Esercizio

L'equazione

$$\log_{\frac{1}{16}} x = \frac{1}{4}$$

ha soluzione

[1] $\frac{1}{4}$ [2] 4 [3] $\frac{1}{2}$ [4] $-\frac{1}{2}$ [5] 2

Risposta

Per la definizione di logaritmo, abbiamo

$$x = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1^{\frac{1}{4}}}{2^{4\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio

Si considerino le seguenti tre espressioni numeriche

$$[1] \quad \log_2(\sin(26\pi)) \qquad [2] \quad \log_2(\cos(26\pi)) \qquad [3] \quad \log_2(\tan(26\pi))$$

Allora

1. la [1] e la [2] hanno entrambe significato
2. la [1] ha significato e la [3] non ha significato
3. la [1] ha significato e la [2] non ha significato
4. la [1] non ha significato e la [2] ha significato

Risposta

Osserviamo che $26\pi = 13 \cdot (2\pi)$ per cui, per la periodicità, abbiamo

$$\begin{aligned} \sin(26\pi) &= \sin(0) = 0 \\ \cos(26\pi) &= \cos(0) = 1 \\ \tan(26\pi) &= \tan(0) = 0 \end{aligned}$$

Quindi, dato che la funzione $f(x) = \log_2(x)$ è definita per $x > 0$, la [1] e la [3] non hanno significato e la [2] si.

Esercizio

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali definite su tutto $\mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione

$$[f(x)+g(x)]^2 > 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che risulta

$$\frac{f(x)+g(x)+1}{f(x)+g(x)-1} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Risposta

Abbiamo

$$[f(x)+g(x)]^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad [f(x)+g(x)]^2 - 1^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [f(x)+g(x)-1]\cdot[f(x)+g(x)+1] > 0.$$

Pertanto, i due fattori $f(x)+g(x)-1$ e $f(x)+g(x)+1$ hanno lo stesso segno e non si annullano mai. Dunque, il loro rapporto è sempre definito e, essendo fatto tra numeri dello stesso segno, è sempre positivo.

Esercizio

Sia x un numero reale. Allora $\cos^2(x)$ è uguale a

[1] $\cos(2x) - 1$ [2] $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ [3] $\sin^2(x) - \cos(2x)$ [4] $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Risposta

Ricordiamo che le equazioni che esprimono la duplicazione del seno, coseno e tangente sono

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Utilizzando la duplicazione del coseno risulta

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - [1 - \cos^2(x)] = 2\cos^2(x) - 1$$

da cui

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

per cui la risposta corretta è la [2].

N.B. Quest'ultima equazione esprime la bisezione del coseno!!

Esercizio

Il valore della somma $\cos(40^\circ) + \cos(140^\circ)$ è

1. negativo ma diverso da -1
2. positivo
3. 0
4. irrazionale
5. -1

Risposta

Osserviamo che $140^\circ = 180^\circ - 40^\circ$ per cui risulta

$$\cos(40^\circ) + \cos(140^\circ) = \cos(40^\circ) + \cos(180^\circ - 40^\circ) = \cos(40^\circ) - \cos(40^\circ) = 0.$$

Esercizio

Si consideri l'equazione

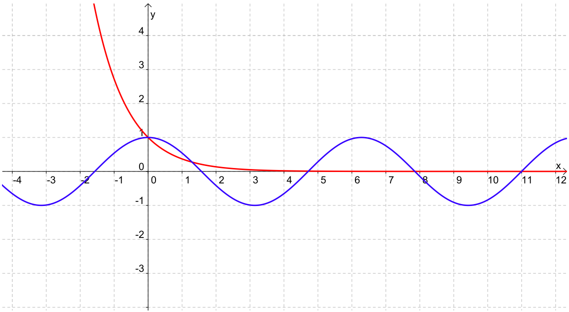
$$e^{-x} = \cos(x)$$

Indicare quali delle affermazioni che seguono sono vere e quali false.

1. ha infinite soluzioni positive
2. ha la soluzione $x = 0$
3. ha la soluzione $x = -\pi$
4. ha la soluzione $x = \pi$

Risposta

I grafici delle due funzioni $f_1(x) = exp(-x)$ e $f_2(x) = \cos(x)$ mostrano che risultano vere la 1 e la 2, false le altre.

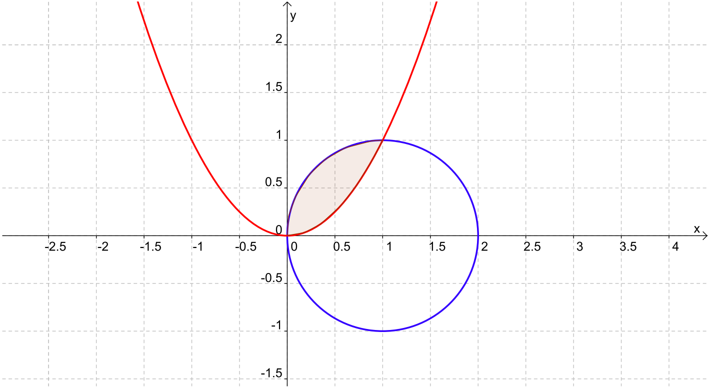


Esercizio

Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 & \leq & 1 \\ y & > & x^2 \end{cases}$$

Risposta



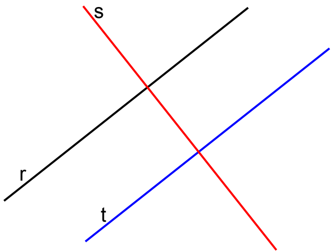
Esercizio

Siano r, s e t tre rette distinte del piano. La retta r è perpendicolare ad s ed s è perpendicolare a t. Quanti punti hanno in comune r e t?

1. infiniti
2. le informazioni non sono sufficienti a trarre una conclusione
3. nessuno
4. due
5. uno

Risposta

La situazione è schematizzata nella seguente figura per cui le rette r e t, essendo parallele tra loro, non hanno alcun punto in comune.



Esercizio

Determinare, se possibile, $n \in \mathbb{N}$ tale che sia soddisfatta l'uguaglianza

$$\sqrt[4]{2\sqrt[n]{\sqrt{512}}} = \sqrt{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}}$$

Risposta

Poiché $512 = 2^9$, abbiamo

$$\sqrt[4]{2\sqrt[n]{\sqrt{512}}} = \left\{2\cdot\left[\left(2^9\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}\right\}^{\frac{1}{4}} = \left\{2^{1+9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}\right\}^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2n+9}{8n}}$$

e

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}} = \left\{2\cdot\left[\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{2^{1+3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{24}}$$

Quindi, affinché sussista l'uguaglianza deve risultare

$$\frac{2n+9}{8n} = \frac{15}{24} \quad\Leftrightarrow\quad 24\cdot(2n+9) = 15\cdot 8n \quad\Leftrightarrow\quad 2n+9 = 5n \quad\Leftrightarrow\quad n = 3.$$

Esercizio

Quanti sono i possibili anagrammi della parola CELLULE ?
Risposta

La parola CELLULE è formata da $n = 7$ lettere. Alcune lettere sono ripetute ed altre no. In totale abbiamo quattro lettere distinte: C, E, L, U. Con riferimento a queste quattro lettere definiamo i seguenti numeri s_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

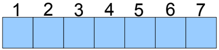
- la lettera L ripetuta tre volte: $s_1 = 3$;
- la lettera E ripetuta due volte: $s_2 = 2$;
- la lettera C ripetuta una volta: $s_3 = 1$;
- la lettera U ripetuta una volta: $s_4 = 1$.

Ciò posto, il numero di anagrammi differenti N_a è esprimibile con la relazione

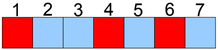
$$N_a = \frac{n!}{s_1! \cdot s_2! \cdot s_3! \cdot s_4!} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 20 \cdot 21 = 420$$

dove abbiamo tenuto conto che $1! = 1$.
La relazione precedente, adattata ogni volta alla parola del momento, ha validità generale. Vediamone la giustificazione per la parola cellule.

Esercizio

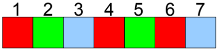


cerco gli anagrammi della
parola di 7 lettere CELLULE



scelgo 3 posizioni per la L
tra le 7 disponibili

posso farlo in C(7,3) combinazioni



scelgo 2 posizioni per la E
tra le rimanenti 4 = 7-3

posso farlo in C(4,2) combinazioni

Completo aggiungendo le
2 lettere <u>distinte</u> rimanenti

posso farlo in 2! disposizioni

Il numero di anagrammi N_a è

$$\begin{aligned}
N_a &= C(n, s_1) \cdot C(n - s_1, s_2) \cdot D(n - s_1 - s_2, n - s_1 - s_2) \\
&= \frac{n!}{(n - s_1)! \cdot s_1!} \cdot \frac{(n - s_1)!}{(n - s_1 - s_2)! \cdot s_2!} \cdot \frac{(n - s_1 - s_2)!}{[(n - s_1 - s_2) - (n - s_1 - s_2)]!} \\
&= \frac{n!}{s_1! \cdot s_2!}
\end{aligned}$$

dato che, per definizione, $0! = 1$.

Esercizio

Con riferimento alla funzione

$$f(x) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2} - 1\right)^2}$$

indicare le affermazioni vere e quelle false.

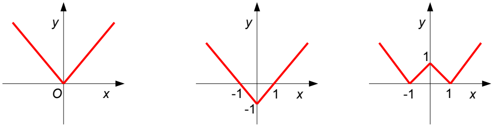
1. l'equazione $f(x) = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ ha quattro soluzioni distinte
2. esiste $\alpha > 1$ tale per cui $f(x) = \alpha$ ha esattamente tre soluzioni
3. il grafico di $f(x)$ contiene due semirette
4. $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$
5. il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 0$

Risposta

La funzione è definita su $\mathbb{R}$ dove vale

$$f(x) = ||x| - 1|$$

il cui grafico è l'ultimo a desta nella seguente figura dal cui esame risulta che 1, 3, 5 sono vere e 2, 4 sono false. (N.B. $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$ e la retta $x = 0$ è l'asse y).



$f_1(x) = |\,x\,|$ $\quad$ $f_2(x) = |\,x\,| - 1$ $\quad$ $f(x) = |\;|\,x\,| - 1\,|$