Esercizio

Sia $f(x) = 4^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ è uguale a

[1] 4 [2] $f(x)$ [3] $2f(x)$ [4] $3f(x)$ [5] $4f(x)$

Risposta

Risulta immediatamente

$$f(x-1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4^x \cdot 4^1 - 4^x = 4^x\,(4-1) = 3 \cdot 4^x = 3f(x).$$

Esercizio

E' noto che il rapporto tra $3x - 4$ e $y + 15$ è costante e che $y = 3$ per $x = 2$. Il valore assunto da x per $y = 12$ è

[1] $1/8$ [2] $3/7$ [3] $7/3$ [4] $7/2$ [5] 8

Risposta

Abbiamo

$$\frac{3x-4}{y+15} = K$$

Perciò, dato che sappiamo che per $x = 2$ è $y = 3$, il valore di K deve soddisfare l'equazione

$$\frac{3 \cdot 2 - 4}{3 + 15} = K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Noto che sia K è possibile trovare la x che corrisponde ad $y = 12$ in quanto deve valere la relazione

$$\frac{3x-4}{12+15} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad 3x - 4 = 27 \cdot \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad 3x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{3}.$$

Esercizio

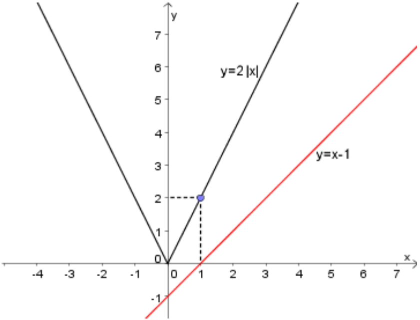
L'equazione $2|x| = x - 1$

[1] non ha soluzioni [2] ha due soluzioni razionali non intere [3] ha due soluzioni

[4] ha una sola soluzione intera [5] ha solo soluzioni intere

Risposta

E' sufficiente tracciare i grafici delle due funzioni $f(x) = 2|x|$ e $g(x) = x - 1$ per vedere che non ci sono soluzioni in quanto questi due grafici non hanno alcun punto in comune:



Esercizio

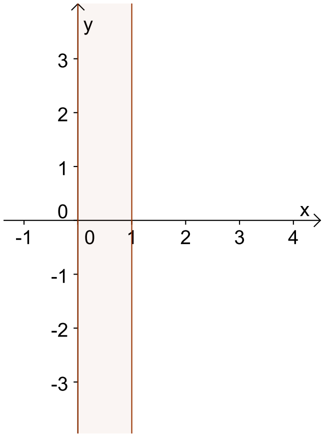
Nel piano cartesiano i punti (x, y) che soddisfano la condizione $0 \leq x \leq 1$ individuano

[1] un segmento [2] un quadrato [3] un semipiano

[4] una striscia di piano, cioè l'intersezione di due semipiani

Risposta

La condizione è soddisfatta dai punti di ascissa compresa tra 0 ed 1, indipendentemente dalla loro ordinata. I punti $(x, 0)$ con $0 \leq x \leq 1$ soddisfano la condizione. Quindi, la soddisfano anche tutti i punti (x, y) con $0 \leq x \leq 1$ ed $y \in \mathbb{R}$ (striscia infinita del piano).



Esercizio

Determinare l'insieme $\mathcal{D}$ dei punti (x, y) del piano tali che

$$|x| + |y| + |x + y| + |x - y| \leq 3.$$

Risposta

Osserviamo subito che l'insieme è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi (e, quindi, all'origine!) ed alla bisettrice del 1 e 3 quadrante:

- simmetria rispetto all'asse x: $(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (x, -y) \in \mathcal{D}$. E'

$$|x| + |-y| + |x - y| + |x - (-y)| = |x| + |y| + |x - y| + |x + y| \leq 3$$

- simmetria rispetto all'asse y: $(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (-x, y) \in \mathcal{D}$. E'

$$|-x| + |y| + |-x + y| + |-x - y| = |x| + |y| + |y - x| + |x + y| \leq 3$$

- simmetria rispetto alla retta $y = x$: $(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{D}$. E'

$$|y| + |x| + |y + x| + |y - x| = |x| + |y| + |x + y| + |y - x| \leq 3$$

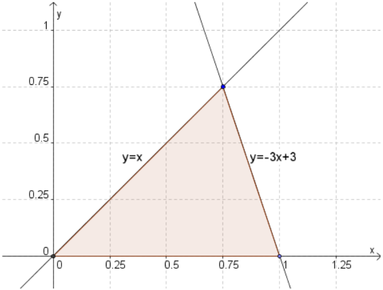
Pertanto, studiamo $\mathcal{D}$ solo per $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$. Ivi, è $|x| = x$, $|y| = y$, $|x + y| = x + y$ e $|x - y| = x - y$. La relazione che dà $\mathcal{D}$ (sotto le restrizioni effettuate) diventa

$$x + y + (x + y) + x - y \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad y + 3x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -3x + 3$$

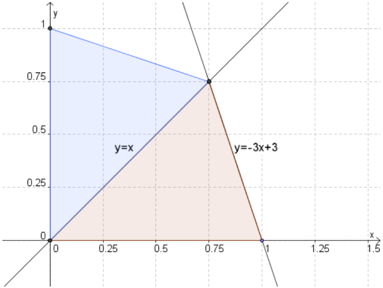
Esercizio – continuazione

La porzione di insieme $\mathcal{D}$ da rappresentare è, dunque, caratterizzato dal seguente insieme di disequazioni

$$\begin{cases} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y & \leq & x \\ y & \leq & -3x+3 \end{cases}$$

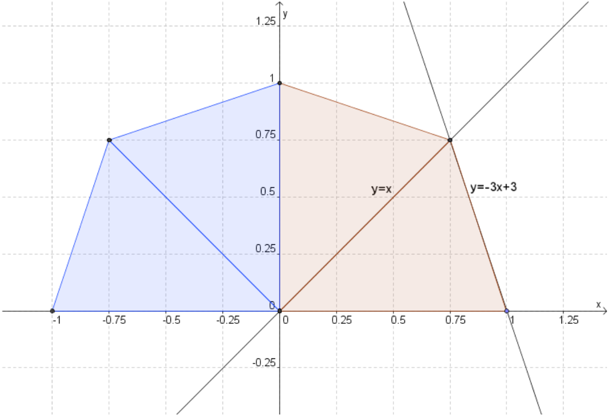


iniziale

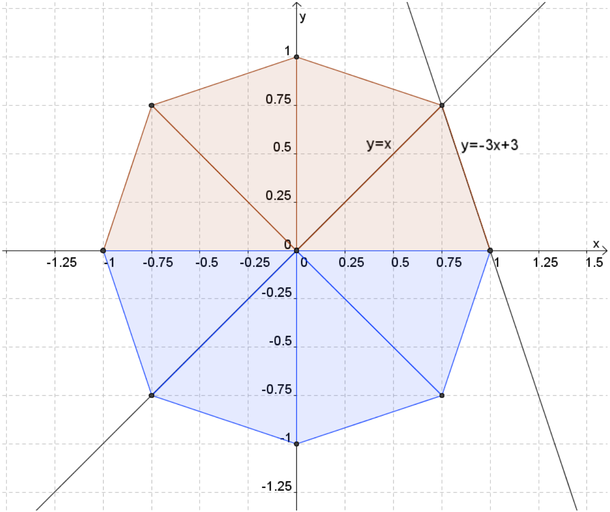


aggiungo simmetrico rispetto a $y = x$

continuazione – simmetria rispetto all'asse y



continuazione – simmetria rispetto all'asse *x*



Esercizio

Determinare quanti sono gli interi x tali per cui il numero n definito dall'espressione

$$n = |(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - 7x + 11)|$$

è un numero primo.

Risposta
Osserviamo che, per le proprietà del valore assoluto, possiamo scrivere

$$n = |(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - 7x + 11)| = |x^2 + x - 1| \cdot |x^2 - 7x + 11|.$$

Quindi, n è il prodotto dei numeri $n_1 = |x^2 + x - 1|$ e $n_2 = |x^2 - 7x + 11|$. Ora, poiché $x \in \mathbb{Z}$ $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pertanto, affinché n sia primo deve essere $n_1 = 1$ ed n_2 primo o, viceversa, n_1 primo ed $n_2 = 1$. In tutti gli altri casi n è il prodotto di due numeri e, pertanto, non può essere primo. Ora, è

- $n_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 + x - 1| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [a] \quad x^2 + x - 1 = 1, \quad$ oppure $\quad [b] \quad x^2 + x - 1 = -1$
  - Risolviamo [a]. E' $x^2 + x - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$ per cui risulta ($a = 1$, $b = 1$, $c = -2$)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

  - Risolviamo [b]. E' $x^2 + x - 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x = 0$ per cui risulta

$$x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

Abbiamo altre due soluzione $x_3 = 0$ ed $x_4 = -2$.

Esercizio – continuazione

- $n_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 7x + 11| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [c] \quad x^2 - 7x + 11 = 1, \quad$ oppure $\quad [d] \quad x^2 - 7x + 11 = -1$
  - Risolviamo [c]. E' $x^2 - 7x + 11 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0$ per cui è $(a = 1, b = -7, c = 10)$

$$x_{5,6} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (10)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_5 & = & \frac{7+3}{2} = 5 \\ x_6 & = & \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

  - Risolviamo [d]. E' $x^2 - 7x + 11 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = 0$ per cui è $(a = 1, b = -7, c = 12)$

$$x_{7,8} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (12)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_7 & = & \frac{7+1}{2} = 4 \\ x_8 & = & \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato otto valori, indicati con x_k, $k = 1, \cdots, 8$ in corrispondenza dei quali n può essere primo. Esaminiamoli costruendo la seguente tabella

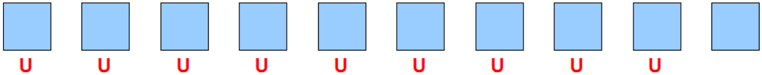
x_k	-2	1	0	-1	5	2	4	3
n_1	1	1	1	1	29	5	19	11
n_2	29	5	11	19	1	1	1	1
n	29	5	11	19	29	5	19	11

In conclusione, ci sono otto numeri interi in corrispondenza dei quali n è primo.

Esercizio

Ad un ricevimento ci sono 40 invitati, tra uomini e donne, che vanno sistemati in tavoli da 4. Comunque si dispongano gli invitati nei tavoli c'è sempre almeno un tavolo di sole donne. Quante sono almeno le donne invitate?

Risposta
Poiché non possiamo avere nemmeno un uomo in ogni tavolo, il numero di questi ultimi deve essere inferiore a 10. Dunque, ci sono almeno 31 donne. Il massimo che possiamo ottenere è infatti di avere un uomo per ognuno dei primi nove tavoli.



Esercizio

Ad una festa l'età media è 31 anni, l'età media degli uomini è 35 anni e l'età media delle donne è 25 anni. Qual è il rapporto fra il numero degli uomini e quello delle donne?

Risposta
Siano $u_1, u_2, \cdots, u_n$ l'età degli n uomini presenti e $d_1, d_2, \cdots, d_m$ l'età delle m donne presenti. Allora abbiamo

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = 35, \qquad \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_m}{m} = 25, \qquad \frac{(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (d_1 + d_2 + \cdots + d_m)}{n + m} = 31$$

Quindi dalle prime due equazioni risulta

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 35 \cdot n \qquad \text{e} \qquad d_1 + d_2 + \cdots + d_m = 25 \cdot m.$$

Di conseguenza, sostituendo nella terza equazione si ottiene

$$\frac{35 \cdot n + 25 \cdot m}{n + m} = 31 \quad \Rightarrow \quad 35n + 25m = 31(n + m) \quad \Rightarrow \quad 4n = 6m \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{m} = \frac{6}{4}.$$