TEST DI AUTOVALUTAZIONE PROBABILITÀ

Statistica

1 Parte A

1.1

Si considerino gli eventi A = "nessuno studente ha superato l'esame" e B = "nessuno studente maschio ha superato l'esame". Allora $A^c \cap B$ è uguale a:

☐ "almeno uno studente ha superato l'esame";

☐ "almeno uno studente femmina ha superato l'esame";

☐ "almeno uno studente maschio ha superato l'esame";

☒ "nessuno studente maschio e almeno uno studente femmina ha superato l'esame".

1.2

Siano A e B due eventi, con $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(B) = \frac{1}{3}$. Quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente* vera?

☐ $A \cup B = \Omega$;

☐ $A \cap B \neq \emptyset$;

☒ $P((A \cup B)^c) > 0$;

☐ $P(A \cap B) = 0$.

1.3

Un evento A ha probabilità 1/3. È noto che B è indipendente da A, e che $P(A^c \cap B^c) = 1/2$. Allora $P(B)$ è uguale a:

☒ 1/4;

☐ 1/2;

☐ 1/6;

☐ non ci sono dati a sufficienza per rispondere alla domanda.

1.4

Calcolare $P(A)$ impiegando, se possibile, i dati a disposizione, che sono $P(B) = \frac{2}{3}$ e $P(A|B) = \frac{1}{2}$. Quale delle seguenti è la risposta corretta

☐ $P(A) = \frac{4}{9}$;

☐ $P(A) = 1$;

☐ $P(A) = \frac{2}{3}$;

☒ non ci sono informazioni sufficienti al calcolo di $P(A)$.

1.5

Si considerino due mazzi di 52 carte da Poker; si estrae una carta dal primo mazzo e due dal secondo. Si definiscano gli eventi $A =$ "la carta estratta dal primo mazzo è un 7", $B =$ "le due carte estratte dal secondo mazzo sono di cuori". Allora

☐ $A \cap B = \emptyset$;

☐ $P(A \cup B) = 1$;

☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

☒ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1.6

Siano A e B due eventi, con $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$. Quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente* vera?

☐ $A \cup B = \Omega$;

☐ A e B non sono indipendenti;

☒ $A \cap B \neq \emptyset$;

☐ $P(A|B) < \frac{1}{2}$.

1.7

Sia Ω l'insieme delle possibili scelte di tre carte da un mazzo di 52. Si considerino gli eventi
$A =$ le prime due carte sono di cuori
$B =$ la seconda e la terza carta non sono dello stesso seme.
Allora:

☐ $A^c \cap B =$ la seconda e la terza carta non sono entrambe di cuori;

☒ $A \cap B^c =$ le tre carte sono di cuori;

☐ $A \cup B =$ le prime due carte sono di cuori e la terza non è di cuori;

☐ $A \cap B = \emptyset$.

1.8

Si considerino due eventi A e B tali che $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $A \cup B = \Omega$. Allora

☐ A e B sono sicuramente indipendenti;

☐ A e B sono sicuramente disgiunti;

☒ può essere $P(A) + P(B) > 1$;

☐ sicuramente $P(A) + P(B) = 1$.

1.9

Siano A e B due eventi, con $A \cap B = \emptyset$. Allora è sicuramente vero che

☐ $P(A|B) = 1$;

☐ $P(A) + P(B) > 1$;

☐ $P(B|A) = 1$;

☒ $P(A|B) = 0$.

1.10

Tre eventi *indipendenti* A, B a C hanno ciascuno probabilità 1/2. Allora l'evento $(A \cap B) \cup C$ ha probabilità

☐ 1/8;

☐ 3/8;

☒ 5/8;

☐ 7/8.

1.11

La probabilità di ottenere il punteggio totale 8 nel lancio di due dadi è

☐ 1/11;

☐ 1/6;

☐ 7/36;

☒ 5/36.

1.12

Due eventi A e B sono tali che $P(A|B) = P(B) = \frac{1}{2}$. Allora $P(A^c \cup B^c)$ è uguale a:

☒ 3/4;

☐ 1/2;

☐ 1/4';

☐ non si può determinare sulla base delle informazioni fornite.

1.13

Lancio contemporaneamente un dado e una moneta, entrambi equilibrati. La probabilità che il dado dia 6 e la moneta dia testa vale

☐ $\frac{1}{6}$

☒ $\frac{1}{12}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ nessuna delle precedenti

1.14

Supponiamo di avere due mazzi di 52 carte da poker, e di estrarre una carta per ogni mazzo. La probabilità che entrambe le carte estratte siano di quadri è

☐ $\frac{1}{4}$

☒ $\frac{1}{16}$

☐ $\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$

☐ $\frac{\binom{26}{2}}{\binom{104}{2}}$

1.15

Martina ha 5 anelli diversi, e ne vuole indossare 3. In quanti modi può sceglierli?

- ☐ $\frac{5!}{3!}$
- ☐ $5!$
- ☒ $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$
- ☐ $5! \cdot 3!$

1.16

Ho un paio di calzini rossi, un paio verdi e un paio blu. Chiudo gli occhi e scelgo due calzini a caso tra i sei possibili. Qual è la probabilità di scegliere due calzini di diverso colore?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☒ $\frac{4}{5}$
- ☐ 0

1.17

Quale delle seguenti affermazioni relative al lancio di due dadi equilibrati è vera?

- ☐ La probabilità di fare 6 lanciando un dado è uguale alla probabilità di fare almeno un sei lanciando due dadi
- ☐ La probabilità di fare 6 lanciando un dado è la metà della probabilità di fare almeno un sei lanciando due dadi
- ☐ La probabilità di fare due 6 lanciando due dadi è la metà della probabilità di fare 6 lanciando un dado
- ☒ nessuna della affermazioni precedenti è vera

1.18

Tirando due volte un dado regolare a sei facce, qual è la probabilità che il punteggio del secondo dado sia *strettamente* maggiore del punteggio del primo dado?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{5}{36}$
- ☒ $\frac{5}{12}$

1.19

Quanti sono gli anagrammi della parola VERDI?

- ☐ 5
- ☐ 20
- ☒ 120
- ☐ 60

1.20

in un'urna ci sono 10 palline rosse e 10 palline verdi. Si estraggono due palline (senza reimmissione). La probabilità che abbiano diverso colore è

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{10}$
- ☒ $\frac{10}{19}$

1.21

Due eventi A e B, sottoinsiemi dello spazio degli esiti S, sono tali che $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ A e B sono indipendenti;
- ☐ $A \cup B = S$;
- ☒ $P(A|B) = 0$;
- ☐ $P(A \cup B) = 1$.

1.22

Si considerino gli eventi $A =$ "il treno è partito da Venezia con 10 minuti di ritardo", $B =$ "il treno arrivato a Milano con più di venti minuti di ritardo", $C =$ "il tempo di percorrenza è stato di oltre dieci minuti maggiore di quello previsto". Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☒ $A \cap B \subseteq C$
- ☐ $A \cup B = C$
- ☐ $A = C \cap B$
- ☐ $B = A \cup C$

1.23

Siano A, B, C tre eventi, tali che $A \cap B = \emptyset$, e B e C sono indipendenti. Inoltre $P(A) = 1/4$, $P(B) = P(C) = 1/2$. Quanto vale $P(A \cup (B \cap C))$?

- ☐ 1
- ☐ 3/4
- ☒ 1/2
- ☐ 1/4

1.24

Due dadi regolari a sei facce sono così costruiti: il dado A ha due facce rosse e quattro facce blu, mentre il dado B ha tre facce rosse e tre facce blu. Se lancio i due dadi, qual è la probabilità che le facce risultanti abbiano lo stesso colore?

☐ $\frac{5}{36}$

☐ $\frac{1}{3}$

☒ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{2}{3}$

1.25

Lancio un dado regolare a sei facce e, indipendentemente, due monete equilibrate. Qual è la probabilità che il risultato del dado sia 3 e che entrambe le monete diano croce?

☒ $\frac{1}{24}$

☐ $\frac{1}{12}$

☐ $\frac{5}{12}$

☐ $\frac{1}{8}$

1.26

Una busta contiene 3 carte: due carte hanno entrambe le facce rosse mentre una carta ha una faccia rossa e una faccia nera. Pesco una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso. Qual è la probabilità che la faccia superiore sia rossa?

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{4}$

☐ $\frac{4}{5}$

☒ $\frac{5}{6}$

1.27

Qual è la probabilità di ottenere *almeno una testa* in tre lanci di una moneta?

☒ $\frac{7}{8}$

☐ $\frac{3}{8}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{2}{3}$

1.28

Se due eventi A e B sono tali che $P(A) = \frac{4}{5}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$, si può certamente concludere che

- ☐ $P(A \cup B) = 1$
- ☐ $P(A \cup B) = \frac{12}{25}$
- ☐ $P(A \cap B) = \frac{12}{25}$
- ☒ $P(A \cap B) \geq \frac{2}{5}$

1.29

Gli studenti di un corso di laurea vengono classificati sulla base di due caratteristiche: il sesso e il tipo di scuola superiore di provenienza. I dati sono riportati nella seguente tabella:

	Liceo	Altra scuola superiore
Maschi	47	63
Femmine	62	51

Si scelga a caso uno studente di questo corso di laurea, e si considerino gli eventi: $A =$ "lo studente scelto è maschio"; $B =$ "lo studente scelto proviene da un liceo". Allora $P(A|B)$ vale

- ☐ $\frac{47}{110}$
- ☒ $\frac{47}{109}$
- ☐ $\frac{47}{98}$
- ☐ $\frac{47}{223}$

2 Parte B

2.1

Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C(ad esempio, "tutti gli eventi si verificano" $= A \cap B \cap C$).

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Si verifica esattamente un evento.
5. Due eventi su tre si verificano.
6. O si verifica A, oppure, se non si verifica A, neppure B si verifica.

Soluzione.

1. $A \cup B \cup C$.
2. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$.
3. $A^c \cap B^c \cap C^c$.
4. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.
5. $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$.
6. $A \cup (A^c \cap B^c)$

2.2

Cinque biglietti di una lotteria sono rimasti invenduti. Fra questi c'è il biglietto vincente. Due amici A e B decidono di comprarne uno a testa. A sceglie per primo il biglietto.

(a) Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente se A non lo acquista?

(b) Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente?

Soluzione.
(a) Siano $E =$ B acquista il biglietto vincente, $F =$ A acquista il biglietto vincente. Si ha

$$P(E|F^c) = 1/4.$$

(b) Essendo $P(F) = 1/5$ e $P(E|F) = 0$, per la formula di disintegrazione:

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = \frac{1}{4}\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad (!)$$

2.3

Una scatola contiene due dadi equilibrati. Uno di essi è un dado usuale, mentre nell'altro il numero uno compare su due facce e il numero sei non compare. Si sceglie, a caso, uno dei due dadi.

a. Si lanci il dado scelto. Qual è la probabilità di ottenere il punteggio uno?

b. Si lanci il dado scelto due volte. Qual è la probabilità di ottenere tre come punteggio totale?

Soluzione. a. Siano $A =$ "il dado scelto è quello usuale", $B =$ "il punteggio ottenuto è 1". Sappiamo che $P(B|A) = 1/6$, $P(B|A^c) = 1/3$, $P(A) = P(A^c) = 1/2$. Allora

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 1/4.$$

b. Sia $C =$ "il punteggio totale è tre". Abbiamo che

$$P(C|A) = 2/36 = 1/18,$$

in quanto due combinazioni di risultati danno punteggio totale tre. Per l'altro dado, essendoci due facce con un uno, ci sono quattro combinazioni di facce che danno tre come punteggio totale. Pertanto

$$P(C|A^c) = 4/36 = 1/9.$$

Allora

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = 1/12.$$

2.4

Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.
Soluzione. Posto $x = P(A)$, $y = P(B)$, per la formula delle probabilità totali

$$x = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.7y + 0.3(1-y).$$

Inoltre, per la formula di Bayes,

$$0.6 = P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.7y}{x}.$$

Abbiamo ottenuto allora un sistema lineare in x, y, che si risolve ottenendo $x = 21/46$.

2.5

In un labirinto a T, ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a sinistra e ricevere cibo o di andare a destra e ricevere una leggera scossa elettrica. Assumete che prima di ogni condizionamento (nel tentativo 1) sia ugualmente probabile che gli animali vadano a destra o a sinistra. Dopo aver ricevuto il cibo ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra diventano 0.6 e 0.4, rispettivamente, per il tentativo successivo. Invece, dopo aver ricevuto una scossa elettrica ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra al tentativo successivo diventano rispettivamente 0.8 e 0,2, rispettivamente.

1. Qual è la probabilità che l'animale vada a sinistra al tentativo numero 2?
2. E al numero 3?
3. Se dopo il secondo tentativo si osserva che l'animale è a sinistra, qual è la probabilità che l'animale abbia ricevuto cibo prima dell'ultimo movimento?

Soluzione.

S_i : "i-esimo passo della cavia verso sinistra', $i = 1, \ldots$

D_i : "i-esimo passo della cavia verso destra", $i = 1, \ldots$

$P(S_1) = P(D_1) = 1/2$,
$P(S_{i+1}|S_i) = 0.6 \ \forall i = 1, \ldots,$
$P(S_{i+1}|D_i) = 0.6$, $\forall i = 1, \ldots$

1. $P(S_2) = P(S_2 \mid S_1)P(S_1) + P(S_2 \mid D_1)P(D_1) = 0.7 \Rightarrow \quad P(D_2) = 1 - P(S_2) = 0.3$
2. $P(S_3) = P(S_3 \mid S_2)P(S_2) + P(S_3 \mid D_2)P(D_2) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 33/50$.
3. $P(S_1 \mid S_2) = \frac{P(S_2|S_1)P(S_1)}{P(S_2)} = 3/7$.

2.6

In una regione italiana, nel 1981, sul 15% della popolazione sotto gli 8 anni è stato sperimentato un vaccino contro il morbillo. Si è visto che solo il 3% dei vaccinati si sono ammalati di morbillo, contro il 16% dei non vaccinati.

a. Si scelga a caso un individuo tra gli abitanti di quella regione che nel 1981 aveva meno di 8 anni. Qual è la probabilità che si sia ammalato di morbillo?

b. Supponiamo di venir informati che l'individuo del punto a. si è ammalato di morbillo. Qual è la probabilità che sia stato vaccinato?

Soluzione. Si considerino gli eventi A = "l'individuo è stato vaccinato" e B = "l'individuo si è ammalato di morbillo". Sappiamo che

$$P(A) = 0.15, \quad P(B|A) = 0.03 \quad P(B|A^c) = 0.16$$

a. Per la formula di fattorizzazione

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.1405$$

b. Per la formula di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 0.032$$

2.7

Un test clinico per una certa malattia che colpisce il 5% della popolazione, può avere tre esiti: positivo, negativo, oppure "nullo" (cioè il test fornisce un risultato ambuguo, che non permette di propendere né per la positività né per la negatività). Se un individuo è affetto dalla malattia, risulta positivo al test nel 96% dei casi, negativo nel 2%, mentre negli altri casi il test risulta nullo. Se un individuo è sano, risulta positivo al test nel 3% dei casi, negativo nel 95%, mentre negli altri casi il test risulta nullo. Qual è la probabilità di un falso positivo, cioè che individuo risultato positivo al test sia in realtà sano?

Soluzione. Sia A = "il test è risultato positivo", B = "l'individuo è sano". Per la Formula di Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} = \frac{0.03 \times 0.95}{0.03 \times 0.95 + 0.96 \times 0.05} = 0.375.$$

2.8

Gli individui di una popolazione di 6549 persone vengono classificati sulla base di due caratteristiche: reddito (basso, medio, alto), e l'essere o meno un fumatore. I dati sono i seguenti:

	reddito		
	basso	medio	alto
fumatore	634	332	247
non fumatore	1846	1622	1868

Si scelga *a caso* un individuo della popolazione.

a. Qual è la probabilità che sia un fumatore?

b. Qual è la probabilità condizionata che sia un fumatore sapendo che ha reddito alto?

Si scelgano ora a caso *due individui distinti* della popolazione.

c. Qual è la probabilità che siano entrambi fumatori?

d. Qual è la probabilità condizionata che siano entrambi fumatori sapendo che nessuno di loro ha reddito alto?

Soluzione. a. $\frac{634+332+247}{6549}$

b. $\frac{247}{247+1868}$.

c. Notare che i fumatori sono in tutto $634 + 332 + 247 = 1213$. Il numero di modi di scegliere due fumatori in questo gruppo è $\binom{1213}{2}$. Dunque la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{1213}{2}}{\binom{6549}{2}}$$

d. Gli individui che non hanno reddito alto sono $634 + 332 + 1846 + 1622 = 4434$. Tra di essi i fumatori sono $634 + 332 = 966$. La probabilità richiesta è perciò

$$\frac{\binom{966}{2}}{\binom{4434}{2}}$$

2.9

Un impiegato della questura deve esaminare 100 domande di permesso di soggiorno, i cui richiedenti possono essere così suddivisi:

	Europei non UE	Extraeuropei
Uomini	21	46
Donne	6	27

L'impiegato sceglie a caso la prima domanda da esaminare.

a) Qual è la probabilità che la prima domanda esaminata sia quella di una donna?

b) Sapendo che la prima domanda esaminata è quella di una donna, qual è la probabilità che sia la domanda di una cittadina extraeuropea?

Soluzione.

a) Il numero totale di domande presentate da donne è pari a 27+6 = 33. La probabilità cercata vale dunque
$$\frac{33}{100} = 0.33\,.$$

b) Introducendo gli eventi
$$A = \{\text{la domanda è presentata da una donna}\}$$
$$B = \{\text{la domanda è presentata da un/una cittadino/a extraeuropeo/a}\}\,,$$
dobbiamo calcolare $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$. Contando ancora i casi favorevoli sui casi possibili, si ha che
$$P(B\cap A) = \frac{27}{100}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad P(B|A) = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{33}{100}} = \frac{27}{33} = 0.81\,.$$

2.10

Il telecomando del mio televisore funziona con una batteria. Ho in casa due batterie, che indico con A e B. La probabilità che la batteria A si esaurisca prima di un anno vale 2/3, mentre per la batteria B tale probabilità vale 1/5. Chiedo a mia sorella di inserire una batteria nel telecomando e lei procede in questo modo: tira due volte una moneta equilibrata; se esce testa entrambe le volte, inserisce la batteria A, in caso contrario inserisce la batteria B.

a) Qual è la probabilità che la batteria inserita nel telecomando duri più di un anno?

b) Se dopo un anno il telecomando continua a funzionare, qual è la probabilità che la batteria inserita sia A?

Soluzione.

a) Introduciamo gli eventi
$$E \ := \ \text{“viene inserita nel telecomando la batteria A”}\,,$$
$$F \ := \ \text{“la batteria inserita dura più di un anno”}\,.$$
Dai dati del problema si deduce che $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F|E) = \frac{1}{3}$, $P(F|E^c) = \frac{4}{5}$, per cui dalla formula delle probabilità totali si ha
$$P(F) \ = \ P(F|E)P(E) \ + \ P(F|E^c)P(E^c) \ = \ \frac{1}{3}\frac{1}{4} \ + \ \frac{4}{5}\frac{3}{4} \ = \ \frac{41}{60}\,.$$

b) Dalla formula di Bayes si ottiene
$$P(E|F) \ = \ \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} \ = \ \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{4}}{\frac{41}{60}} \ = \ \frac{5}{41}\,.$$

2.11

In un esame è presente una domanda a risposta multipla con 5 risposte possibili, di cui una corretta. Il 70% degli studenti conosce la risposta corretta; tutti gli altri rispondono a caso. Si consideri uno studente scelto a caso.

a. Qual è la probabilità che risponda esattamente?

b. Sapendo che lo studente ha dato la risposta esatta, qual è la probabilità che sapesse la risposta corretta?

Soluzione. Siano $A =$ "lo studente dà la risposta esatta", $B =$ "lo studente conosce la risposta corretta". Sappiamo che: $P(A|B) = 1$, $P(A|B^c) = 1/5$, $P(B) = 0.7$.

a. $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.76$.

b.
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \simeq 0.921$$

2.12

Una Compagnia di Assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La Compagnia classifica gli assicurati in due categorie: "basso rischio" e "alto rischio". Dei suoi assicurati, il 75% sono a "basso rischio", il restante 25% ad "alto rischio". Gli assicurati a "basso rischio" hanno una probabilità pari a 0.02 di subire un danno che prevede il pagamento dell'assicurazione. Tale probabilità è pari a 0.1 per gli assicurati ad "alto rischio".

i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell'assicurazione?

ii) Se un individuo reclama il pagamento dell'assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad "alto rischio"?

Soluzione.

i) Siano $A =$ "il cliente è ad alto rischio", $B =$ "il cliente reclama il pagamento dell'assicurazione". Sappiamo che
$$P(A) = 0.25 \quad P(B|A) = 0.1 \quad P(B|A^c) = 0.02.$$
Allora
$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.04.$$

ii)
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 0.625$$

2.13

Il responsabile marketing di una società che produce giocattoli sta analizzando le probabilità di successo sul mercato di un nuovo gioco. Nell'esperienza passata della ditta, il 65% dei nuovi giocattoli ha avuto successo di mercato, mentre il restante 35% non l'ha ottenuto. Si sa inoltre che l'80% dei giocattoli di successo avevano avevano ricevuto un giudizio positivo da parte degli esperti di marketing della società prima dell'immissione del prodotto sul mercato, mentre lo stesso giudizio era stato attribuito solo al 30% dei giocattoli che poi si sarebbero rivelati un insuccesso di mercato. Se un nuovo giocattolo è stato valutato positivamente dagli esperti di marketing, qual è la probabilità che si riveli un successo?

Soluzione. Si considerino gli eventi: $A =$ "il giocattolo ha successo", e $B =$ "il giocattolo ha un giudizio positivo". Sappiamo che: $P(A) = 0.65$, $P(B|A) = 0.8$, $P(B|A^c) = 0.3$. Allora
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.8 \cdot 0.65}{0.8 \cdot 0.65 + 0.3 \cdot 0.35} = 0.832.$$

2.14

Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60%, e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

a) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?

b) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la meta, con quale probabilità appartiene al gruppo degli escursionisti allenati?

Soluzione. Consideriamo i seguenti eventi:

$FA =$ "l'escursionista è fuori allenamento" $A =$ "l'escursionista è allenato"

$M =$ "l'escursionista ha raggiunto la meta"

Sappiamo che: $P(FA) = 0.30$, $P(A) = 1 - P(FA) = 0.70$, $P(M|FA) = 0.60$, $P(M|A) = 0.95$. Abbiamo:

$$P(M) = P(M|FA)P(FA) + P(M|A)P(A) = 0.845.$$

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)P(A)}{P(M)} = 0.787.$$

2.15

In un'azienda viene eseguito un sondaggio per conoscere il parere degli impiegati riguardo ad una particolare politica aziendale. Assumiamo di sapere che gli impiegati realmente favorevoli a tale politica si dichiareranno favorevoli nel sondaggio, mentre il 20% di quelli contrari si dichiareranno ugualmente favorevoli, per timore di ritorsioni.

a) In questo primo quesito supponiamo di sapere che il 75% degli impiegati è favorevole alla politica dell'azienda, mentre il restante 25% è contrario. Scegliamo a caso un impiegato: qual è la probabilità che si dichiari favorevole nel sondaggio?

b) In questo secondo quesito, supponiamo di non sapere quale sia la percentuale di impiegati favorevoli, ma di sapere che l'85% degli impiegati si è dichiarato favorevole al sondaggio. Scegliamo a caso un impiegato: qual è la probabilità che sia realmente favorevole alla politica dell'azienda? (*Sugg.*: usare la stessa formula del punto a): è semplicemente cambiata l'incognita del problema.)

Soluzione. Si considerino gli eventi: $A =$ "l'impiegato scelto è favorevole alla politica dell'azienda", $B =$ "l'impiegato scelto si dichiara favorevole alla politica dell'azienda". Abbiamo: $P(B|A) = 1$, $P(B|A^c) = 0.2$.

a) Si assume che $P(A) = 0.75$. Pertanto

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)(1 - P(A)) = 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.8.$$

b) Ora sappiamo che $P(B) = 0.85$. Quindi, dalla formula

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)(1 - P(A))$$

dobbiamo ricavare $P(A)$:

$$P(A) = \frac{P(B) - P(B|A^c)}{P(B|A) - P(B|A^c)} = \frac{0.85 - 0.2}{1 - 0.2} = 0.8125$$

2.16

Supponiamo per semplicità che un figlio sia maschio o femmina con la stessa probabilità, indipendentemente da altri figli.

1. Qual è la probabilità che in una famiglia con due figli ci sia almeno un figlio maschio?

Consideriamo ora un gruppo di 100 famiglie, 40 delle quali hanno due figli mentre le restanti 60 ne hanno uno solo.

2. Se scegliamo una famiglia a caso tra le 100, qual è la probabilità che essa abbia almeno un figlio maschio?
3. Se la famiglia scelta ha almeno un figlio maschio, qual è la probabilità che sia una delle famiglie con due figli?

Soluzione.

1. La probabiità che entrambi i figli siano femmine è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, per cui la probabilità che almeno un figlio sia maschio è pari a $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
2. Introduciamo gli eventi $A = \{$la famiglia scelta ha due figli$\}$ e $B = \{$la famiglia scelta ha almeno un figlio maschio$\}$. Per il punto precedente, $P(B|A) = \frac{3}{4}$ mentre chiaramente $P(B|A^c) = \frac{1}{2}$ (si noti che $A^c = \{$la famiglia scelta ha un solo figlio$\}$). Inoltre $P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Dalla formula delle probabilità totali si ottiene dunque
$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\,.$$
3. Per la formula di Bayes
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}\,.$$