Esercizio

Sia $p \geq 5$ un numero primo. Allora, $p^2 - 1$ è sempre divisibile per 24.

Risposta

Scriviamo

$$p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1).$$

Ora, $p \geq 5$ è primo e, quindi, dispari. Dunque, $p-1$ e $p+1$ sono entrambi pari. Facciamo vedere anche che

- uno tra $p-1$ e $p+1$ è divisibile per 3.
  Infatti, osserviamo che p non può essere un multiplo di 3 perché è primo. Pertanto, abbiamo solo due casi

$p-1$	p	$p+1$
$3 \cdot k$	$3 \cdot k + 1$	$3 \cdot k + 2$
$3 \cdot k + 1$	$3 \cdot k + 2$	$3 \cdot k + 3$

- uno tra $p-1$ e $p+1$ è divisibile per 4.
  Poiché p è primo, non può essere un multiplo di 4 (e, quindi, di 2). Pertanto, abbiamo solo due casi:

$p-1$	p	$p+1$
$4 \cdot k$	$4 \cdot k + 1$	$4 \cdot k + 2$
$4 \cdot k + 2$	$4 \cdot k + 3$	$4 \cdot k + 4$

Dunque, in ogni caso uno dei due numeri $p-1$ o $p+1$ è (almeno) divisibile per 4 e per 3. Quindi, il loro prodotto è divisibile per 12. Tenendo conto, infine che il numero che non è divisibile per 4 lo è per 2, il prodotto $(p-1) \cdot (p+1)$ è divisibile per 24.

Esercizio

Calcolare i seguenti logaritmi

$$[1] \quad \log_8 2, \qquad [2] \quad \log_3 \frac{1}{81}, \qquad [3] \quad \log_{2/3} \frac{8}{27}, \qquad [2] \quad \log_{0,5} 16$$

Risposta

- caso [1]. Per la definizione di logaritmo, dobbiamo trovare x tale che

$$8^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^x = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3\cdot x} = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

- caso [2]. Per la definizione di logaritmo, dobbiamo trovare x tale che

$$3^x = \frac{1}{81} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3^4} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4.$$

- caso [3]. Per la definizione di logaritmo, dobbiamo trovare x tale che

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^3}{3^3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

- caso [4]. Per la definizione di logaritmo e tenuto conto che $0,5 = 1/2$, dobbiamo trovare x tale che

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^{-1}\right)^x = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-x} = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad -x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4.$$

Esercizio

Determinare la base dei seguenti logaritmi

$$[1]\quad \log_x 64 = 6, \qquad [2]\quad \log_x 8 = \frac{3}{2}, \qquad [3]\quad \log_x \frac{64}{27} = 3, \qquad [2]\quad \log_x \frac{25}{4} = -2$$

Risposta

- caso [1]. Per la definizione di logaritmo è

$$x^6 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^6\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad x^{6\cdot\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^{6\cdot\frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

- caso [2]. Per la definizione di logaritmo è

$$x^{\frac{3}{2}} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^2 = 4.$$

- caso [3]. Per la definizione di logaritmo è

$$x^3 = \frac{64}{27} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^{3\cdot\frac{1}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}.$$

- caso [4]. Per la definizione di logaritmo è

$$x^{-2} = \frac{25}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot 2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}.$$

Esercizio

Sapendo che $\log a = 1$, $\log b = 2$ e $\log c = -3$, calcolare

$$\log \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{c}}}}.$$

Risposta

Tenendo presente che $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, per le proprietà dei logaritmi, abbiamo

$$\begin{aligned}
\log \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{c}}}} &= \frac{1}{4} \log \left(a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{c}}} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \log a + \log \sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{c}}} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \log a + \frac{1}{3} \log \left(\frac{b}{\sqrt{c}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \log a + \frac{1}{3} \left(\log b - \log \sqrt{c} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \log a + \frac{1}{3} \left(\log b - \frac{1}{2} \log c \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{2}(-3) \right) \right\} \\
&= \frac{13}{24}.
\end{aligned}$$

Esercizio

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{10}\frac{1}{2}\right)$$

[1] è un numero reale positivo [2] è un numero reale negativo

[3] nessuna delle precedenti risposte è esatta

Risposta

Osserviamo che

$$\frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \xi = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Quindi, $\log_{1/2}(\xi)$ non si può calcolare! E', pertanto, vera la [3].

Esercizio

Il numero

$$\left(\log_{10}\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

è

[1] maggiore di 10 [2] compreso tra -10 e 10

[3] minore di -27

Risposta

Abbiamo

$$\left(\log_{10}\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\log_{10}\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{(\log_{10}1 - \log_{10}2)^3} = \frac{1}{(0 - \log_{10}2)^3} = -\frac{1}{(\log_{10}2)^3}$$

Stimiamo $\log_{10} 2$. E'

$$\log_{10}2 < \log_8 2 = \frac{1}{3} \quad \text{perché} \quad 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Pertanto, è $-\log_{10}2 > -\frac{1}{3}$ e quindi

$$-\frac{1}{(\log_{10}2)^3} < \left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right)^3 = (-3)^3 = -27.$$

E' vera la [3].

Esercizio

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$2^{6x+3} \cdot 4^{3x+6} = 8^{4x+5}$$

[1] 0 [2] 1 [3] 2 [4] più di due

Risposta

Abbiamo

$$2^{6x+3} \cdot 4^{3x+6} = 8^{4x+5} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{6x+3} \cdot \left(2^2\right)^{3x+6} = \left(2^3\right)^{4x+5} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{6x+3} \cdot 2^{2\cdot(3x+6)} = 2^{3\cdot(4x+5)}$$

ossia

$$2^{(6x+3)+2\cdot(3x+6)} = 2^{3\cdot(4x+5)} \quad \Leftrightarrow \quad (6x+3)+2\cdot(3x+6) = 3\cdot(4x+5)$$

Abbiamo

$$6x+3+6x+12 = 12x+15 \quad \Leftrightarrow \quad 0x = 0$$

Dunque, ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione: è vera la [4].

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$9 \cdot 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}$$

Risposta

Per le proprietà delle potenza, abbiamo

$$9 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2 + 5^x \cdot 5^3 = 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^4$$

e quindi

$$5^x \left(9 \cdot 5 + 5^2 + 5^3\right) = 3^x \left(3^2 + 3^3 + 3^4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \cdot 195 = 3^x \cdot 117$$

ossia, semplificando,

$$5^x \cdot 195 = 3^x \cdot 117 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \cdot 65 = 3^x \cdot 39 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \cdot 5 = 3^x \cdot 3$$

Pertanto, risulta

$$\frac{5^x}{3^x} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$$

Osserviamo che è

$$\frac{3}{5} = 3^1 \cdot \frac{1}{5^1} = 3^1 \cdot 5^{-1} = \left(3^{-1}\right)^{-1} \cdot 5^{-1} = \left(3^{-1} \cdot 5\right) = \left(\frac{1}{3} \cdot 5\right)^{-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$$

Esercizio

Quante soluzioni ha l'equazione $10^x + 10^{-x} = 10$?

[1] nessuna [2] esattamente una [3] esattamente due [4] più di due

Risposta

Osserviamo che

$$10^{-x} = \frac{1}{10^x}$$

per cui, posto $t = 10^x$, otteniamo l'equazione nella incognita $t \in \mathbb{R}$

$$t + \frac{1}{t} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 10t + 1 = 0.$$

L' equazione ha $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96 > 0$ e, per la regola dei segni di Cartesio, ha due radici positive t_1 e t_2. Le (eventuali) corrispondenti x_1 ed x_2 sono date dalle due equazioni

- Prima equazione

$$10^{x_1} = t_1 \quad \text{(ha soluzione perché } t_1 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \log_{10}(t_1)$$

- Seconda equazione

$$10^{x_2} = t_2 \quad \text{(ha soluzione perché } t_2 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \log_{10}(t_2).$$

Esercizio

Semplificare l'espressione

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8}.$$

Risposta

Per le proprietà delle potenze risulta

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} &= 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \\
&= 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{8}} \\
&= 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{8}} \\
&= 2^{(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8})} \\
&= 2^{\frac{19}{8}} \\
&= 2^{\frac{16+3}{8}} \\
&= 2^{2+\frac{3}{8}} \\
&= 2^2 \cdot 2^{\frac{3}{8}} \\
&= 4\sqrt[8]{2^3} \\
&= 4\sqrt[8]{8}
\end{aligned}$$

Esercizio

Le misure dei lati di un rettangolo vengono ridotte del 20%. Di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo?

[1] 40% [2] 36% [3] 64% [4] 20%

Risposta

Indichiamo con b ed h base ed altezza originali. Allora i nuovi valori sono

$$\frac{\tilde{b}-b}{b} = -20\% = -\frac{20}{100} \quad \Rightarrow \quad \tilde{b} = b - \frac{20}{100}b = b\cdot\left(1-\frac{2}{10}\right) = \frac{10-2}{10}b = \frac{8}{10}b = \frac{4}{5}b$$

$$\frac{\tilde{h}-h}{h} = -20\% = -\frac{20}{100} \quad \Rightarrow \quad \tilde{h} = h - \frac{20}{100}h = h\cdot(1-\frac{2}{10}) = \frac{10-2}{10}h = \frac{8}{10}h = \frac{4}{5}h$$

Detta $S = bh$ l'area iniziale del rettangolo, la nuova area $\tilde{S}$ è

$$\tilde{S} = \tilde{b}\cdot\tilde{h} = \frac{4}{5}b\cdot\frac{4}{5}h = \frac{16}{25}\cdot(bh) = \frac{16}{25}S.$$

La variazione percentuale è

$$\frac{\tilde{S}-S}{S} = \frac{\frac{16}{25}S-S}{S} = \frac{-\frac{16-25}{25}S}{S} = -\frac{9}{25} = -\frac{9\cdot 4}{25\cdot 4} = -\frac{36}{100} = -36\%.$$

Esercizio

Tutti i valori del parametro reale a per cui l'equazione $x^2 - 2ax + 3 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte sono

[1] $a = 2$ [2] $-1 < a < 1$ [3] $a > \sqrt{3}$ oppure $a < -\sqrt{3}$ [4] nessun valore

Risposta

L'equazione ha due radici reali e distinte se e solo se

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 - 12 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \sqrt{3} \text{ oppure } a < -\sqrt{3}$$

Esercizio

Sia $a < 0$. Per quali valori di x si ha
$$\frac{a}{2-x} > 0?$$

[1] $x > 2$ [2] $x < 2$ [3] $x \neq 2$ [4] Dipende dal valore di a

Risposta

Il rapporto tra a e $2 - x$ è positivo se e solo se hanno lo stesso segno. Poiché $a < 0$, deve essere pure $2 - x < 0$ ossia $2 < x$. Dunque, è corretta la risposta [1].

Esercizio

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > y$. Quali delle seguenti disuguaglianze è sempre verificata?

[1] $x^2 > xy$ [2] $x^2 > y^2$ [3] $x/y > 1$ [4] $x^3 > y^3$ [5] $x^4 > y^4$

Risposta

- La [1] è ottenuta da $x > y$ moltiplicandone ambo i membri per x. La disequazione $x^2 > xy$ **non** è però equivalente a quella data per $x < 0$. Ad esempio, da $-1 > -2$ non si deduce $-1 \cdot (-1) > -2 \cdot (-1)$ perché non è vero che $1 > 2$! Dunque, [1] è falsa perché $x^2 > xy$ è verificata solo per gli $x > 0$ (e, quindi, non per ogni x).
- La [2] è anche essa falsa. Ad esempio da $0 > -1$ non segue $0^2 > (-1)^2$! Lo stesso motivo permette di scartare la [5].
- La [3] è anch'essa falsa dato che divido ambo i membri di $x > y$ per y che può essere negativo.
- Per esclusione, resta la [4] che è corretta.

Esercizio

Una piramide retta P ha altezza h e base quadrata di lato l. Se h raddoppia ed l dimezza, il volume di P

[1] resta invariato [2] raddoppia [3] diminuisce di 2 [4] diventa la metà

Risposta

Indicata con S_b l'area di base, ricordiamo che il volume della piramide è dato da

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3} l^2 h$$

dato che $S_b = l^2$ perché la base è quadrata.
Dopo le modifiche, la nuova piramide ha altezza h_1 e lato del quadrato di base l_1 pari a

$$h_1 = 2 \cdot h, \qquad l_1 = \frac{l}{2}$$

Quindi, il volume V_1 diventa

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot (2h) = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{4} \cdot 2h = \left(\frac{1}{3} l^2 h\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V.$$

Il volume dimezza.