Esercizio

Sia
$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Calcolare
$$[1] \quad f(1), \qquad [2] \quad f(x^2-1), \qquad [3] \quad f\left(f(x)\right),$$

Risposta

- caso [1]
$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$
- caso [2]
$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2 - 4 \cdot (x^2-1) + 3 = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1 - 4 \cdot x^2 + 4 - 3 \\ &= x^4 - 6x^2 + 2 \end{aligned}$$
- caso [3]
$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2-4x+3)^2 - 4 \cdot (x^2-4x+3) + 3 \\ &= \left[x^4 + 16x^2 + 9 + 2 \cdot x^2 \cdot (-4x) + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4x) \cdot 3\right] - 4x^2 + 16x - 12 + 3 \\ &= x^4 - 8x^3 + (16+6-4)x^2 + (-24+16)x + (9-12+3) \\ &= x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x. \end{aligned}$$

Esercizio

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ (x-1)^2+1 & , \quad x>0 \end{cases}$$

Calcolare

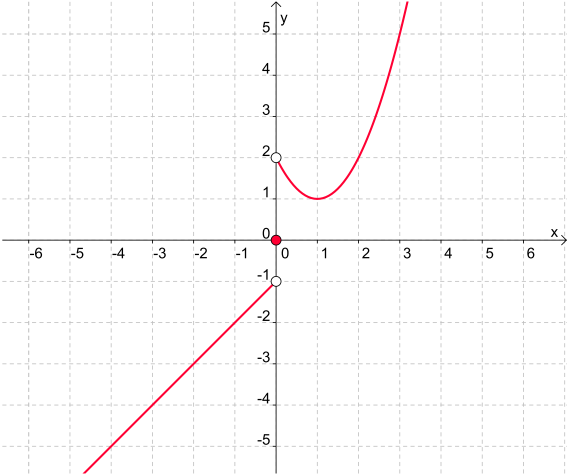
[1] $f(-2),\ f(0),\ f(3)$ [2] $\mathrm{Im}(f)$, [3] il numero di soluzioni di $f(x)=\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Risposta

- caso [1].
  - Valutiamo $f(-2)$. Poiché -2 <0 va utilizzata $f(x)=x-1$. Otteniamo $f(-2)=-2-1=-3$.
  - Valutiamo $f(0)$. L'esame dell'espressione di $f(x)$ dà subito $f(0)=0$.
  - Valutiamo $f(3)$. Poiché $3>0$, va utilizzata $f(x)=(x-1)^2+1$ che dà $f(3)=(3-1)^2+1=5$.
- Caso [2].
  Dal grafico di f vediamo che è $\mathrm{Im} = (-\infty,-1) \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$.
- Caso [3].
  Detto $N_s(\alpha)$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=\alpha$, dal grafico di f abbiamo

	$\alpha<-1$	$-1\le\alpha<0$	$\alpha=0$	$0<\alpha<1$	$\alpha=1$	$1<\alpha<2$	$2\le\alpha$
$N_s(\alpha)$	1	0	1	0	1	2	1

Grafico



Esercizio

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\left|\left|x^2+x-2\right|-1\right|=\frac{1}{8}.$$

Risposta

Costruiamoci prima il grafico di f per gradi.

- $f(x)=x^2+x-2$ è una parabola con la concavità verso l'alto, asse di simmetria $x=x_V=-\frac{1}{2}$ e vertice $V=\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$. Inoltre, l'equazione $x^2+x-2=0$ ha le due radici $x_1=-2$ e $x_2=1$.
- Risulta subito

$$f(x)=|x^2+x-2|=\begin{cases} x^2+x-2 & , \quad x\le -2 \cup x\ge 1 \\ -x^2-x+2 & , \quad -2<x<1 \end{cases}$$

  Pertanto, il grafico di $y=|x^2+x-2|$ è formato dall'unione di due parabole.
- Abbiamo poi

$$f(x)=|x^2+x-2|-1=\begin{cases} (x^2+x-2)-1 & = & x^2+x-3 & , \quad x\le -2\cup x\ge 1 \\ (-x^2-x+2)-1 & = & -x^2-x+1 & , \quad -2<x<1 \end{cases}$$

Esercizio – continuazione

- Possiamo trovare le radici di $|x^2+x-2|-1=0$. Per calcolare ξ_1 e ξ_2, $\xi_1<\xi_2$, interessa il ramo relativo a $x\leq -2 \cup x\geq 1$. Abbiamo perciò da risolvere $x^2+x-3=0$ che dà

$$\xi_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Per calcolare ξ_3 e ξ_4, $\xi_3<\xi_4$, interessa il ramo relativo a $-2<x<1$. Abbiamo perciò da risolvere $-x^2-x+1=0$, ossia $x^2+x-1=0$, che dà

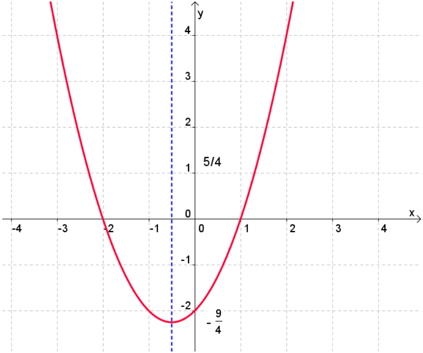
$$\xi_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

- Risulta infine

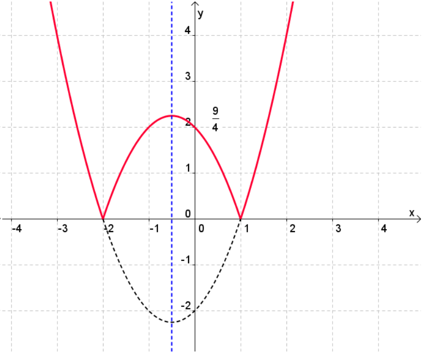
$$\left|\left|x^2+x-2\right|-1\right|=\begin{cases} x^2+x-3 & , \quad x\leq\xi_1 \\ -(x^2+x-3) & , \quad \xi_1<x\leq -2 \\ -(-x^2-x+1) & , \quad -2<x\leq\xi_3 \\ -x^2-x+1 & , \quad \xi_3<x\leq\xi_4 \\ -(-x^2-x+1) & , \quad \xi_4<x\leq 1 \\ -(x^2+x-3) & , \quad 1<x\leq\xi_2 \\ x^2+x-3 & , \quad \xi_2<x \end{cases}$$

Dall'esame dell'ultimo grafico appare subito che $f(x)=1/8$ ha otto soluzioni di cui quattro negative e quattro positive. Due sono comprese tra 1 e 2.

Grafico

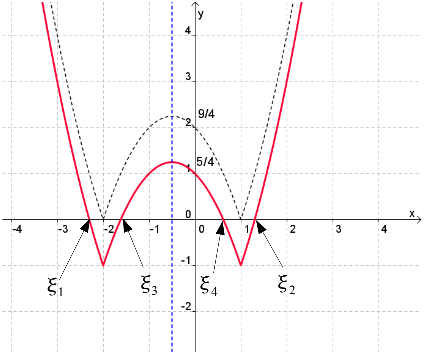


x^2+x-2

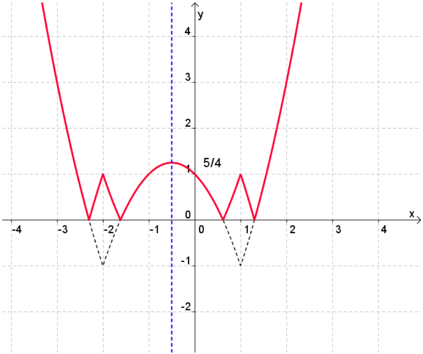


$|x^2+x-2|$

Grafico



$|x^2+x-2| - 1$



$|\ |x^2+x-2| - 1\ |$

Esercizio

Si consideri l'equazione $\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle coppie (α, β) per le quali l'equazione ha due soluzioni reali e distinte. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

[1] $\mathcal{S} = \emptyset$ [2] $\mathcal{S}$ è limitato [3] $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S} \Rightarrow (-\alpha, -\beta) \in \mathcal{S}$ [4] $(2, 1) \in \mathcal{S}$

Risposta

L'equazione ha radici reali e distinte se e solo se

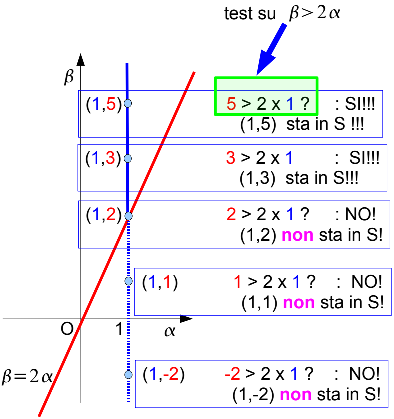
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \beta^2 - 4\alpha^2 > 0.$$

Rappresentiamo questo insieme sul piano (O, α, β). Poiché è $\beta^2 - 4\alpha^2 = (\beta - 2\alpha) \cdot (\beta + 2\alpha)$ la disequazione è soddisfatta da tutti e soli i punti (α, β) tali per cui risulta

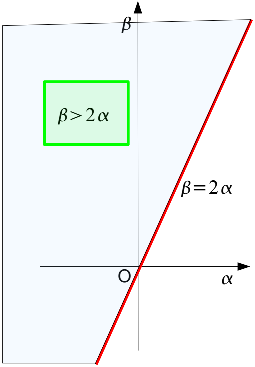
$$[a] \begin{cases} \beta - 2\alpha > 0 \\ \beta + 2\alpha > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad [b] \begin{cases} \beta - 2\alpha < 0 \\ \beta + 2\alpha < 0 \end{cases}$$

Esaminiamo il caso [a]. L'altro è analogo. Consideriamo la disequazione $\beta - 2\alpha > 0$. E' equivalente a $\beta > 2\alpha$. Quindi, un punto (α, β) la soddisfa se la sua ordinata β è maggiore del doppio della sua ascissa α. Come troviamo tutti e soli questi punti? Bene, noi sappiamo che i punti del tipo $\beta = 2\alpha$ sono tutti e soli quelli (del piano (O, α, β)) di una retta passante per l'origine e con coefficiente angolare 2. Questa retta la sappiamo disegnare!

Continuazione



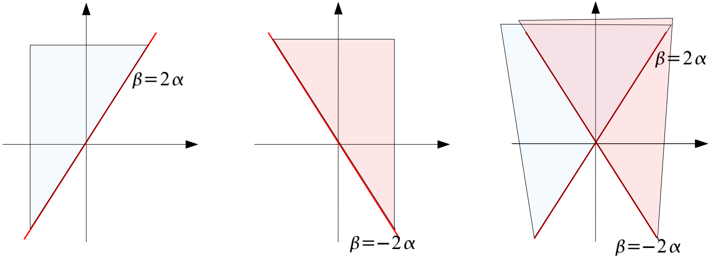
guardo quali punti di una retta verticale stanno in S...



estendo il ragionamento a tutte le rette verticali ...

Continuazione

Procediamo allo stesso modo per risolvere la disequazione $\beta > -2\alpha$! Le soluzioni del sistema sono date, infine, dalle intersezioni delle due regioni!!



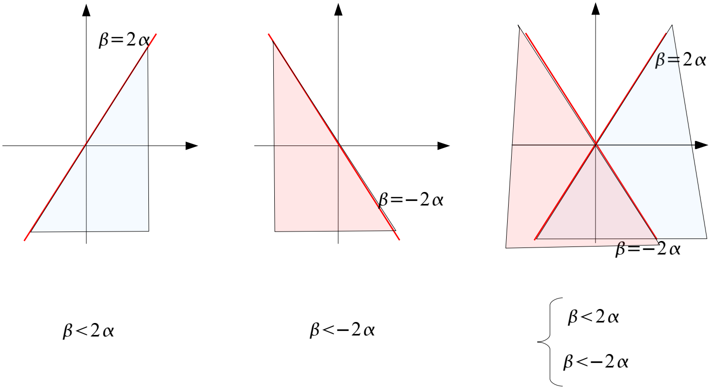
$\beta > 2\alpha$

$\beta > -2\alpha$

$$\begin{cases} \beta > 2\alpha \\ \beta > -2\alpha \end{cases}$$

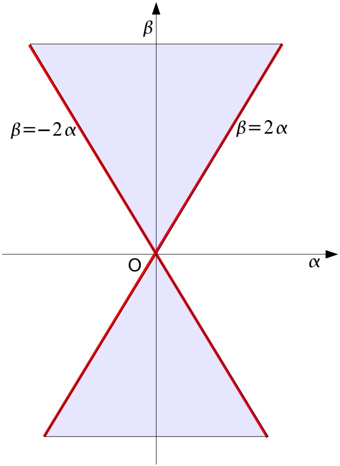
Continuazione

Procediamo allo stesso modo per risolvere il sistema [b]. Osserviamo che la disequazione $\beta < 2\alpha$ è soddisfatta da tutti e soli i punti che hanno ordinata minore del doppio della ascissa ossia stanno sotto al grafico della retta $\beta = 2\alpha$!



Continuazione

Infine, **uniamo** le soluzioni di [a] e [b] per ottenere le soluzioni della disequazione $\beta^2 - 2\alpha^2 > 0$.



L'insieme non è vuoto.

E' infinitamente esteso e perciò non è limitato.

E' simmetrico rispetto all'origine.

Il punto (2,1) non appartiene all'insieme.

E' vera la [3].

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$x^{\log_{10} x} = 10$$

Risposta

Abbiamo

$$x^{\log_{10} x} = 10^{\log_{10}\left(x^{\log_{10} x}\right)} = 10^{\log_{10} x \cdot \log_{10} x} = 10^{(\log_{10} x)^2}.$$

Quindi l'equazione diventa

$$10^{(\log_{10} x)^2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\log_{10} x\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\log_{10} x - 1\right) \cdot \left(\log_{10} x + 1\right) = 0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene subito

$$\log_{10} x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^1 = 10$$

$$\log_{10} x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$$