Esercizio

La disequazione $x^2 - 2|x| + 1 \leq 0$

[1] ha infinite soluzioni [2] non ha soluzioni [3] ha esattamente due soluzioni

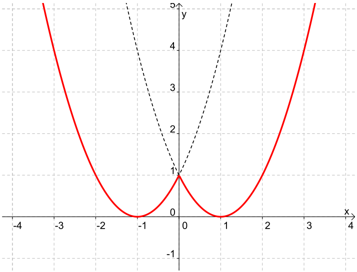
[4] nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Risposta

Introduciamo la funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 & , \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2 \cdot (-x) + 1 = (x+1)^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Guardando il grafico, formato dall'unione di due parti di parabole, vediamo che $f(x) \leq 0$ solo per $x = -1$ e $x = 1$ dove vale zero. Quindi, la disequazione $x^2 - 2|x| + 1 \leq 0$ è soddisfatta solo da $x = -1$ ed $x = 1$.



Esercizio

La soluzioni dell'equazione $|x-1|+|x-2|=1$

[1] sono $x=1, x=2$ [2] non esistono [3] sono $1 \leq x \leq 2$

[4] nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Risposta

- $x=1$ ed $x=2$ soddisfano l'equazione e pertanto [2] va scartata. Ad esempio per $x=1$ è

$$|2-1|+|2-2|=|1|+|0|=1$$

  che è uguale al secondo membro. Pertanto, $x=2$ è soluzione.
- Osserviamo che
  - $|x-1|$ è la distanza di x da 1
  - $|x-2|$ è la distanza di x da 2.

  Pertanto per $1 \leq x \leq 2$ abbiamo

$$|x-1|+|x-2|=1$$

  ossia ogni $x \in [1,2]$ è soluzione. Dunque, è vera la [3].

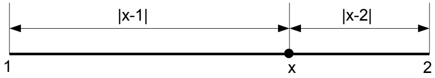
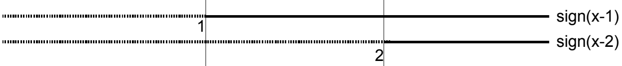


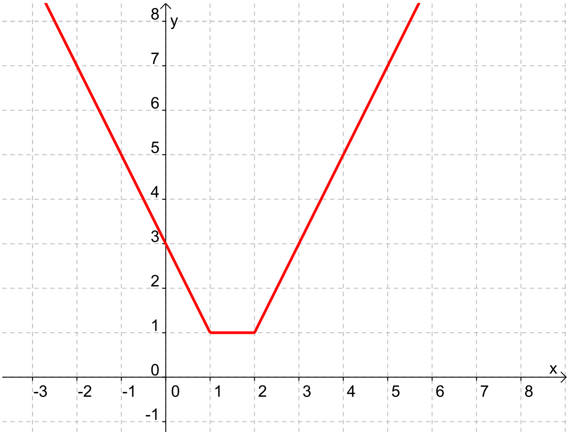
Grafico di f(x)= |x-1|+|x-2|



$x<1$	$1 \le x < 2$	$2 \le x$
$\lvert x-1\rvert = -(x-1) = -x+1$	$\lvert x-1\rvert = x-1$	$\lvert x-1\rvert = x-1$
$\lvert x-2\rvert = -(x-2) = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = -(x-2) = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = x-2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x) = -x+1-x+2 = -2x+3$	$f(x) = x-1-x+2 = 1$	$f(x) = x-1+x-2 = 2x-3$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ 2x-3 & \text{se} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Grafico di f(x)= |x-1|+|x-2|



Utilizzo del grafico di f(x)= |x-1|+|x-2|

- Discussione e/o risoluzione di $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Discussione e/o risoluzione di $f(x) > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e simili.
- Punti di massimo e/o minimo di $f(x)$
- ...

Esercizio

Disegnare il grafico di $f(x) = x + |x|$. Determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

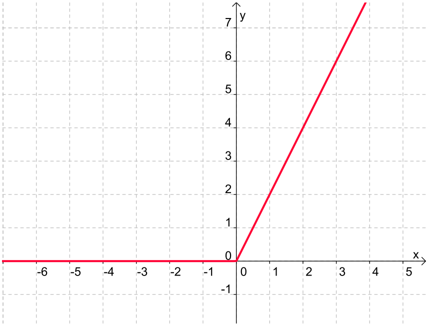
Ricordiamo la definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto, per $x < 0$ è $f(x) = x + (-x) = 0$ mentre per $x \geq 0$ è $f(x) = x + x = 2x$. Riunendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 2x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico è formato da due semirette:

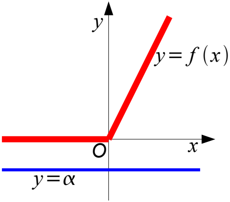


Esercizio

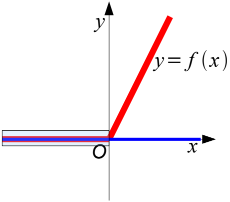
Le soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$ sono date dalle ascisse dei punti di intersezione delle due curve $y = f(x)$ e $y = \alpha$:

$$f(x) = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y & = & f(x) \\ y & = & \alpha \end{cases}$$

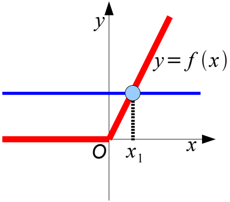
Abbiamo perciò



Nessun punto in comune:
soluzione: nessuna



Semiasse x <= 0 in comune:
soluzione: $x \leq 0$



Un solo punto in comune:
soluzione: x_1

Esercizio

La soluzioni della disequazione $x^2 > |x-1|$

[1] è $\mathbb{R}$ [2] sono tutti gli $x > 1$ [3] non esistono

[4] sono tutti gli x tali che $x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $x > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Risposta

- $x = 0$ non è soluzione perché $0^2 = 0$, $|0-1| = 1$ e quindi $0 < 1$. Questo esclude la [1].
- Per $x = 1$ abbiamo $1^2 = 4 > |1-1| = 0$ e dunque $x = 1$ è soluzione. Questo esclude la [2] e la [3].

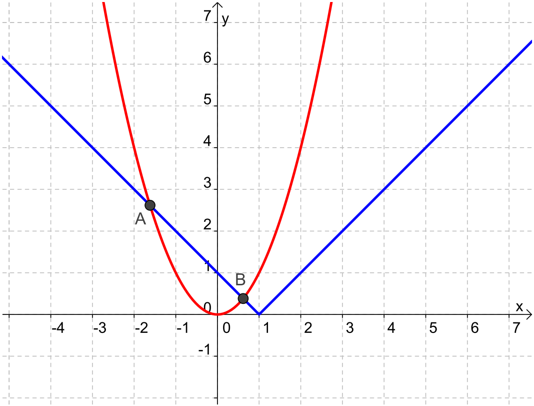
Pertanto, è vera la [4].

Risoluzione grafica di $x^2 > |x - 1|$

Definiamo e disegniamo le due funzioni

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = |x - 1|$$

La disequazione è soddisfatta da $x = \xi$ se $f_1(\xi) > f_2(\xi)$. In termini grafici, questo significa che l'ordinata $y_1 = f_1(\xi)$ è maggiore dell'ordinata $y_2 = f_2(\xi)$.



Risoluzione grafica di $x^2 > |x-1|$

L'esame del grafico dà come soluzione $x < x_A \cup x > x_B$ dove x_A ed x_B sono le ascisse dei punti A e B rispettivamente. Troviamole:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & x^2 \\ y & = & -(x-1) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Essendo $x_A < x_B$ è dunque

$$x_A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad x_B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Osserviamo che essendo $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$ è $1 - \sqrt{5} < 2 - \sqrt{5} < 0$ per cui $x_A < 0$ come conferma il grafico.

Esercizio

Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2 - 1} > x$ sono

[1] $x \leq 0$ [2] $x \leq -1$ [3] $x \geq \pm 1/\sqrt{2}$ [4] nessuna delle precedenti

Risposta

Osserviamo subito che la [3] va scartata perché priva di senso.
Per $x = 0$ risulta $x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$ per cui la radice non è definita. Quindi, la [1] va scartata.
Ora, per $x \leq -1$ abbiamo $x^2 \geq 1$ e, di conseguenza, $x^2 - 1 \geq 0$. Per contro, il secondo membro della disequazione è $x < 0$. Quindi, risulta

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 > x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 - 1} > x$$

Esercizio

Due grandezze y ed x sono legate dalla relazione $y = 2/x$. Di quale percentuale circa deve aumentare x affinché y diminuisca del 40%?

[1] 40% [2] 55% [3] 67% [4] 80%

Risposta

Siano $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ i nuovi valori di x ed y. E'

$$\frac{\tilde{y} - y}{y} = -\,40\% = -\,\frac{40}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y} - y = -\,\frac{40}{100} \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y} = \left(1 - \frac{40}{100}\right) y$$

Poiché $xy = 2$ e $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = 2$ otteniamo

$$\tilde{x} = \frac{2}{\tilde{y}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{40}{100}\right) y} = \frac{1}{\frac{100-40}{100}} \cdot \frac{2}{y} = \frac{100}{60} \cdot x$$

e, quindi,

$$\frac{\tilde{x} - x}{x} = \frac{\frac{100}{60}\, x - x}{x} = \frac{100\, - 60}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \approx 0,67 = \frac{67}{100} = 67\%$$

Esercizio

Determinare la somma algebrica dei coefficienti del polinomio

$$\left(x^{21}+4x^2-3\right)^{2001}-\left(x^{21}+4x^2+3\right)^{667}+x^{21}+4x^2$$

Risposta

Un polinomio $P(x)$ di grado n può essere scritto come

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Quindi risulta

$$P(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}1^{n-1}+a_{n-2}\cdot 1^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0$$

ossia proprio la somma cercata. Svolgendo le operazioni è possibile portare il polinomio dato nella forma precedente. Ciò non è però necessario per valutare il polinomio in un dato valore. Risulta quindi

$$\begin{aligned}
P(1) &= \left(1^{21}+4\cdot 1^2-3\right)^{2001}-\left(1^{21}+4\cdot 1^2+3\right)^{667}+1^{21}+4\cdot 1^2\\
&= 2^{2001}-8^{667}+5\\
&= 2^{2001}-2^{3\cdot 667}+5\\
&= 2^{2001}-2^{2001}+5\\
&= 5
\end{aligned}$$

Esercizio

Un mucchio di sabbia può essere trasportato in 4 viaggi caricando al massimo un autocarro o, in alternativa, in 12 viaggi caricandone al massimo un altro più piccolo. Se possiamo utilizzare a pieno carico entrambi gli autocarri e vogliamo che entrambi compiano lo stesso numero di viaggi, quanti viaggi dovrà fare ciascun autocarro per il trasporto di tutta la sabbia?

[1] 1 [2] 2 [3] 3 [4] 4 [5] i dati sono insufficienti

Risposta

Indichiamo con Q la quantità di sabbia da trasportare e con p_1 e p_2 le portate dell'autocarro grande e piccolo, rispettivamente. Detto n il numero di viaggi che devono fare entrambi, risulta

$$\begin{array}{lcll} Q & = & 4 \cdot p_1 & \text{solo autocarro grande} \\ Q & = & 12 \cdot p_2 & \text{solo autocarro piccolo} \\ Q & = & n \cdot (p_1 + p_2) & \text{entrambi gli autocarri} \end{array}$$

e quindi

$$n = \frac{Q}{p_1 + p_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{4} + \frac{Q}{12}} = \frac{Q}{Q\,\frac{3+1}{12}} = \frac{1}{\frac{4}{12}} = \frac{12}{4} = 3.$$

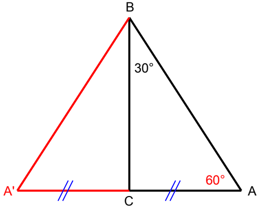
Esercizio

Uno degli angoli interni di un triangolo rettangolo è di 30°; il rapporto tra la lunghezza dell'ipotenusa e la lunghezza del cateto minore è uguale a

[1] $\frac{2}{\sqrt{3}}$ [2] 1 [3] $\sqrt{2}$ [4] 2

Risposta

Sia ABC il triangolo in esame con $\hat{B} = 30^\circ$ e l'angolo in C retto (ossia, $\hat{C} = 90^\circ$).



Risulta $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 180 - 30 - 90 = 60$.
Costruiamo il triangolo $A'BC$ con $A'C = AC$. Questo triangolo è uguale a ABC perché hanno

- $\overline{A'C} = \overline{AC}$ per costruzione;
- il lato BC in comune;
- $\widehat{A'CB} = \widehat{ACB}$ perché entrambi retti.

Esercizio – continuazione

In particolare, risulta quindi

- $\hat{A'} = \hat{A} = 60$;
- $\widehat{A'BC} = \widehat{ABC} = 30$; di conseguenza, $\widehat{A'BA} = \widehat{ABC} + \widehat{A'BC} = 30 + 30 = 60$.

Il triangolo $A'BA$ è dunque equilatero. Allora, è

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Il lato BC misura, per il teorema di Pitagora,

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2} = \sqrt{\overline{AB}^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \overline{AB}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora, è

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$$

e, dunque, AC è il cateto minore. Pertanto, il rapporto cercato vale $\overline{AB}/\overline{AC} = 2$.