Esercizio

Si consideri un numero naturale n che ha 3 come ultima cifra. Allora

1. n è primo
2. n non è il quadrato di un numero naturale
3. n è divisibile per 3
4. n non è divisibile per 3

Risposta

Osserviamo che 33 non è primo pur terminando con 3: la [1] è esclusa. Inoltre, essendo divisibile per 3, anche la [4] va scartata. Ora, il numero 23 termina con 3 ma non è divisibile per 3. Perciò, la [3] è falsa.
Per esclusione, è vera la [2]. In effetti, il quadrato di un numero può terminare solo con una delle seguenti cifre: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Esercizio

L'equazione

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \log_2 x$$

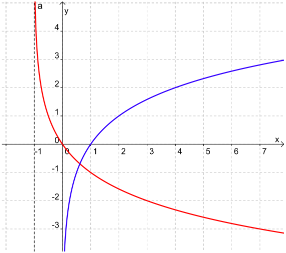
1. ha una sola soluzione ξ con $0 < \xi < 1$
2. non ha soluzioni
3. ha una soluzione ξ con $1 < \xi$
4. ha due soluzioni ξ ed η con $1 < \xi < \eta$

Risposta

La seguente figura che riporta i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \quad \text{e} \quad f_2(x) = \log_2 x$$

evidenzia come vi sia una sola radice ξ con $0 < \xi < 1$.



Esercizio

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(-x)}$$

Risposta

Deve essere

$$\begin{cases} -x > 0 \\ \log(-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Pertanto, deve essere $x \leq -1$. Il dominio è l'intervallo $(-\infty, -1]$.

Esercizio

Siano x, y numeri reali positivi. Allora

$$[1]\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad [2]\ \frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad [3]\ \frac{1}{x+y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

[4] nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Risposta

Per $x = y = 1$ risulta $1/(x+y) = 1/(1+1) = 1/2$ mentre $1/x = 1/y = 1$. Questo scarta la [1] e la [3]. E'

$$0 < y \quad \Rightarrow \quad x < x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{x+y}$$

In conclusione, tenuto conto che $1/y > 0$, è

$$\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Pertanto, è vera la [2].

Esercizio

Il perimetro di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 1 è uguale a

[1] $2\pi\sqrt{2}$ [2] $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ [3] 2π [4] $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Risposta

Non è necessario conoscere l'espressione che dà il perimetro! Basta osservare che qualunque poligono regolare inscritto nella circonferenza ha perimetro p inferiore alla lunghezza della circonferenza:

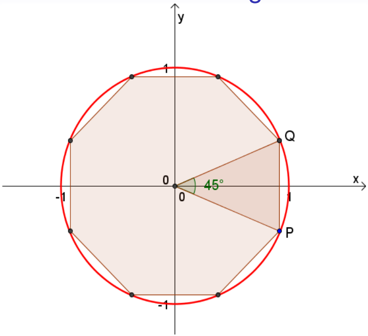
$$p < 2\pi r.$$

Nel caso in esame è $r = 1$ per cui $p < 2\pi$. Ciò esclude la [1] e la [3]. Essendo poi

$$2\pi < 2 \cdot 4 = 8 \quad \text{mentre} \quad 8 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} > 8 \cdot \sqrt{2} > 8 \cdot \sqrt{1} = 8$$

anche la [4] va scartata. Resta, dunque, solo la [2] che è la risposta corretta.

Perimetro dell'ottagono



Detto n il numero dei lati del poligono regolare abbiamo $\widehat{POQ} = 2\pi/n$. Nel caso in esame è $n = 8$ per cui risulta un angolo al centro di $\pi/4$ radiante. Quindi, è

$$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{OQ} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/4)}{2}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

e, infine, il perimetro $p = 8 \cdot \overline{PQ}$.

Esercizio

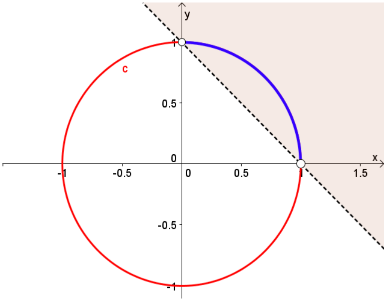
Il sistema

$$\begin{cases} x + y - 1 & > & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

[1] è impossibile [2] ha solo due soluzioni [3] ha infinite soluzioni

Risposta

La seguente figura mostra che l'insieme in esame è rappresentato in linee blu. Dunque, ci sono infinite soluzioni.



Esercizio

Un angolo di un radiante espresso in gradi è circa uguale a

[1] 57 [2] 352 [3] 87 [4] 1

Risposta

Indicando con α_g il valore dell'angolo in gradi e con α_r il corrispondente valore in radianti, vale la proporzione

$$\alpha_g : \alpha_r = 180 : \pi$$

Nel caso in esame è noto $\alpha_r = 1$ per cui abbiamo

$$\alpha_g = 180 \cdot \frac{\alpha_r}{\pi} = 180 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3} = 60$$

per cui la risposta corretta è la [1].

Esercizio

Tenendo presente che gli angoli sono espressi in radianti, indicare quali delle seguenti espressioni è vera

[1] $0 < \sin(3) < 1$ e $-1 < \cos(3) < 0$ [2] $\sin(3) > 3$ [3] $0 < \sin(3) < 1$ e $0 < \cos(3) < 1$

[4] $\sin(3)$ non esiste

Risposta

Risulta

$$\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$$

per cui l'angolo di 3 radianti cade nel secondo quadrante dove il seno è positivo ed il coseno negativo. Pertanto, è vera la [1].

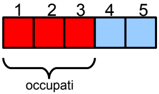
N.B. Poiché $\sin(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'opzione [4] è falsa. Parimenti, essendo $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ anche l'opzione [2] va scartata.

Esercizio

Determinare il numero di cinquine del gioco del lotto che contengono un terno prefissato.

Risposta

Nel gioco del lotto vengono estratti, senza reinserimento, da un'urna 5 numeri da un totale di 90 differenti. Il problema consiste nel contare quante sono le cinquine che contengono tre numeri prefissati indicati con caselle rosse nella figura.



Restano, pertanto, libere le due blu che possono contenere qualsiasi coppia di numeri estratta dai rimanenti 87 (=90-3). In totale, quindi, le cinquine totali sono

$$\binom{87}{2} = \frac{87!}{2! \cdot (87-2)!} = \frac{85! \cdot 86 \cdot 87}{2 \cdot 85!} = \frac{86 \cdot 87}{2} = 3741.$$

Esercizio

Quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

$$[1]\ \ x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0 \qquad [2]\ \ 4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0 \qquad [3]\ \ x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$[4]\ \ (x-1)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0 \qquad [5]\ \ x^4 + y^4 - 1 = 0$$

Risposta

L'equazione della circonferenza di centro (x_c, y_c) e raggio r è

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y = r^2 - x_c^2 - y_c^2$$

Pertanto, è una curva del secondo ordine ciò che esclude la [5]. Osserviamo poi che i termini in x^2 ed y^2 sono uguali: ciò esclude la [4] dove hanno segno opposto. La [3] va esclusa perché non c'è alcun punto che la soddisfa dato che $x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$. Dunque, non può rappresentare una circonferenza. La [1] si scarta perché

$$x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 - 1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y - 1) \cdot (x - y + 1) = 0$$

il cui grafico rappresenta (l'unione delle) due rette $x - y - 1 = 0$ e $x - y + 1 = 0$. Dunque, la circonferenza è rappresentata dalla [2]. Centro e raggio soddisfano le equazioni

$$-2x_c = -\frac{3}{4}, \quad -y_c = -\frac{5}{4}, \quad r^2 - x_c^2 - y_c^2 = \frac{1}{4}$$

da cui $x_c = 3/8$, $y_c = 5/8$, $r = 5\sqrt{2}/8$

Esercizio

Determinare il massimo comun divisore ed il minimo comune multiplo dei polinomi $x^2 - y^2$ e $x^3 - y^3$.

Risposta

Abbiamo

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y) \cdot (x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

Quindi,

$$M.C.D.(x^2 - y^2, x^3 - y^3) = x - y$$

$$m.c.m.(x^2 - y^2, x^3 - y^3) = (x-y) \cdot (x+y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$$