Esercizio

Rispondere alle seguenti questioni.

1. Quanti numeri distinti di cinque cifre posso formare con le cifre 1, 2, 3, 4 anche ripetute?
2. Quanti numeri distinti e pari di cinque cifre posso formare con le cifre 1, 2, 3, 4 anche ripetute?
3. Quanti numeri distinti di cinque cifre posso formare con le cifre 1, 2, 3, 4 senza che alcuna sia ripetuta?

Risposta

1. Sono
$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$$
numeri distinti. Il più piccolo è 11111 ed il più grande è 44444.
2. In questo caso l'ultima cifra deve essere pari mentre le altre qualsiasi. Ne segue che i numeri sono
$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4^4 = 512$$
3. In questo caso le cifre devono essere tutte distinte. Però, non posso costruire numeri di 5 cifre che le abbiamo tutte distinte usando solo quattro cifre! Dunque, non c'è nessun numero!

Esercizio

Siano $P_1(x)$ e $P_2(x)$ due polinomi, di gradi n_1 ed n_2 rispettivamente, che soddisfano la disequazione

$$|P_1(x)| + |P_2(x)| > \epsilon$$

per qualche $\epsilon > 0$. Dimostrare che i due polinomi non hanno alcuna radice in comune.

Risposta

Se $\xi \in \mathbb{R}$ fosse una radice comune ai due polinomi dovrebbe risultare contemporaneamente

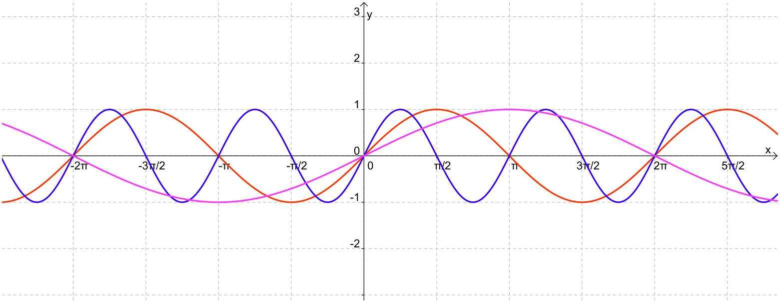
$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(\xi) = 0 \\ P_2(\xi) = 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad |P_1(\xi)| + |P_2(\xi)| = 0 + 0 = 0$$

contro l'ipotesi che sancisce $|P_1(x)| + |P_2(x)| > \epsilon$ su tutto $\mathbb{R}$ e, dunque, in particolare, per ξ. Pertanto, una siffatta ξ non esiste.

Esercizio

Individuare nella figura i grafici delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \sin(2x), \quad f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right)$$



Risposta

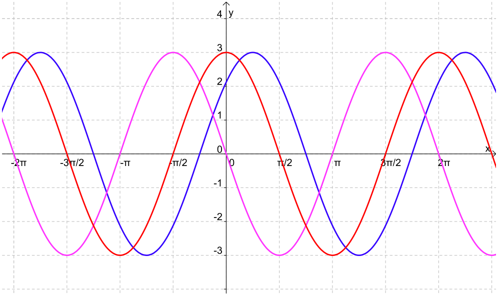
Detto $A > 0$ un numero reale, ricordiamo che la funzione $f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,x + \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è definita su $\mathbb{R}$, ha periodo T, è limitata e soddisfa la relazione $-A \leq f(x) \leq A$, $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, i periodi risultano

$$\frac{2\pi}{T} = 1 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi, \quad \text{(rossa)} \qquad \frac{2\pi}{T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = \pi, \quad \text{(blu)} \qquad \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T = 4\pi \quad \text{(magenta)}$$

Esercizio

Individuare nella figura i grafici delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = 3 \cdot \cos(x), \qquad f_2(x) = 3 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad f_3(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$



Risposta

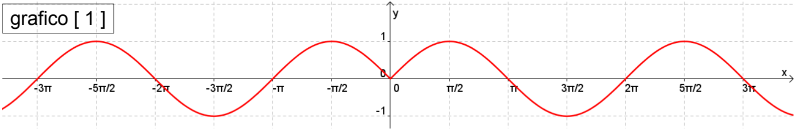
Detto $A > 0$ un numero reale, ricordiamo che la funzione $f(x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}x + \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è definita su $\mathbb{R}$, ha periodo T, è limitata e soddisfa la relazione $-A \leq f(x) \leq A$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso in esame è $A = 3$ e (ricordiamo le relazioni per gli archi notevoli!)

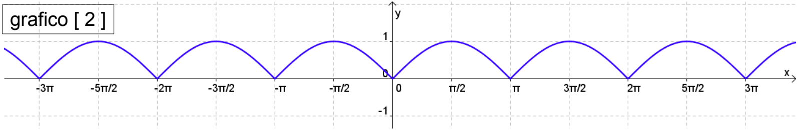
$$f_3(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -3 \cdot \sin(x)$$

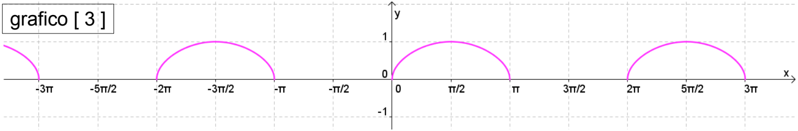
Esercizio

Individuare nella figura i grafici delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = |\sin(x)|, \qquad f_2(x) = \sin(|x|), \qquad f_3(x) = \sqrt{\sin(x)}$$



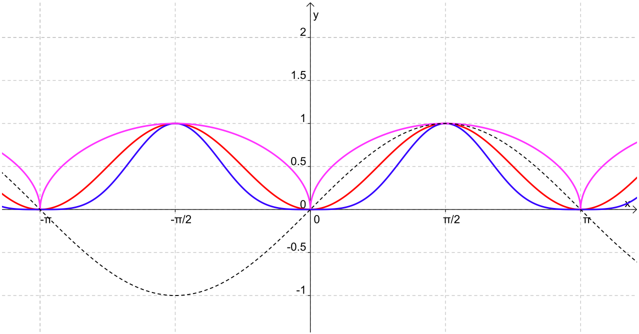




Esercizio

Individuare nella figura i grafici delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = [\sin(x)]^2\,, \qquad f_2(x) = [\sin(x)]^4\,, \qquad f_3(x) = \sqrt{|\sin(x)|}$$



Risposta

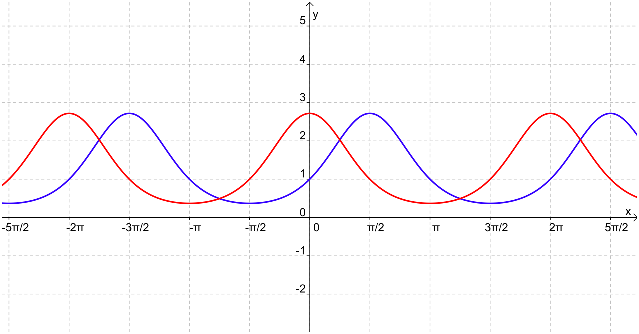
Rosso: $f_1(x)$, blu: $f_2(x)$, magenta: $f_3(x)$. Infatti, per $0 < \xi < 1$ è

$$\xi^4 < \xi^2 < \xi < (\xi)^{1/2}$$

Esercizio

Individuare nella figura i grafici delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = e^{\sin(x)}, \qquad f_2(x) = e^{\cos(x)}$$



Risposta

Per associare i grafici, utilizziamo il fatto che la funzione esponenziale è monotona e ricordiamoci i grafici di $\sin(x)$ e $\cos(x)$!

Esercizio

Si consideri l'equazione

$$1 - e^x = |\tan(|x|)|$$

Indicare quali delle affermazioni che seguono sono vere e quali false.

1. ha infinite soluzioni negative
2. ha infinite soluzioni positive
3. ha la soluzione $x = 0$
4. ha la soluzione $x = -\frac{\pi}{2}$
5. esiste un $M > 0$ tale che $x = -2^M$ è soluzione

Risposta

I grafici delle due funzioni $f_1(x) = 1 - exp(x)$ e $f_2(x) = |\tan(|x|)|$ mostrano che risultano vere la 1, la 3 e la 5. Per quest'ultima, detta $\xi < 0$ una delle radici dell'equazione, osserviamo che essendo $M > 0$ l'equazione $-2^M = \xi$ ha sempre la soluzione $M = \log_2(-\xi)$.

Esercizio

Risolvere le equazioni

$$6^{\cos(x)} = 1, \quad 5^{\sin(x)} = 1, \quad 4^{\tan(x)} = \frac{1}{4}$$

Risposta

Per la prima equazione abbiamo

$$6^{\cos(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6^{\cos(x)} = 6^0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per la seconda equazione risulta

$$5^{\sin(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{\sin(x)} = 5^0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per la terza equazione abbiamo

$$4^{\tan(x)} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4^{\tan(x)} = 4^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 1$$

Risposta

Abbiamo

$$\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

che porge come soluzione

$$[1] \;\; x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{e} \quad [2] \;\; x - \frac{\pi}{3} = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ossia

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

N.B. Questa strategia è generale:

$$a\sin(x)+b\cos(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\phi+x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dove ϕ è un angolo tale che

$$\cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esercizio

Sia $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$. Quale delle seguenti relazioni è corretta?

1. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
2. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
3. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
4. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

Risposta

Poiché

$$\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

α appartiene al secondo quadrante e, quindi, ha seno positivo e coseno negativo. Quindi, la sola proposta valida è la [2].