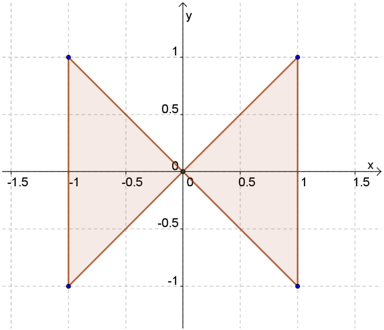
Esercizio

Determinare l'insieme di disuguaglianze che descrive esattamente la regione di piano della figura

[1] $|y| \leq |x|, |x| \leq 1$ [2] $y \leq x, x \leq 1$ [3] $|y| \leq x, x \leq 1$ [4] $y \leq |x|, |x| \leq 1$ [5] $y \leq x, |x| \leq 1$



Risposta

L'insieme è simmetrico rispetto all'origine e a ciascuno degli assi cartesiani. Inoltre, è un sottoinsieme del quadrato unitario di centro l'origine. Quest'ultima osservazione, da sola, scarta tutte le opzioni ad eccezione della prima.

Esercizio

A quale numero decimale (cioè in base 10) corrisponde il numero esadecimale (cioè in base 16) 99_{16}?

[1] 15 [2] 153 [3] 159 [4] 176

Risposta

E'

$$99_{16} = \left(9 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0\right)_{10} = 144 + 9 = 153.$$

Esercizio

Il sistema di primo grado nelle incognite x ed y

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

[1] è risolubile per ogni a [2] è risolubile per ogni$a \neq 1$ [3] è risolubile per ogni$a \neq -1$

[4] nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Risposta

Dalla seconda equazione risulta $x = -1 - y$ che sostituita nella prima dà

$$-1 - y + \alpha y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-1 + \alpha)y = 2$$

che ha

- nessuna soluzione se $-1 + \alpha = 0$ perché l'equazione $0 \cdot y = 2$ non ha soluzione. In corrispondenza, anche il sitema non ha soluzione.
- una soluzione se $-1 + \alpha \neq 0$ che vale

  $$y = \frac{2}{-1 + \alpha}.$$

  In corrispondenza, la x vale

  $$x = -y - 1 = \frac{2}{-1 + \alpha} - 1$$

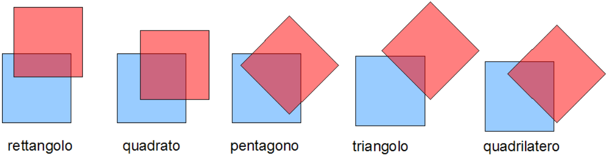
  ed il sistema ha una ed una sola soluzione.

Esercizio

L'intersezione fra due quadrati, se non è vuota

[1] è sempre un quadrato [2] è sempre un quadrilatero [3] nessuna delle precedenti affermazioni è vera

Risposta
Osserviamo alcune delle possibilità nella figure che segue relative a due quadrati uguali



Chiaramente, è vera la [3].

Esercizio

Trovare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^4(-x^4+16)}}$$

Risposta

Deve essere

$$x^4(-x^4+16) > 0$$

- E' $x^4 \geq 0$ sempre. Osserviamo, però, che va escluso $x = 0$.
- Da $-x^4 + 16 = (4 + x^2)(4 - x^2)$ e $4 + x^2 > 0$ sempre, deve essere $4 - x^2 > 0$ ciò che accade per $-2 < x < 2$.

In definitiva il dominio è

$$D = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Esercizio

Risolvere l'equazione

$$x^x = x^2$$

Risposta

Osserviamo subito che deve essere $x > 0$ affinché la scrittura x^x abbia senso. In queste condizioni, risulta

$$x^x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{\log_{10}\left(x^x\right)} = 10^{\log_{10}\left(x^2\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{x\log_{10} x} = 10^{2\log_{10} x}$$

Pertanto, l'equazione è equivalente a

$$x\log_{10} x = 2\log_{10} x \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\log_{10} x = 0$$

che, per la legge di annullamento del prodotto, dà

$$\log_{10} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^0 = 1$$

e $x - 2 = 0$ che porge $x = 2$.

Pertanto, l'equazione ha le due soluzioni $x = 1$ ed $x = 2$.

Esercizio

Si consideri il sistema di equazioni dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4x^2 + y + 1 & = & 4x \\ -\alpha x + y & = & 1. \end{cases}$$

Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. il sistema ha soluzione per ogni valore di α
2. esiste α per cui il sistema ha esattamente una soluzione
3. esiste α per cui il sistema ha esattamente due soluzioni
4. esiste α per cui il sistema ha esattamente quattro soluzioni

Risposta

Dalla seconda equazione abbiamo $y = 1 + \alpha x$ che sostituita nella prima dà

$$4x^2 + 1 + \alpha x + 1 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + (\alpha - 4)x + 2 = 0$$

Questa equazione è di secondo grado per cui ammette, al più, due soluzioni. Pertanto, anche il sistema ha al più due soluzioni. Dunque, [4] è falsa.

Osserviamo, inoltre, che $\Delta = (\alpha - 4)^2 - 32$ che può essere negativo (rendendo falsa la [1]), nullo (rendendo vera la [2]) e positivo (rendendo vera la [3]).

Esercizio

Indicare quali dei seguenti numeri sono razionali e quali no

$$[1]\quad 1,2 \qquad [2]\quad 1,\overline{3} \qquad [3]\quad 1,23\overline{45} \qquad [4]\quad 1,121122111222111122222\ldots$$

Risposta

Il numero [1] è razionale perché ha una espansione decimale finita. I numeri [2] e [3] sono razionali perché hanno una espansione decimale infinita ma periodica. Il numero [4] non è razionale perché ha una espansione decimale infinita e non periodica.
Inoltre, per i primi tre numeri risulta

- $$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$
- $$1,\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{4}{3}$$
- $$1,23\overline{45} = \frac{12345-123}{9900} = \frac{12222}{9900} = \frac{679}{550}$$

Esercizio

Calcolare il termine iniziale e la ragione di una progressione aritmetica sapendo che la somma del secondo e del quarto termine è 14 e la somma del terzo e del sesto è 29.

Risposta

Siano a_1 e q il termine iniziale della progressione aritmetica e la sua ragione, rispettivamente. I termini successivi si ottengono dalla relazione ricorsiva $a_{n+1} = a_n + q$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ i cui primi termini sono

$$
\begin{array}{lclclcl}
a_2 & = & a_1 + q & & & & \\
a_3 & = & a_2 + q & = & (a_1 + q) + q & = & a_1 + 2q \\
a_4 & = & a_3 + q & = & (a_1 + 2q) + q & = & a_1 + 3q \\
a_5 & = & a_4 + q & = & (a_1 + 3q) + q & = & a_1 + 4q \\
\dots & & & & & & \\
a_n & = & a_1 + (n-1)q & & & & \\
\dots & & & & & &
\end{array}
$$

Le informazioni del problema si traducono nel seguente sistema lineare di due equazioni nelle incognite a_1 e q

$$
\left\{ \begin{array}{lclcl} a_2 & + & a_4 & = & 14 \\ a_3 & + & a_6 & = & 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lclcl} a_1 + q & + & a_1 + 3q & = & 14 \\ a_1 + 2q & + & a_1 + 5q & = & 20 \end{array} \right.
$$

ossia

$$
\left\{ \begin{array}{lclcl} 2a_1 & + & 4q & = & 14 \\ 2a_1 & + & 7q & = & 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad q = \frac{20-14}{7-4} = 2, \quad a_1 = \frac{14 - 4 \cdot q}{2} = \frac{14 - 4 \cdot 2}{2} = 3.
$$

Esercizio

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

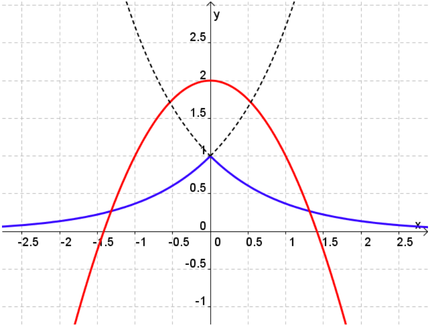
$$e^{-|x|} = 2 - x^2$$

Risposta

Possiamo risolvere il problema per via grafica definendo le due funzioni $f_1(x) = e^{-|x|}$ e $f_2(x) = 2 - x^2$. Per $f_1(x)$ abbiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-(-)x} = e^x & , \quad x < 0 \\ e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

I due grafici risultano dunque



Esercizio

Le soluzioni della disequazione

$$\left(10^x - 100\right) \cdot \left(10^x + 10\right) > 0$$

sono

[1] $(2, +\infty)$ [2] $x < \log_{10}(-1) \cup x > 2$ [3] $x > 0$ [4] nessuna delle precedenti

Risposta

Poiché $10^x > 0$ è $10^x + 10 > 10 > 0$ per cui il segno di questo fattore non gioca nella disequazione che è quindi equivalente a

$$10^x - 100 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10^x > 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

dato che la funzione $f(x) = 10^x$ è monotona crescente perché ha base $10 > 1$.

N.B. Le opzioni [2] e [3] si scartano subito!!