento? Suggerire almeno un metodo per migliorare l'approssimazione nel calcolo di $\sin(10)$.

Suggerimento per l'ultimo punto. Oltre ad aumentare l'ordine del polinomio, si può osservare che

$$10 = 3\pi + 0,575222039$$

per cui, ricordando le formula di riduzione al primo quadrante, risulta

$$\sin(10) = -\sin(0,575222039) = -0,54402111$$

e, mediante Mac-Laurin di ordine 5,

$$-\left(0,575222039 - \frac{(0,575222039)^3}{3!} + \frac{(0,575222039)^5}{5!}\right) = -0,544025226$$

con un errore assoluto $E = |-0,54402111 - (-0,544025226)| = 4,1 \cdot 10^{-6}$.