Primo compitino

Es. 109

Dimostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Soluzione. Se fosse $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ esisterebbero due numeri naturali m, n che possiamo assumere primi tra loro tali che

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Pertanto, è $m^2 = 3 \cdot n^2$ e, di conseguenza, 3 è un fattore di m^2 e, quindi, anche di m. Allora, possiamo scrivere $m = 3 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$. Sostituendo otteniamo

$$(3 \cdot k)^2 = 3 \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 \cdot k^2 = 3 \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 3 \cdot k^2$$

Quindi, anche n^2 è divisibile per 3 e, di conseguenza, lo è n. Dunque, sia m che n sono divisibili per 3 in contraddizione con l'ipotesi che fossero primi tra loro. Pertanto, visto che questa contraddizione nasce dall'aver supposto che $\sqrt{3}$ fosse razionale, concludiamo che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Es. 110

Trovare due numeri irrazionali x ed y tali che $x + y \in [1, 3]$.

Soluzione: basta prendere

$$x = 1 + \sqrt{3}, \qquad y = 1 - \sqrt{3}$$

dato che sia x che y sono irrazionali e $x + y = 2 \in [1, 3]$. Infatti, se ad esempio fosse $x \in \mathbb{Q}$ ci sarebbero due numeri naturali primi fra loro p ed q (con $p > q$ perché $p/q = 1 + \sqrt{3} > 1$) tali che

$$1 + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q} \overset{(\star)}{=} \frac{m}{n}$$

dove il passaggio $(\star)$ toglie anche gli eventuali fattori comuni ai numeri $p - q$ e q di modo che m ed n sono primi fra loro. Ma quest'ultima uguaglianza è impossibile perché sappiamo che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Dunque, risulta $1 + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Es. 111

Disegnare il grafico dell'equazione

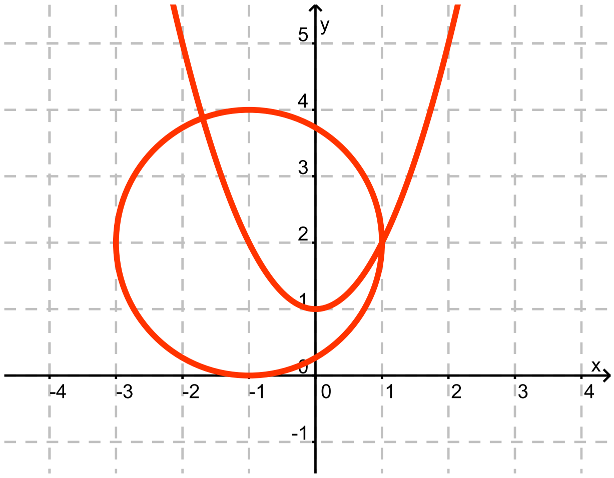
$$(x^2 + 1 - y) \cdot \left[(x+1)^2 + (y-2)^2 - 4\right] = 0$$

Soluzione: per la legge di annullamento del prodotto, il grafico cercato è costituito dall'unione dei seguenti due grafici

$$\text{(a) } x^2 + 1 - y = 0, \quad \text{e} \quad \text{(b) } (x+1)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$$

La prima equazione rappresenta la parabola $y = x^2 + 1$ che ha vertice $V = (0, 1)$ ed asse di simmetria la retta $x = 0$. La seconda equazione è una circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{4} = 2$. Il grafico di $F(x, y) = 0$ è quindi il seguente:

Es. 112



(i) Scrivere l'equazione di una retta parallela alla retta $2y - x + 1 = 0$. (ii) Scrivere l'equazione di una retta ortogonale alla retta $2x - 4 = 0$.

Soluzione: (i) Scrivendo in forma esplicita la retta $2y - x + 1 = 0$ abbiamo

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

per cui il coefficiente angolare è $m = 1/2$. Quindi, una retta ad essa parallela è, ad esempio, $y = 1/2x$.

(ii) La retta data può essere riscritta come $x = 2$ e, di conseguenza, è parallela all'asse y. Una retta ad essa ortogonale è, ad esempio, $y = 1$.

Es. 113

Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 + 1}{\log_{1/3}(2x - 1)} > 0$$

Poiché $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ovunque la frazione sia definita, affinché il rapporto tra $x^2 + 1$ e $\log_{1/3}(2x - 1)$ sia positivo deve risultare positivo $\log_{1/3}(2x - 1)$. Ora, essendo la base del logaritmo $1/3 < 1$, l'ultima condizione equivale a $2x - 1 < 1$. Inoltre, il logaritmo deve esistere ciò che richiede che sia $2x - 1 > 0$. In conclusione, dovendo esere verificate contemporaneamente entrambe le condizioni, dobbiamo avere

$$\begin{cases} 2x - 1 & > & 0 \\ 2x - 1 & < & 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} 2x - 1 & > & 0 \\ 2x - 1 & < & 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & > & \frac{1}{2} \\ x & < & 1 \end{cases}$$

Quindi, il sistema e, di conseguenza, la disequazione di partenza, è soddisfatto per $1/2 < x < 1$.

Es. 114

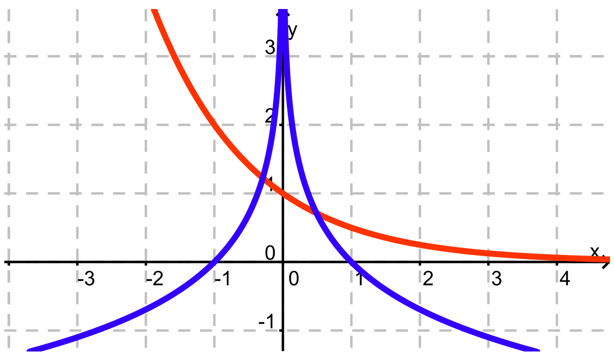
Determinare il numero di radici dell'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\ln(|x|)$$

Utilizziamo il confronto grafico delle due funzioni $f(x) = (1/2)^x$ e $g(x) = -\ln(|x|)$. f è una potenza con base $1/2 < 1$: è, quindi, positiva e monotona decrescente. Per g risulta, invece,

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(x) & , \quad x > 0 \\ -\ln(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

La porzione per $x > 0$ si ottiene dal logaritmo $\ln(x)$ mediante ribaltamento (del grafico) rispetto all'asse x mentre la parte per $x < 0$ si ottiene da $-\ln(x)$ per ribaltamento (del grafico) rispetto all'asse y. Si ottiene, dunque,



che mostra la presenza di due soluzioni.

Es. 115

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f specificandone dominio e immagine.

b) Indicare, giustificando chiaramente la risposta, se f è invertibile nel suo dominio e, nel caso non lo sia, proporre una restrizione in cui è invertibile.

c) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0-} f(x), \qquad \lim_{x\to 0+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$

d) Determinare le eventuali soluzioni dell'equazione

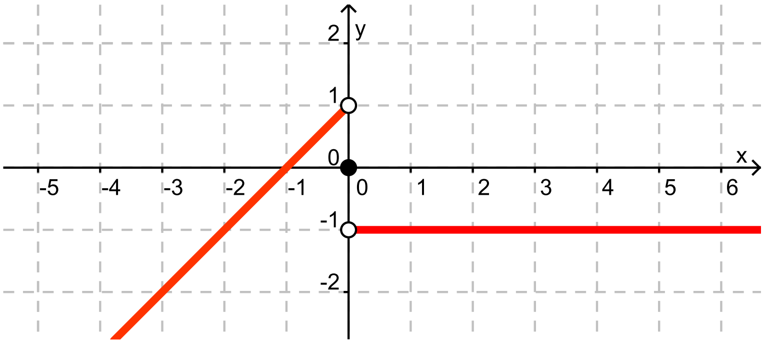
$$f(x) = \frac{1}{2}$$

e) Determinare, se possibile, un valore di α tale che l'equazione

$$f(x) = \alpha$$

ha infinite soluzioni.

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché per ogni $x \in \mathbb{R}$ riesco a calcolare il corrispondente $f(x)$. E' formata da tre rami: per $x < 0$ è la semiretta $y = x + 1$, per $x = 0$ è il punto $y = 0$ e per $x > 0$ è la semiretta $y = -1$. Dunque, il suo grafico è



Dall'esame del grafico, abbiamo

$$\mathrm{Im}(f) = (\infty, 1)$$

La funzione non è invertibile dato che per tutti gli $x > 0$ assume sempre lo stesso valore $f(x) = -1$. Una possibile restrizione ove è invertibile è $(-\infty, 0)$. Sempre l'esame del grafico mostra che

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x + 1) = 1, \qquad \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} -1 = -1$$

Quindi, essendo diversi il limite sinistro e destro, non esiste il limite per $x \to 0$ di $f(x)$. Sempre guardando la figura, vediamo che il grafico di f interseca la retta $y = 1/2$ per gli $x < 0$ per cui l'equazione $f(x) = 1/2$ diventa

$$x + 1 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Infine, affinché l'equazione $f(x) = \alpha$ abbia infinite soluzioni i punti di intersezione del grafico $y = f(x)$ con la retta $y = \alpha$ devono essere infiniti ciò che avviene se e solo se $\alpha = -1$. Per questo valore, infatti, la retta $y = -1$ si sovrappone con il ramo della funzione degli $x > 0$.

Es. 116 (*)

Determinare le eventuali radici dell'equazione

$$\cos(\,\sin(x)\,) = 1.$$

Qualunque sia $f(x)$ è

$$\cos(\,f(x)\,) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto, dobbiamo risolvere l'equazione $\sin(x) = k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ora, sappiamo che $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ per cui i valori di $k \in \mathbb{Z}$ per cui l'equazione $\sin(x) = k2\pi$ ha soluzione sono solo $k = 0$. Infatti, per $k \neq 0$ abbiamo $|k2\pi| > 2\pi > 1$ per cui l'equazione non può avere soluzioni. Ora, $\sin(x) = 0$ se e solo se $x = h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ che rappresenta tutte le soluzioni dell'equazione di partenza.

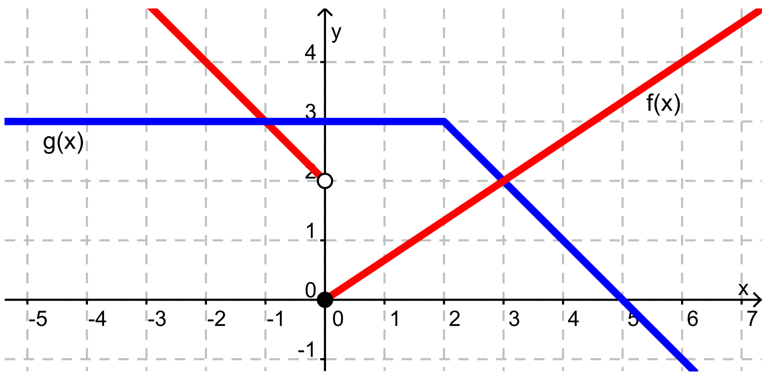
Es. 117

Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x\cdot(x+1)}, \quad \text{c)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad \text{d)}\ \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

Es. 118

Si consideri il grafico della funzione di figura



a) Calcolare

$$f(0), \quad g(4), \quad f(-2)$$

b) Indicare, giustificando chiaramente la risposta, gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione g specificando se si tratta di punti di massimo/minimo assoluto o relativo.

c) Risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$.

d) Risolvere la disequazione $f(x) \geq g(x)$.

e) Indicare gli eventuali punti di non continuità per entrambe le funzioni.

f) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x).$$

Es. 119

Rispondere a ciascuna delle seguenti affermazioni, dimostrandole o confutandole con un opportuni controesempi.

a) Sia $x_0 = 2$. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ è continua in } \; x_0 = 2$$

b) Sia $f(x)$ una funzione continua e definita (almeno) per gli $x > 0$. Allora

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -5 \quad \Rightarrow \quad \exists \xi : f(x) < 0 \, \forall \, x : x > \xi.$$

c) Non esiste alcuna funzione $f(x)$ tale che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

d) Sia $f(x)$ continua in $[1, 2]$ con $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$. Allora, l'equazione $f(x) = 0$ ha esattamente una soluzione in $[1, 2]$.

e) Sia $f(x)$ continua in $[1, 2]$ con $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$. Allora, l'equazione

$$e^{f(x)} = 1$$

ha almeno una soluzione in $[1, 2]$.