Esercizio

Il numero 1152 scomposto in fattori primi si scrive

[1] $2^7 \cdot 3^2$ [2] $2 \cdot 5 \cdot 11$ [3] $7 \cdot 31$ [4] 1152

Risposta

Il numero 1152 termina con la cifra 2 e, di conseguenza, è divisibile per 2. Questo significa che ha il numero 2 tra i suoi fattori primi. Quindi, [3] va esclusa così come [4] che non rappresenta la scomposizione in fattori del numero dato (lo sarebbe se il numero fosse primo).
Osserviamo ora che la scomposizione non può essere quella specificata in [2] perché contiene il fattore 5 mentre il numero 1152 non è divisibile per 5 (la cifra delle unità dovrebbe essere 0 oppure 5).

Per esclusione, resta la [1].

Esercizio

Il numero $(\sqrt{3})^{10}$ è uguale a

[1] $\sqrt{3^5}$ [2] 3^5 [3] $\sqrt[20]{3}$ [4] $\sqrt[10]{3}$

Risposta

Per le proprietà delle potenze abbiamo

$$(\sqrt{3})^{10} = (3^{1/2})^{10} = 3^{\frac{1}{2}\cdot 10} = 3^5.$$

Esercizio

Sono dati i numeri $a = 5\sqrt{10}$, $b = \sqrt{190}$, $c = 2\sqrt{51}$. Quale affermazione è vera?

[1] $c < a < b$ [2] $a < b < c$ [3] $c < b < a$ [4] $b < c < a$

Risposta

Confrontiamo a con b. Indichiamo con ? uno qualunque degli operatori di relazione ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$). Qualunque sia l'operatore, abbiamo

$$a \,?\, b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \,?\, b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5^2 \cdot 10 \,?\, 190 \quad \Leftrightarrow \quad 5^2 \cdot 10 \,?\, 19 \cdot 10 \quad \Leftrightarrow \quad 25?19$$

Quindi, è $25 > 19$ e, di conseguenza, $a > b$. Questo esclude le risposte [1] e [2]. Osservando [3] e [4] vediamo che dobbiamo confrontare b con c perché è sempre proposto $c < a$ (che va, dunque, assunta come vera!!). Abbiamo

$$b \,?\, c \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \,?\, c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 190 \,?\, 2^2 \cdot 51 \quad \Leftrightarrow \quad 190 \,?\, 204$$

Perciò è $190 < 204$ e, di conseguenza, $b < c$.
In definitiva, è $b < a$, $b < c$ e $c < a$. Riunendole risulta $b < c < a$.

Esercizio

Sia $F = T^3/R^2$ con R e T positivi. Sapendo che $T^2/R^3 = 2$ si può certamente dedurre che

[1] $F = 2\dfrac{T}{R}$ [2] $F = 2TR$ [3] $F = \dfrac{\sqrt{2T}}{R}$ [4] $F = \sqrt[3]{2RT}$

Risposta

E'

$$F = \frac{T^3}{R^2} = \frac{T^2 \cdot T}{R^3} \cdot R = \left(\frac{T^2}{R^3}\right) \cdot TR = 2TR.$$

Esercizio

Se

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

con $p,\ q,\ f$ non nulli, allora p è uguale a

$$[1]\ \frac{fq}{q-f} \qquad [2]\ f-q \qquad [3]\ \frac{1}{f}-\frac{1}{q} \qquad [4]\ \frac{f}{q}$$

Risposta

Ricaviamo p

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}-\frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{q}}=\frac{1}{\frac{q-f}{fq}}=\frac{fq}{q-f}.$$

Osserviamo che si poteva trovare la risposta corretta anche inserendo dei numeri. Presi, ad esempio, $p=q=2$ ed $f=1$ che verificano la relazione, si ottiene

$$f-q=1-2=-1\neq p, \qquad \frac{1}{f}-\frac{1}{q}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq p, \qquad \frac{f}{q}=\frac{1}{2}\neq p.$$

Quindi, le risposte [2], [3] e [4] vanno scartate. Resta la [1].

Esercizio

Si consideri l'equazione $x^2 - 3x + c = 0$ dove x è l'incognita e c un parametro. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

[1] Per $c = 2$ il numero -1 è soluzione dell'equazione
[2] Per $c = 0$ l'equazione ha una sola soluzione
[3] Per $c > 9/4$ l'equazione non ammette soluzioni
[4] Per opportuni valori di c l'equazione ha 4 soluzioni

Risposta

- L'equazione è di secondo grado per cui ha al più due soluzioni. Questo esclude la [4].
- Per $c = 0$ l'equazione diventa $x^2 - 3x = 0$ ossia $x(x-3) = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = 3$. Perciò, [2] è sbagliata.
- Per $c = 2$ l'equazione diventa $x^2 - 3x + 2 = 0$ ossia $(x-1)(x-2) = 0$ che ha $x = 1$ e $x = 2$ come soluzioni. Dunque, [1] va scartata.
- Resta la [3]. In effetti, perché non ci siano soluzioni deve essere $\Delta < 0$ ossia

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 4c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -9 + 4c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4c > 9 \quad \Leftrightarrow \quad c > 9/4$$

Esercizio

Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

[1] $f(x) = 0$ ha infinite soluzioni
[2] i numeri -1 e -2 sono soluzioni di $f(x) = 0$
[3] l'equazione $f(x) = 0$ ha quattro soluzioni distinte
[4] nessuno degli asserti precedenti è vero

Risposta

Si tratta di determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. E' una equazione algebrica ($f(x)$ è un polinomio) di terzo grado per cui ha al più tre radici reali. Questo esclude le opzioni [1] e [3].
Verifichiamo la [2]. Il numero -1 è soluzione se verifica l'equazione ossia rende il primo membro uguale al secondo. Abbiamo

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = -1 - 3 \cdot 1 + 4 = 0.$$

Quindi il primo membro è uguale al secondo e il numero -1 è soluzione di $f(x) = 0$.
Procediamo allo stesso modo per il numero -2. Abbiamo

$$(-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 4 = -8 - 3 \cdot 4 + 4 = -16.$$

In questo caso il primo membro vale -16 valore diverso dal secondo membro che è 0. Pertanto, -2 non è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Quindi, l'opzione [2] va scartata.
Per esclusione, è vera la [4].

Esercizio

Il valore iniziale di una grandezza che a seguito dell'incremento del 20% ha assunto il valore di 30, era

[1] 23 [2] 24 [3] 25 [4] 26

Risposta

Sia $\tilde{x} = 30$ il valore dopo l'incremento ed x quello iniziale. Allora è

$$\frac{\tilde{x} - x}{x} = +20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

da cui si deve ricavare x. E'

$$\frac{\tilde{x} - x}{x} = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot (\tilde{x} - x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 5\tilde{x} = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{6}\,\tilde{x} = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25.$$

Esercizio

Il risultato della divisione del polinomio di secondo grado $x^2 - 5x + 6$ per il polinomio di primo grado $x - 2$ è

[1] $x - 5$ con resto 3 [2] $x - 3$ [3] x [4] x^2

Risposta

Osserviamo che 2 è soluzione di $x^2 - 5x + 6 = 0$ perché risulta $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$. Questo esclude la [1] perché la divisione di $x^2 - 5x + 6$ per $x - 2$ non ha resto.
Ora, il quoziente della divisione di due polinomi ha grado inferiore di quello del divisore $x^2 - 5x + 6$ che è 2.
Pertanto, non può risultare x^2 e quindi [4] va esclusa.
Osserviamo infine che non può essere x perché vorrebbe dire che sarebbe corretta la scrittura
$x^2 - 5x + 6 = x \cdot (x - 2)$ mentre è palese che 0 non è soluzione di $x^2 - 5x + 6$.
Resta valida la [2]. Infatti

$$(x - 2) \cdot (x - 3) = x^2 - 3x - 2x - 2 \cdot (-3) = x^2 - 5x + 6.$$

Esercizio

Rappresentare in un piano cartesiano i punti $A = (5, 0)$, $B = (0, -3)$ e $C = (-3, 4)$. Calcolare il punto medio M del segmento AC. Infine, determinare le lunghezze $\overline{AC}$ ed $\overline{AM}$.

Risposta

Dati $A = (x_A, y_A)$ e $C = (x_C, y_C)$, il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento AC è

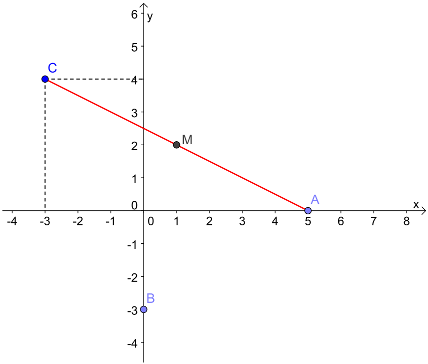
$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2. \end{aligned}$$

La lunghezza del segmento AC vale

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(5 - (-3))^2 + (0 - 4)^2} \\ &= \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}. \end{aligned}$$

dato che $80 = 16 \cdot 5 = 4^2 \cdot 5$. Infine, dato che M divide a metà il segmento AC, la lunghezza di AM è

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2 \cdot \sqrt{5}.$$



Esercizio

Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A = (5, 0)$ e $C = (-2, 4)$.

Risposta

La retta passante per A e C non è parallela a nessuno degli assi. Quindi, ha equazione

$$y = mx + q.$$

Determiniamo m e q imponendo che la retta passi per A e per C. Questo significa che le coordinate di $A = (5, 0)$ e di $C = (-3, 4)$ devono soddisfare l'equazione della retta:

$$\begin{cases} y_A = m \cdot x_A + q & \text{passaggio per A} \\ y_C = m \cdot x_C + q & \text{passaggio per C} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 5 + q \\ 4 = m \cdot (-3) + q \end{cases}$$

Dalla prima equazione $q = -5m$ che sostituita nella seconda dà

$$4 = -3m - 5m \quad \Leftrightarrow \quad -8m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Quindi è

$$q = -5m = -5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

La retta richiesta è perciò

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Esercizio

Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per il punto $B = (0, -3)$ ed ortogonale alla retta passante per i punti $A = (5, 0)$ e $C = (-2, 4)$.

Risposta

Sia $r : y = mx + q$ la retta passante per A e C la cui equazione è

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Sia $y = m'x + q'$ la retta ad essa ortogonale e passante per B. Allora devono essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} m' & = & -\frac{1}{m} & \text{ortogonalità ad r} \\ y_B & = & m' \cdot x_B + q' & \text{passaggio per B} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} m' & = & -\frac{1}{-1/2} \\ -3 & = & m' \cdot 0 + q' \end{cases}$$

Dalla prima equazione risulta $m' = 2$ e dalla seconda $q' = -3$. La retta cercata è dunque

$$y = 2x - 3.$$

Esercizio

Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per il punto $B = (0, -3)$ e parallela alla retta passante per i punti $A = (5, 0)$ e $C = (-2, 4)$.

Risposta

Sia $r : y = mx + q$ la retta passante per A e C la cui equazione è

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Sia $y = m''x + q''$ la retta ad essa parallela e passante per B. Allora devono essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} m'' & = & m & \text{parallelismo ad r} \\ y_B & = & m'' \cdot x_B + q'' & \text{passaggio per B} \end{cases}$$

ossia

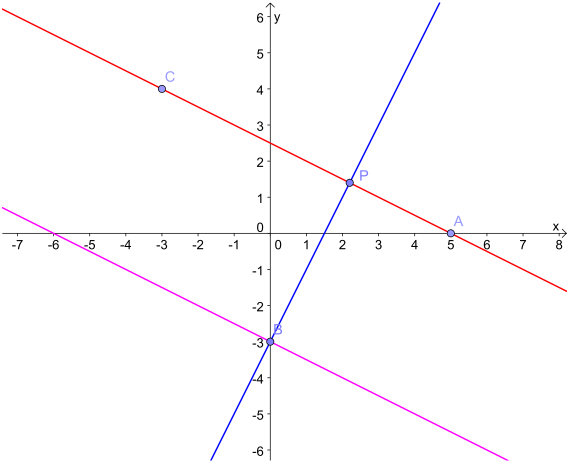
$$\begin{cases} m'' & = & -\frac{1}{2} \\ -3 & = & m'' \cdot 0 + q'' \end{cases}$$

Dalla prima equazione risulta $m'' = -1/2$ e dalla seconda $q'' = -3$. La retta cercata è dunque

$$y = -\frac{1}{2}x - 3.$$

Esercizio

Figura riassuntiva delle varie rette



Esercizio

Determinare il punto di intersezione delle due rette

$$r : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \qquad s : y = 2x - 3$$

Risposta

Il punto di intersezione $P = (x_P, y_P)$ appartiene ad entrambe le rette per cui le sue coordinate devono soddisfare sia l'equazione di r che quella di s:

$$\begin{cases} y_P = -\frac{1}{2} \cdot x_P + \frac{5}{2} & P \in r \\ y_P = 2 \cdot x_P - 3 & P \in s \end{cases}$$

Quindi risulta

$$-\frac{1}{2} \cdot x_P + \frac{5}{2} = 2 \cdot x_P - 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2}x_P = -\frac{11}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_P = \frac{11}{5}$$

Poi

$$y_P = 2 \cdot x_P - 3 = 2 \cdot \frac{11}{5} - 3 = \frac{7}{5}.$$

Pertanto, il punto di intersezione è

$$P = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

Esercizio

Determinare quanti sono i numeri naturali multipli di 3 compresi tra 1 e $N = 3000$ inclusi.

Risposta

Ragioniamo assieme. Per capire come procedere consideriamo delle situazioni più semplici: prendendo, a caso, alcuni numeri N piccoli per i quali possiamo fare delle prove.

- $N = 10$. Chiaramente, i multipli di tre minori di 10 sono 3, 6, 9. Pertanto, ho 3 numeri. Osserviamo che

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \cdot 1 \\ 6 &= 3 \cdot 2 \\ 9 &= 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

- $N = 15$. Ottengo subito 3, 6, 9, 12, 15. Sono 5 numeri. E' ancora

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \cdot 1 \\ 6 &= 3 \cdot 2 \\ 9 &= 3 \cdot 3 \\ 12 &= 3 \cdot 4 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

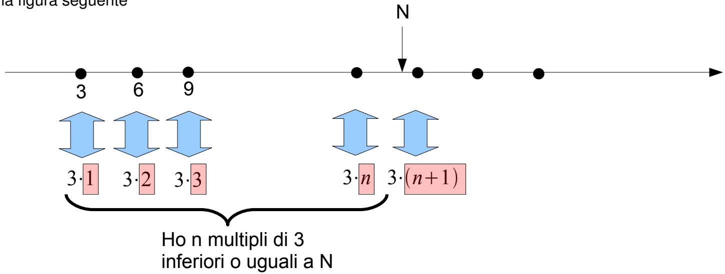
Ora, chi sono 3 e 5? Vediamo che, per come abbiamo costruito le cose,

- per $N = 10$
$$10 : 3 = 3 \text{ con resto } 1$$
- per $N = 15$
$$15 : 3 = 5 \text{ con resto } 0$$

Sembra che 3 e 5 siano dati dal quoziente intero di N per 3. Ma è proprio così in generale? Dimostriamolo!

Esercizio – continuazione

Consideriamo la figura seguente



Ora, n è proprio il quoziente intero della divisione di N per 3. Pertanto, siamo a posto!
Osserviamo che nel conteggio dei multipli di 3 è incluso anche N.
Dunque, ritornando al caso $N = 3000$, abbiamo subito che il numero di multipli di 3 inferiori o uguali a N è

$$3000 : 3 = 1000 \text{ con resto } 0$$

. Ci sono, dunque, 1000 multipli di 3 compresi tra 1 e 3000, estremi inclusi.

Esercizio

Determinare quanti sono i numeri naturali multipli di 6 o di 7 compresi tra 1 e $N = 3000$ inclusi.

Risposta

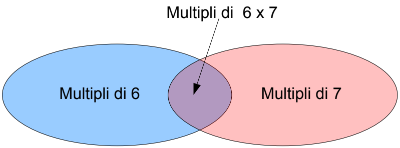
Noi siamo in grado di calcolare quanti sono i multipli di 6 e quanto sono quelli di 7. Abbiamo

$$3000 : 6 = 500 \text{ con resto } 0 \qquad 3000 : 7 = 428 \text{ con resto } 4.$$

Quindi, ci sono 500 multipli di 6 e 428 multipli di 7. Bene! Però, i multipli di 6 o di 7 **non** sono 500+428!! Perché?
Perché conto doppiamente i multipli di $6 \cdot 7$:

- un multiplo di $6 \cdot 7$ è anche un multiplo di 6: viene contato nei multipli di 6!
- un multiplo di $6 \cdot 7$ è anche un multiplo di 7: viene contato nei multipli di 7!

La situazione è sostanzialmente questa



Pertanto, dobbiamo togliere i multipli comuni a 6 e 7 ossia i multipli di $m.c.m(6, 7) = 6 \cdot 7 = 42$ che sono

$$3000 : 42 = 71 \text{ con resto } 18$$

In definitiva, i numeri multipli di 6 e 7 sono

$$500 + 428 - 71 = 857.$$