Esercizio

Provare che risulta

$$\log_2(17) \cdot \log_{\frac{1}{5}}(2) \cdot \log_3\left(\frac{1}{5}\right) > 2.$$

Risposta

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\log_2(17) \cdot \log_{\frac{1}{5}}(2) \cdot \log_3\left(\frac{1}{5}\right) &= \log_2(17) \cdot \frac{\log_2(2)}{\log_2\left(\frac{1}{5}\right)} \cdot \frac{\log_2\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_2 3} \\
&= \frac{\log_2(17)}{\log_2 3} > \frac{\log_2(16)}{\log_2 4} \\
&= \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^2} = \frac{4\log_2 2}{2\log_2 2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Esercizio

Sia $x \in \mathbb{R}$. L'espressione

$$\sqrt{(x^2-1)^2}$$

è uguale a

[1] $|x-1| \cdot |x+1|$ [2] $\pm (x-1) \cdot (x+1)$ [3] $(x-1) \cdot (x+1)$

Risposta

E' subito

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^2-1)^2} &= |x^2-1| \\ &= |(x-1) \cdot (x+1)| \\ &= |x-1| \cdot |x+1|. \end{aligned}$$

Esercizio

Se $x + \frac{1}{x} = 2$, quanto vale $\frac{x^2-1}{x^2}$?

[1] 1 [2] 0 [3] $\dfrac{11}{4}$

Risposta

Non serve fare alcun calcolo! Osserviamo che è

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} < 1$$

perché $1/x^2 > 0$. Tenuto conto che $\frac{11}{4} > \frac{8}{4} = 2 > 1$, la sola risposta lecita è la [2].

Esercizio

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3.$$

Risposta

Osserviamo subito che la frazione a primo membro ha senso se e solo se

$$x^2 - 5x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-5) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 5.$$

Risulta poi

$$\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x(x-5)}{x(x-5)} = x - 3$$

Poiché $x \neq 0$ e $x \neq 5$, è lecito semplificare la frazione a primo membro ottenendo

$$2 = x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Ora, questa soluzione non è ammissibile per cui l'equazione non ha alcuna soluzione.

Esercizio

Determinare $x \cdot y$ sapendo che valgono entrambe le relazioni

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8, \qquad \frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243.$$

Risposta

Abbiamo

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2^2)^x}{2^{x+y}} = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x-(x+y)} = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 3$$

e, analogamente,

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(3^2)^{x+y}}{3^{5y}} = 3^5 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2(x+y)-5y} = 3^5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y = 5$$

In definitiva, si devono cercare $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x - 3y &= 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= x - 3 \\ 2x - 3(x-3) &= 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= x - 3 \\ -x &= -4 \end{cases}$$

Quindi, è $x = 4$ e $y = 4 - 3 = 1$. Pertanto, $x \cdot y = 4 \cdot 1 = 4$.

Esercizio

Calcolare $\log_3 x$ dove

$$x = (\log_8 2)^{\log_2 8}.$$

Risposta

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\log_3 x &= \log_3 \left((\log_8 2)^{\log_2 8} \right) = \log_2 8 \cdot \log_3 (\log_8 2) \\
&= \log_2 2^3 \cdot \log_3 \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 8} \right) \\
&= 3 \cdot \log_3 \left(\frac{1}{3} \right) \\
&= 3 \cdot (\log_3 1 - \log_3 3) \\
&= 3 \cdot (0 - 1) \\
&= -3.
\end{aligned}$$

Esercizio

Disegnare il grafico della parabola $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Risposta

Caso particolare di $f(x) = ax^2 + 2x + c$ con $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Tracciamone il grafico con i passaggi

1. poiché $a = 1 > 0$, la parabola ha la concavità verso l'alto.
2. la parabola è simmetrica rispetta alla retta verticale $x = x_V$ con

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

   La simmetria significa che

$$P = (x_V - \xi, \bar{y}) \text{ appartiene alla parabola } \Rightarrow Q = (x_V + \xi, \bar{y}) \text{ vi appartiene}$$

3. il vertice ha coordinate

$$V = (x_V, f(x_V)) = (-1, 2)$$

   dato che risulta

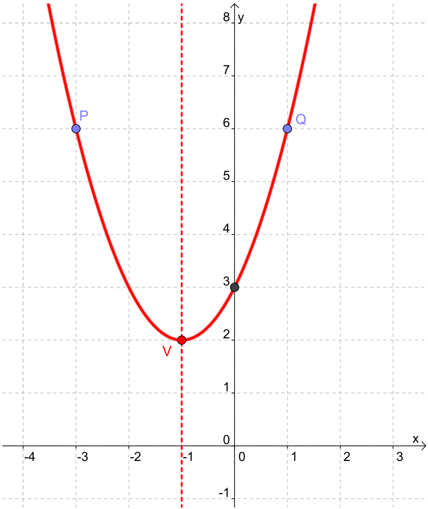
$$f(x_V) = x_V^2 + 2x_V + c = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

4. intersezione con asse y: $y(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
5. intersezione asse x (eventuali) E'

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

   E' $\Delta < 0$. Dunque, l'equazione $x^2 + 2x + 3 = 0$ non ha radici reali e la parabola non incontra l'asse x.

Grafico di $f(x) = x^2 + 2x + 2$



Esercizio

Disegnare il grafico della parabola $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

Risposta

Caso particolare di $f(x) = ax^2 + 2x + c$ con $a = -2$, $b = -2$, $c = 4$. Tracciamone il grafico con i passaggi

1. poiché $a = -2 < 0$, la parabola ha la concavità verso il basso.
2. la parabola è simmetrica rispetta alla retta verticale $x = x_V$ con
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{2}$$
3. il vertice ha coordinate
$$V = (x_V, f(x_V)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$
dato che risulta
$$\begin{aligned} f(x_V) &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \\ &= -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 + 4 = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{-1+10}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$
4. intersezione con asse y: $y(0) = -2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$.

Esercizio

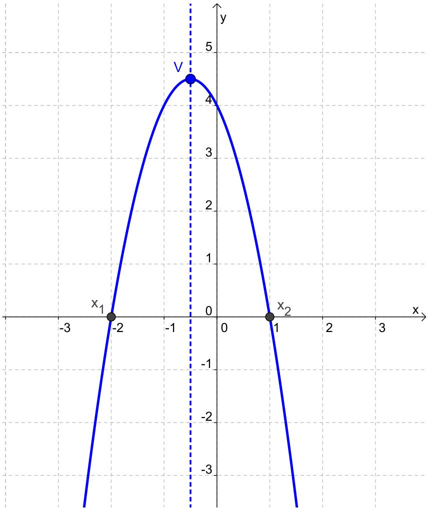
5 intersezione asse x (eventuali)
E'

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4 = 4 + 32 = 36$$

Poiché $\Delta > 0$ l'equazione $-2x^2 - 2x + 3 = 0$ ha due radici reali distinte x_1 ed x_2. Questo significa che il grafico della parabola incontra l'asse delle ascisse x nei due punti distinti $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$.
Calcoliamo le due radici di $-2x^2 - 2x + 3 = 0$. E'

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{2 \pm 6}{-4} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+6}{-4} = \frac{8}{-4} = -2 \\ x_2 = \frac{2-6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

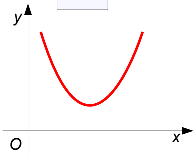
Grafico di $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$



Disequazioni di secondo grado

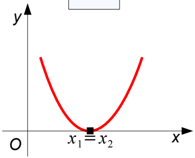
$$p(x)=ax^2+bx+c\,,\ a>0,\ \Delta=b^2-4\mathrm{ac}$$

$\Delta<0$



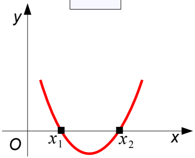
$$y=(\alpha x+\beta)^2+\gamma^2$$

$\Delta=0$



$$y=\alpha^2(x-x_1)^2$$

$\Delta>0$



$$y=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$p(x)>0$	R	$R-\{x_1\}$	$\{x<x_1\}\cup\{x_2<x\}$
$p(x)\geq 0$	R	R	$\{x\leq x_1\}\cup\{x_2\leq x\}$
$p(x)\leq 0$	$\emptyset$	$\{x_1\}$	$\{x_1\leq x\leq x_2\}$
$p(x)<0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x_1<x<x_2\}$

Esercizio

Risolvere le seguenti disequazioni

$$i)\ x^2 + x + 1 < 0; \quad ii)\ x^2 + x + 1 \leq 0; \quad iii)\ x^2 + x + 1 \geq 0; \quad iv)\ x^2 + x + 1 > 0.$$

Risposta

Osserviamo che $a = 1 > 0$ e

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

per cui ci troviamo nella situazione illustrata nella prima colonna della figura precedente. Dunque, (i) e (ii) non hanno soluzione mentre (iii) e (iv) hanno come soluzione $\mathbb{R}$.

Esercizio

Risolvere le seguenti disequazioni

$$i)\ x^2+x-2<0; \quad ii)\ x^2+x-2\leq 0; \quad iii)\ x^2+x-2\geq 0; \quad iv)\ x^2+x-2>0.$$

Risposta

Osserviamo che $a=1>0$ e

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0$$

per cui ci troviamo nella situazione illustrata nella terza colonna della figura precedente. Le radici di $x^2+x-2=0$ sono $x_1=-2$ ed $x_1=1$. Pertanto, abbiamo

- (i): $-2<x<1$
- (ii): $-2\leq x\leq 1$
- (iii): $x\leq -2\cup x\geq 1$
- (iv): $x<-2\cup x>1$

Esercizio

Posto

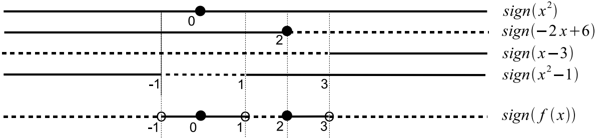
$$f(x) = \frac{x^2(-3x+6)}{(x-3)(x^2-1)}.$$

risolvere la disequazione $f(x) < 0$.

Risposta

La disequazione ha due fattori a numeratore, $n_1(x) = x^2$ e $n_2(x) = -3x + 6$ e due a denominatore $d_1(x) = x - 3$ e $d_2(x) = x^2 - 1$. Studiamo il segno di ciascuno di questi fattori senza preoccuparci, per il momento, del verso della disequazione data. Scegliamo di trovare dove ciascun fattore è positivo. Abbiamo

$$\begin{array}{llcll}
n_1(x) > 0: & x^2 > 0 & \Leftrightarrow & x \neq 0 & \\
n_2(x) > 0: & -3x+6 > 0 & \Leftrightarrow & -3x > -6 & \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3x) < \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-6) \\
 & & \Leftrightarrow & x < 2 & \\
d_1(x) > 0: & x - 3 > 0 & \Leftrightarrow & x > 3 & \\
d_2(x) > 0: & x^2 - 1 > 0 & \Leftrightarrow & x < -1 \cup x > 1. &
\end{array}$$



Risolviamo ora, la disequazione leggendo nella figura il segno di $f(x)$. E' richiesto di trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) < 0$. L'insieme S della soluzione è allora

$$S = \{x < -1\} \cup \{1 < x < 2\} \cup \{x > 3\} = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty).$$

Esercizio

La disequazione $x^2 + 3|x| - 1 < 0$ ha per soluzioni

[1] $\frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ [2] $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{\sqrt{13}-3}{2}$ [3] $0 \leq x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

Risposta
Osserviamo subito che $x = 0$ è soluzione della disequazione perché

$$0^2 + 3 \cdot |0| - 1 = -1 < 0.$$

Inoltre, se $x = \xi$ risolve la disequazione allora anche $x = -\xi$ la risolve:

$$(-\xi)^2 + 3 \cdot |-\xi| - 1 = \xi^2 + 3|\xi| - 1 < 0.$$

Pertanto, la soluzione è un insieme simmetrico rispetto all'origine e contiene $x = 0$. Ciò esclude le risposte [1] e [3] che corrispondono a intervalli non simmetrici. Pertanto, la risposta corretta è la [2].