Esercizio

Sia $a \in \mathbb{R}$ non nullo e siano m, n numeri interi non nulli con $m \neq n$. Allora a^m / a^n è uguale a

[1] $1/a^{n-m}$ [2] $1/a^{m-n}$ [3] $1/a^{-n-m}$ [4] a^{n-m}

Risposta

Vale la [1] perché per le proprietà delle potenze risulta

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-(-m+n)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Possiamo scartare delle opzioni con dei tentativi; ad esempio, presi $a = 3$, $m = 2$, $n = 1$ è

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{3^2}{3^1} = \frac{9}{3} = 3$$

mentre [2] e [3] vanno scartate perché risulta

$$\frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{3^{2-1}} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} < 1 < 3$$

$$\frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{3^{-1-3}} = \frac{1}{3^{-4}} = \frac{3^0}{3^{-4}} = 3^{0-(-4)} = 3^4 = (3^2)^2 = 9^2 = 81 > 3.$$

Esercizio

Confrontare i due numeri $5^{1/3}$ e $3^{1/2}$

Risposta

Per confrontarli portiamo le due potenze allo stesso esponente. Essendo m.c.m.$(3, 2) = 6$ abbiamo

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

per cui risulta

$$5^{1/3} = 5^{2/6} = (5^2)^{1/6} = 25^{1/6} = \sqrt[6]{25}$$

$$3^{1/2} = 3^{3/6} = (3^3)^{1/6} = 27^{1/6} = \sqrt[6]{27}$$

Ora, essendo $25 < 27$ si ha pure $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$ ossia $5^{1/3} < 3^{1/2}$.

Esercizio

Determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$2^{-3/2} \cdot \sqrt{2} + 3^{1/2}x = \frac{7}{2}$$

[1] $\sqrt{3}$ [2] $\sqrt{2}$ [3] $3 \cdot \sqrt{3}$ [4] $3 \cdot \sqrt{2}$ [5] $2 \cdot \sqrt{3}$

Risposta

E'

$$2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2^{1+1/2}} = \frac{1}{2^1 \cdot 2^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2^{-3/2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

per cui l'equazione proposta equivale a

$$\frac{1}{2} + 3^{1/2}x = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3^{1/2}x = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \cdot x = \frac{-1+7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \cdot x = 3$$

che dà

$$x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Esercizio

Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false

1. Esiste x irrazionale ed $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n \in \mathbb{N}$ per infiniti n.
2. Esistono due numeri irrazionali distinti x_1 ed x_2 tali che $x_1 - x_2 \in \mathbb{N}$.
3. Esiste almeno un x irrazionale ed un $k \in \mathbb{N}$ tali che $k \cdot x \in \mathbb{N}$.
4. Il numero $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale.

Risposta

1. L'affermazione è vera. Ad esempio, prendiamo $x = \sqrt{2}$ ed $n = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$. Segue
$$(\sqrt{2})^{2k} = [(\sqrt{2})^2]^k = 2^k \in \mathbb{N}.$$
2. L'affermazione è vera. Ad esempio, prendendo $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$ è $x_1 - x_2 = 2 \in \mathbb{N}$.
3. L'affermazione è falsa. Infatti, se una siffatta coppia esistesse, avremmo per opportuni $m, n \in \mathbb{N}$
$$k \cdot x = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{n \cdot k}$$
per cui $x \in \mathbb{Q}$, contro l'ipotesi.
4. L'affermazione è vera. Supposto, infatti, che sia razionale, avremmo per opportuni $m, n \in \mathbb{N}$
$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$$
che risulta falsa (la prova che $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ è analoga a quella di $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Esercizio

Quale dei seguenti numeri c verifica la condizione $3 < c < 4$?

$$[1]\quad c = 1 + \sqrt[3]{9} \qquad [2]\quad c = \sqrt{13} + 1 \qquad [3]\quad c = 2\sqrt{7} \qquad [4]\quad \frac{\sqrt{73}}{3}$$

Risposta

Ricordiamo che per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $1 < x_1 < x_2$ risulta $1 < \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, $n = 2, 3, 4, \cdots$.
L'opzione [2] è da scartare perché da $9 < 13 < 16$ segue

$$3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 3+1 < \sqrt{13}+1 < 4+1 = 5$$

L'opzione [3] è da scartare perché da $4 < 7 < 9$ segue

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 \cdot 2 < 2 \cdot \sqrt{7} < 2 \cdot 3 = 6$$

L'opzione [4] è da scartare perché da $73 < 81$ segue

$$\frac{\sqrt{73}}{3} < \frac{\sqrt{81}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Pertanto, è vera la [1]. Infatti è

$$2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2 + 1 < \sqrt[3]{9} + 1 < 3 + 1 = 4.$$

Esercizio

Se $(b+c)^2 = b^2 + d$ con b, c, d diversi da zero, allora $d/c - c$ è uguale a

[1] $b/2$ [2] b [3] $2b$ [4] b^2

Risposta

Utilizzando lo sviluppo del quadrato di un binomio abbiamo

$$(b+c)^2 = b^2 + d \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 2b \cdot c + c^2 = b^2 + d \quad \Leftrightarrow \quad (2b+c) \cdot c = d$$

e quindi, dividendo ambo i membri dell'equazione per c, fatto lecito perché $c \neq 0$, otteniamo

$$2b + c = \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{c} - c = 2b.$$

Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione $1 + 3x - 2x^2 = 0$.

Risposta

Ricordiamo che le soluzioni reali di $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Nel caso in esame è $a = -2$, $b = 3$, $c = 1$ per cui risulta

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9 + 8 = 17$$

e

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{(-3 \pm \sqrt{17}) \cdot (-1)}{-4 \cdot (-1)} = \frac{3 \mp \sqrt{17}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Ricordiamo che

- se $\Delta < 0$ l'equazione non ha radici reali
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha due radici reali coincidenti.

Esercizio

Le soluzioni dell'equazione $(x^3 - 4x) \cdot (x^2 + 1) = 0$ sono

[1] $0, 2, -2$ [2] $0, 2$ [3] $0, 1, 2, -2$ [4] $0, 1, -1, 2, -2$

Risposta

Per la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione data sono l'unione delle soluzioni delle due equazioni

$$[a] \quad x^3 - 4x = 0 \qquad\qquad [b] \quad x^2 + 1 = 0$$

L'equazione [b] non ha soluzioni reali perché $x^2 \geq 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ per cui $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ e quindi non può mai verificarsi $x^2 + 1 = 0$.
L'equazione [a] può essere riscritta come

$$x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$$

che, per la legge di annullamento del prodotto, dà le soluzioni $x = 0$, $x = 2$ ed $x = -2$.
L'unione delle soluzioni di [a] e [b] coincide con [a] visto che [b] non ha soluzioni reali.

Esercizio

Sia $f(x) = x^3 + 8$. Per quale valore di x si ha che $f(x)$ è il doppio del valore che la funzione assume in $x = 0$?

[1] 16 [2] 0 [3] 2 [4] -2

Risposta

Dobbiamo trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = 2 \cdot f(0)$. Ora, è $f(0) = 0^3 + 8 = 8$ per cui risulta

$$x^3 + 8 = 2 \cdot 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Osserviamo che non ci sono altre radici reali. Infatti da

$$x^3 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(x^2 + x + 2) = 0$$

otteniamo, per la legge di annullamento del prodotto, $x - 2 = 0$, ossia $x = 2$ e $x^2 + x + 2 = 0$ che non ha radici reali perché il discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$.

Esercizio

L'equazione $2|x| = x - 1$

[1] non ha soluzioni [2] ha due soluzioni razionali non intere [3] ha due soluzioni

[4] ha una sola soluzione intera [5] ha solo soluzioni intere

Risposta

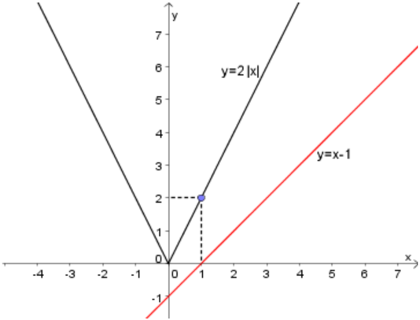
Ricordiamo la definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi.

- $x < 0$: è $|x| = -x$ per cui l'equazioni diventa $2 \cdot (-x) = x - 1$ che dà $-3x = -1$ ossia $x = 1/3$. Questa soluzione va scartata perché siamo sotto la condizione $x < 0$!
- $x \geq 0$: è $|x| = x$ per cui l'equazione diventa $2 \cdot x = x - 1$ che dà $x = -1$. Questa soluzione va scartata perché siamo sotto la condizione $x \geq 0$!

Pertanto, l'equazione non ha soluzioni.



Esercizio

Risposta

Siano x, y, z numeri reali non nulli. Il numero $2^{x(y+z)}$ è uguale a

[1] $2^{xy} + 2^{xz}$ [2] $\left(2^y \cdot 2^z\right)^x$ [3] $2^x \cdot 2^{y+z}$ [4] nessuna delle precedenti

Risposta

E' corretta la [2] dato che per le proprietà delle potenze risulta

$$\left(2^y \cdot 2^z\right)^x = \left(2^{y+z}\right)^x = 2^{(y+z)\cdot x} = 2^{x(y+z)}.$$

Qualche alternativa può essere scartata con dei tentativi. Posto $x = y = 1$, $z = -1$ si ha

$$2^{x(y+z)} = 2^{1\cdot(1+(-1))} = 2^{1\cdot 0} = 2^0 = 1$$

mentre [1] e [3] danno risultati differenti e vanno, quindi, eliminate:

$$2^{xy} + 2^{xz} = 2^{1\cdot 1} + 2^{1\cdot(-1)} = 2 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2^1} > 2 > 1$$

$$2^x \cdot 2^{y+z} = 2^1 \cdot 2^{1+(-1)} = 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 1 = 2 > 1.$$

Esercizio

Sia $x \in \mathbb{R}$. L'espressione $(x^2 + x + 1)^{-1}$ è uguale a

[1] $1 + 1/(x^2 + x)$ [2] $1/x^2 + 1/(x + 1)$ [3] $x^{-1} + (x^2 + 1)^{-1}$

[4] nessuna delle precedenti risposte è corretta

Risposta

Osserviamo subito che

$$(x^2 + x + 1)^{-1} = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^1} = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

Questa espressione per $x = 0$ vale $1/(0^2 + 0 + 1) = 1/1 = 1$. Le espressioni delle alternative [1] e [2] non sono valide per $x = 0$ perché il denominatore si annulla. Pertanto, vanno scartate! Inoltre, dato che $x^{-1} = 1/x^1 = 1/x$ anche l'espressione [3] non è definita per $x = 0$. E' da scartare, quindi. In definitiva, nessuna delle alternative [1], [2] e [3] è corretta. Vale la [4].

Esercizio

Il numero $\sqrt{9}$ è uguale a

[1] 3 [2] $\pm$ 3 [3] $-$ 3 [4] nessuna delle precedenti

Risposta

Il simbolo $\sqrt{a}$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ indica sempre quell'unico numero positivo α che elevato al quadrato dà a.
Pertanto è

$$\sqrt{9} = 3.$$

Esercizio

Un'azienda abbassa lo stipendio dei suoi dipendenti del 10% e successivamente lo rialza del 10%. Come è il nuovo stipendio rispetto a quello iniziale?

[1] uguale [2] inferiore [3] superiore [4] dipende dallo stipendio di partenza

Risposta

Sia S_0 lo stipendio iniziale. Allora lo stipendio S_1 dopo l'abbassamento è

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = -10\% = -\frac{10}{100} \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_0 = -\frac{10}{100} S_0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_0 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{9}{10} S_0$$

Sia S_2 lo stipendio dopo il rialzo (rispetto a S_1) ancora del 10%. Abbiamo

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} = +10\% = +\frac{10}{100} \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_1 = \frac{10}{100} S_1 \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = \frac{11}{10} S_1$$

Quindi S_2 rispetto a S_0 è

$$S_2 = \frac{11}{10} S_1 = \frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10} S_0 = \frac{99}{100} S_0 < S_0.$$

Pertanto, è vera la [2].

Esercizio

Qual è la cifra delle unità del numero 1999^{1999}?

[1] 1 [2] 3 [3] 7 [4] 9 [5] nessuna delle precedenti

Risposta

E'

$$1999^{1999} = \underbrace{1999 \cdot 1999 \cdot 1999 \cdot \cdots \cdot 1999}_{1999 \text{ volte}}$$

Osserviamo che

$$\begin{array}{rr} 1999 & \times \\ 1999 & = \\ \hline c_1 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} c_1 1 & \times \\ 1999 & = \\ \hline c_2 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} c_2 9 & \times \\ 1999 & = \\ \hline c_3 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} c_3 1 & \times \\ 1999 & = \\ \hline c_4 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} c_4 9 & \times \\ 1999 & = \\ \hline c_5 1 & \end{array} \qquad \ldots$$

dove c_1, c_2, ecc. denotano delle cifre che non abbiamo precisato.
Guardando i prodotti svolti notiamo che il prodotto di un numero pari di fattori uguali a 1999 termina con 1 mentre il prodotto di un numero dispari termina con 9. Noi dobbiamo fare il prodotto di 1999 per se stesso 1999 volte. Un numero dispari di volte, quindi. Pertanto, la cifra delle unità di 1999^{1999} è 9.

Esercizio

Sia N la somma dei 25 numeri primi più piccoli. La cifra delle unità di N è uguale a (il numero 1 non è considerato primo per cui il più piccolo numero primo è 2)

[1] 1 [2] 3 [3] 7 [4] 9 [5] 0

Risposta

Si tratta di sommare 25 numeri di cui uno è pari (il 2) e tutti gli altri sono dispari perché numeri primi. Pertanto,

- la somma dei 24 numeri primi dispari è un numero pari (la somma di due numeri dispari è un numero pari e posso fare la somma delle 12 coppie di numeri dispari per ottenere 12 numeri pari che sommati tra loro danno ancora un numero pari)
- somma il numero 2 al risultato del punto precedente trovando un numero pari (pari + pari dà pari)

Quindi, N è un numero pari. Questo vuole dire che la cifra delle unità è 0 o un numero pari. Vale, perciò, la [5].

A titolo di curiosità, i primi sono

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

la cui somma vale 1060.