Esercizi di integrazione

Es. 121

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\text{a)} \int \left\{3 \cdot x^2 + \sin(x) - 2\cos(x) + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right\} dx, \qquad \text{b)} \int \left\{\frac{2}{\cos^2(x)} - \frac{3}{\sin^2(x)}\right\} dx$$

Suggerimento per b): calcolarsi prima le derivate di $\mathrm{tg}(x)$ e di $1/\mathrm{tg}(x)$.

Es. 122

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\text{b)} \int \frac{3}{x^2+1} dx, \qquad \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad \text{c)} \int \left\{1 - x^{-1} + 2 \cdot x^{-2}\right\} dx$$

Suggerimento: osservare che $x^{-1} = 1/x$.

Es. 123

Utilizzando la regola di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\text{a)} \int \frac{1}{2x+1} dx, \qquad \text{porre } t = 2x+1 \;\Rightarrow\; dt = 2 \cdot dx$$

$$\text{b)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \qquad \text{porre } t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x \cdot dx$$

$$\text{c)} \int \cos(x) e^{\sin(x)} dx, \qquad \text{porre } t = \sin(x) \;\Rightarrow\; dt = \cos(x) \cdot dx$$

$$\text{d)} \int \frac{\ln(x+\sin(x))}{x+\sin(x)} \cdot (1+\cos(x)) dx, \qquad \text{porre } t = \ln(x+\sin(x))$$

Es. 124

Utilizzando la regola di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\text{a)} \int (x+2) \cdot e^{2x} dx, \qquad \text{b)} \int x \sin(x) dx, \qquad \text{c)} \int x^3 \ln(x) dx$$

Es. 125

Calcolare i seguenti integrali applicando le regole di integrazione per parti

$$\text{a)} \int \mathrm{arctg}(x) dx, \qquad \text{b)} \int \arcsin(x) dx$$

Es. 126

Calcolare il seguente integrale applicando ripetutamente la regola di integrazione per parti

$$\int e^x \cdot \cos(2x) dx$$

Es. 127

Indicare la scomposizione in fratti semplici delle seguenti funzioni razionali dove $N(x)$ è un polinomio, di grado inferiore al grado del polinomio a denominatore, che non interessa precisare.

$$\text{a)}\ \frac{N(x)}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)^3},\qquad \text{b)}\ \frac{N(x)}{x^3\cdot(x+1)\cdot(x-1)},\qquad \text{c)}\ \frac{N(x)}{(x^2+1)\cdot(x^2+x+1)^2}$$

Es. 128

Calcolare i seguenti integrali

$$\text{a)}\ \int\frac{x^4+2x^3-x^2+1}{x^2+x-2}dx,\qquad \text{b)}\ \int\frac{x}{2x^2+x-1}dx,\qquad \text{c)}\ \int\frac{3x^2+2x+5}{x^3+x^2+x+1}dx$$

Suggerimento: a) il grado del polinomio a numeratore è maggiore di quello a denominatore... b) attenzione al 2 a denominatore! c) osservare che è $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)\cdot(x+1)$.

Es. 129

Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\text{a)}\ \int_1^e \ln(x)dx,\qquad \text{b)}\ \int_0^{\pi/6}\sin(2x)dx,\qquad \text{c)}\ \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}(x)dx$$

Es. 130

Utilizzando la definizione di integrale improprio, calcolare

$$I(\tau)=\int_0^{+\infty}e^{-t/\tau}dt$$

dove $\tau>0$ è un parametro assegnato.

Es. 131

Utilizzando la definizione di integrale improprio, calcolare, se esistono

$$\text{a)}\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx,\qquad \text{b)}\ \int_0^1\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\,dx$$

Es. 132

Sapendo che

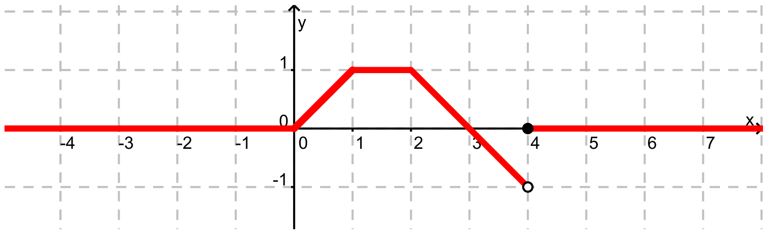
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

calcolare in funzione dei parametri $\sigma>0$ e $\mu\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Es. 133

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato nella seguente figura

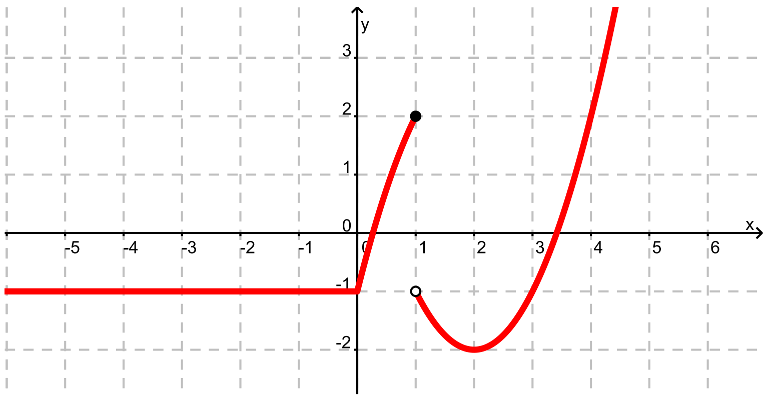


- Indicare le ascisse degli eventuali punti di non derivabilità di f.
- Calcolare $f'(3)$.
- Disegnare, sullo stesso grafico che riporta f, la retta tangente ad f nel suo punto di ascissa $x = 5/2$.
- Applicando il procedimento grafico, costruire l'andamento qualitativo del grafico della funzione integrale

$$F(u) = \int_0^u f(x)dx$$

Es. 134

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato nella seguente figura



La funzione consta di una semiretta ($x < 0$), un segmento ($0 \leq x \leq 1$) ed una parte di parabola ($x > 1$.)

a) Indicare le ascisse degli eventuali punti di non derivabilità di f.

b) Trovare gli intervalli in cui f è crescente in senso stretto e quelli in cui è decrescente in senso stretto. Trovare, inoltre, gli intervalli in cui f è costante.

c) Determinare gli eventuali punti mi massimo e di minimo indicando se sono relativi o assoluti.

d) Sapendo che per $x > 1$ la funzione è data da $f(x) = (x-2)^2 - 2$, calcolare

$$\int_2^3 f(x)dx$$

Indicare cosa rappresenta geometricamente il valore trovato.

e) Dimostrare che esiste $\xi > 3$ tale che

$$\int_2^{\xi} f(x)dx = 0.$$

f) Dimostrare che esiste $\eta \in [1,2]$ tale che

$$\int_2^3 f(x)dx = f(\eta).$$

g) Calcolare

$$\int_0^{-3} f(x)dx$$

h) Si può calcolare

$$\int_0^2 f(x)dx \ ?$$

In caso affermativo, quanto vale?

i) Calcolare e disegnare la retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa $x = 3$. Come è disposta questa retta rispetto al grafico della curva? Perché?

Es. 135

Calcolare

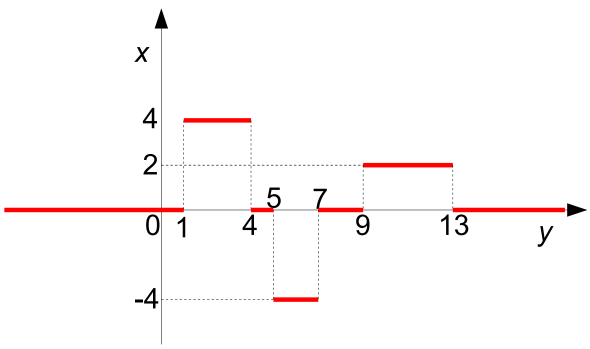
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$

Sfruttando il risultato appena ottenuto, calcolare i seguenti integrali

$$\text{a)} \int_0^{20\pi} \sin(x)dx, \qquad \text{b)} \int_0^{1000\pi} \left[\frac{1}{\pi} + \sin(x)\right] dx$$

Es. 136

Calcolare la funzione integrale $F(u) = \int_0^u f(x)dx$ della funzione f il cui grafico è

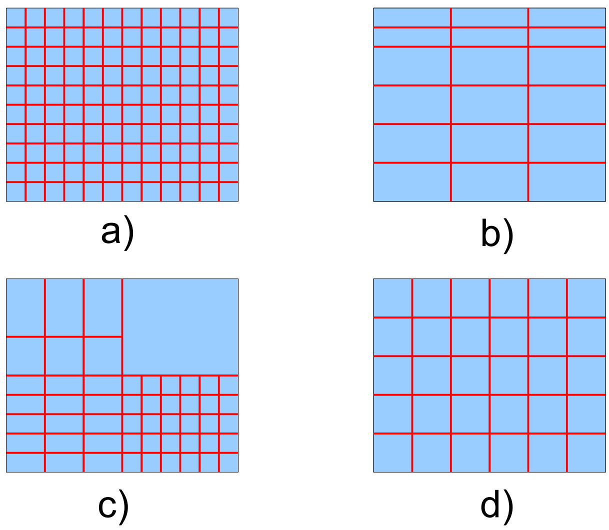


Es. 137

Si vuole stimare la quantità d'oro, distribuita in modo disomogeneo, in una lastra molto sottile. E' nota la densità dell'oro, punto per punto, espressa in g/mm^2 (grammi su millimetro quadro). Allo scopo si suddivide la lamina in n regioni molto piccole in modo tale che in ciascuna di esse la densità d'oro si possa ritenere costante. Quindi, si stima la quantità d'oro totale Q della lamina mediante la relazione

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(P_k) \cdot S_k$$

dove S_k è l'area della regione k-esima e $\rho(P_k)$ la densità d'oro calcolata prendendo, a caso, un punto nell'area S_k.
Ciò premesso, utilizzando il significato intuitivo di integrale di superficie, quale delle seguenti suddivisioni della lamina è la più ragionevole allo scopo?



a) Quanti sarebbero i termini della somma nel caso che si scegliesse la suddivisione d)?

b) Come andrebbe modificata la scelta sapendo che il 95% dell'oro è distribuito, sempre in modo disomogeneo, nell'amgolo in basso a destra della lamina mentre è assente nell'angolo in alto a destra ed è scarso nella restante parte della lamina?

Es. 138

Determinare i due numeri $x_1 > 0$ ed $x_2 > 0$ in modo che il loro prodotto sia massimo sapendo che $x_1 + x_2 = 10$. Quanto vale il prodotto massimo?
Suggerimento: $p = x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (10 - x_1)$ e basta trovare il massimo della funzione $p(x_1)$.

Es. 139

Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int \sin^3(x)dx, \qquad \text{b)} \int \cos^3(x)dx$$

Suggerimento: abbiamo $\sin^3(x) = \sin(x) \cdot \sin^2(x) = \sin(x) \cdot \big[1 - \cos^2(x)\big]$.

Es. 140

Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int \frac{\text{tg}(x)}{\cos^2(x)}dx, \qquad \text{b)} \int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx$$

Es. 141

Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ e dispari. Dimostrare che comunque si scelga $a > 0$ è

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Cosa si può dire, invece, per lo stesso integrale qualora la funzione sia pari?

Es. 142

Determinare, se possibile, un numero ξ tale che

$$\int_0^5 \left(3x^2 - 2x - \xi\right) dx = 0$$

Es. 143

Dimostrare la relazione

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Suggerimento: considerare la funzione $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ e calcolarne la derivata. Quanto vale? Cosa si può dire, quindi, di $f(x)$?

Es. 144

Scrivere <u>la</u> primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

tale che $F(0) = 2$.
Soluzione: l'insieme di tutte le primitive è

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)dx = e^{\sin(x)} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

Tra tutte queste scegliamo quella che per $x = 0$ vale 2: deve essere

$$\underbrace{e^{\sin(0)} + c}_{F(0)} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^0 + c = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + c = 2.$$

Dunque, la primitiva cercata ha $c = 1$ ed è perciò

$$F(x) = e^{\sin(x)} + 1.$$