TEST DI AUTOVALUTAZIONE
TEST SU DUE CAMPIONI

I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

Statistica

1 Parte A

1.1

Per verificare l'efficacia di un farmaco per la riduzione del livello di trigliceridi nel sangue, vengono utilizzati due gruppi di volontari. Ad un gruppo viene somministrato il farmaco, all'altro una sostanza dall'identico aspetto, ma del tutti inerte. Quale dei seguenti metodi statistici verrà usato per effettuare la verifica?

- ☐ Un test di confronto di medie per dati accoppiati;
- ☒ un test di confronto di medie per campioni indipendenti;
- ☐ un test su una media;
- ☐ un test di confronto di due proporzioni.

1.2

Due campioni della stessa taglia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ hanno varianza campionaria $s_x^2 = 4$ e $s_y^2 = 6$ rispettivamente. Allora la varianza campionaria combinata s_p^2 vale

- ☒ 5
- ☐ 4.5
- ☐ 5.5
- ☐ non è possibile calcolarla senza conoscere la taglia n dei campioni.

2 Parte B

2.1

Si vuole verificare se l'uso di contraccettivi orali provochi un aumento della pressione arteriosa. I dati che seguono riportano la pressione sistolica di 10 donne misurata in un periodo in cui non vi era assunzione di contraccettivi orali (x_i), e la pressione sistolica delle *stesse* 10 donne nel periodo d'uso di contraccettivi (y_i).

x_i	y_i
115	128
112	115
107	106
119	128
115	122
138	145
126	132
105	109
104	102
115	117

Si assuma la normalità delle distribuzioni in gioco. Quali conclusioni si possono trarre (eseguire un test al 5%)?
Soluzione. Si utilizza un t-test per dati appaiati. Posto $z_i = x_i - y_i$, sottoponiamo a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu_Z \geq 0$, cioè che l'uso di contraccettivi non aumenti la pressione sistolica media. Si rifiuta H_0 a livello 0.05 se

$$t_z := \frac{\overline{z}}{s_z}\sqrt{10} < -t_{0.05,9}.$$

Essendo $t_z \simeq -3.32$ e $t_{0.05,9} \simeq 1.83$, H_0 è rifiutata: i dati indicano un aumento sensibile della pressione sistolica media in donne che fanno uso di contraccettivi orali.

2.2

Per esaminare l'efficacia della Paroxetina nel trattamento della depressione, 76 individui vengono suddivisi in due gruppi. Al primo gruppo, composto da 33 individui, viene somministrata la Paroxetina, mentre al secondo gruppo, composto da 43 individui, viene somministrato un placebo (cioè una sostanza inerte). Dopo il trattamento, si misura il livello di depressione degli individui nei due gruppi, usando la scala di Hamilton (che fornisce un valore tanto più elevato quanto maggiore è il livello di depressione). Per il primo gruppo, media e deviazione standard campionarie del livello di depressione valgono rispettivamente 20.38 e 3.91, mentre per il secondo gruppo valgono rispettivamente 21.57 e 3.87. Da questi dati si può concludere che la Paroxetina abbia un effetto significativo nel trattamento della depressione? Si eseguano due test al 5%, prima assumendo e poi non assumendo l'uguaglianza delle varianze.
(Per calcolare il quantile $t_{74,\alpha/2}$, non presente nella tabella, si usi il valore approssimato dato da $t_{70,\alpha/2}$.)

Soluzione. Effettuiamo un test per il confronti di medie per campioni indipendenti. I dati del problema sono

$$n_x = 33\,, \qquad \overline{x} = 20.38\,, \qquad s_x = 3.91\,, \qquad\qquad n_y = 43\,, \qquad \overline{y} = 21.57\,, \qquad s_y = 3.87\,.$$

Prendiamo come ipotesi nulla $H_0 : \mu_x = \mu_y$. Comunciamo con l'assumere l'uguaglianza delle varianze, cioè $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. La varianza campionaria combinata vale

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2} = 15.11\,,$$

e la statistica del test vale

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} = -1.32\,.$$

Ricordando che la regione critica è data da

$$C = \{|t| > t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}\}$$

ed essendo $t_{74,0.025} \approx 1.99$, l'ipotesi H_0 è accettata: a questo livello di significatività, non si può concludere che la Paroxetina abbia un effetto significativo nel trattamento della depressione. Essendo $n_x, n_y > 30$ è lecito usare il test approssimato che non assume l'uguaglianza delle varianze, la cui statistica test è

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} = -1,32$$

(si noti che il valore è pressochè uguale a quello della statistica t usata prima). Essendo $z_{0,025} \simeq 1.96$, anche in questo case H_0 viene accettata al 5%, confermando il risultato precedente.

2.3

Si vuole verificare se il reddito di un neolaureato in Chimica al primo impiego sia significativamente differente dal reddito al primo impiego di un neolaureato in Ingegneria Chimica. Da un sondaggio su 11 neolaureati in Chimica e‘ risultato un reddito medio mensile di 1034 Euro, con una deviazione standard di 107 Euro. Da un analogo sondaggio su 17 neolaureati in Ingegneria Chimica e‘ risultato un reddito medio di 1235 Euro, con una deviazione standard di 134 Euro. Si assuma la normalita‘ della distribuzione dei redditi e l'uguaglianza delle varianze dei redditi relativi alle due categorie di neolaureati. Al 5% di significatività si verifichi se le medie si possano ritenere significativamente diverse. Quali conclusioni si possono trarre?

Soluzione. L'ipotesi di uguaglianza delle medie è rifiutata se

$$|t| := \left| \frac{107 - 134}{S_p \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{17}}} \right| > t_{0.025,26},$$

dove

$$S_p^2 = \frac{10 \times 107 + 16 \times 134}{26}.$$

Risulta $|t| = 6.28$, $t_{0.025,26} = 2.06$. Pertanto l'ipotesi viene rifiutata: i dati propendono per una sostanziale differenza tra il reddito medio di un laureato in Chimica e uno in Ingegneria Chimica.

2.4

Due gruppi di ricercatori stanno indipendentemente cercando di stimare l'età di certi reperti fossili (gli stessi per i due gruppi), usando metodi entrambi metodi basati sulla radioattività, ma strumenti di misurazione diversi. Il primo gruppo esegue 15 misurazioni, ottenendo una media campionaria (in milioni di anni) di 13.24 e una deviazione standard campionaria di 0.97. Il secondo gruppo esegue 9 misure, con una media campionaria di 14.51 e una deviazione standard campionaria di 1.12. Si assuma la normalità delle età misurate da entrambi gli strumenti, e l'uguaglianza delle rispettive varianze.

a. I dati sono sufficienti a concludere che le età medie misurate dai due strumenti siano diverse? (Effettuare un test con livello di significatività $\alpha = 0.05$)

b. Si considerino solo i dati del primo gruppo di ricercatori. Si determini un intervallo di confidenza per l'età media misurata con livello di confidenza $1 - \alpha = 0.95$.

Soluzione. a. Si tratta di una test per due campioni normali indipendenti con varianze ignote ma uguali. I dati sono

$$n_x = 15 \quad \overline{x} = 13.24 \quad s_x = 0.97$$

$$n_y = 9 \quad \overline{y} = 14.51 \quad s_y = 1.12$$

Posto

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2} \simeq 1.0549$$

la statistica test è data da

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \simeq -2.93$$

L'ipotesi $H_0 : \mu_x = \mu_y$ viene rifiutata a livello di significatività 0.05 se

$$|t| > t_{n_x+n_y-2,0,025}.$$

Essendo $t_{0.025,22} = 2.074$, tale disuguaglianza è verificata: a livello di significatività 0.05 H_0 viene rifiutata, cioè i dati portano alla conclusione che le età medie misurate dai due strumenti siano diverse.

b. Si considerano i dati relativi al primo campione. L'intervallo di confidenza di livello 0.95 è dato da

$$\overline{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n_x}} t_{0.025,14} = 13.24 \pm 0.537$$

2.5

Il cicloergometro è uno strumento che misura la potenza massima erogabile da un individuo. In un campione casuale di 20 individui maschi di 25 anni sono state misurate le potenze massime, ottenendo una media campionaria $\overline{x} = 221W$ e una deviazione standard campionaria $s_x = 33W$. In un campione casuale di 30 individui di 30 anni, analoghe misurazioni forniscono una media campionaria $\overline{y} = 211W$ e una deviazione standard campionaria $s_y = 36W$. Si assuma la normalità e l'uguaglianza delle varianze nelle distribuzioni dei due campioni. Con questi dati è possibile concludere che la potenza erogata diminuisce in modo significativo tra i 25 e i 30 anni (si effettui un test con livello di significatività $\alpha = 0.05$)
Soluzione. Si effettua un t-test di confronto di medie per campioni indipendenti. Posto μ_x (risp. μ_y) la media della potenza massima erogata dai maschi di 25 anni (risp. 30), sottoponiamo a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu_x \leq \mu_y$. La varianza combinata è

$$s_p^2 = \frac{19s_x^2 + 29s_y^2}{48} = 1214.06$$

La statistica del test è

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}} = 0.9942.$$

H_0 viene rifiutata a livello 0.05 se $T > t_{0.05,48}$. Essendo $t_{0.05,48} = 1.6772$, H_0 viene accettata: con questi dati non è possibile concludere che la potenza erogata diminuisce in modo significativo tra i 25 e i 30 anni.

2.6

In una pubblicazione apparsa sul Journal of the American Medical Association viene riportata la misura della temperatura corporea (in gradi F) di 65 maschi e altrettante femmine. Per i maschi i dati forniscono una media campionaria di 98.105 e una deviazione standard campionaria di 0.699. Per le femmine i dati forniscono una media campionaria di 98.394 e una deviazione standard campionaria di 0.743. Ritenete che da questi dati si possa concludere che la temperatura media delle femmine sia maggiore di quella dei maschi? Individuare un'opportuna ipotesi nulla H_0, calcolare il valore-p del test e dire se H_0 viene accettata o rifiutata al 5%.
Soluzione. Essendo $n_x = n_y = 65 > 30$, possiamo usare il test che non assume l'uguaglianza delle varianze. La statistica test è

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} = \frac{98.105 - 98.394}{\sqrt{\frac{0.699^2}{65} + \frac{0.743^2}{65}}} = -2,284$$

Verifichiamo $H_0 : \mu_x \geq \mu_y$. Il valore-p è

$$1 - P(Z \leq -z) = 0,011.$$

Essendo tale valore minore di $0,05$, H_0 viene rifiutata al 5%. Dunque, al 5% di significatività, possiamo concludere che la temperatura media delle femmine sia maggiore di quella dei maschi.

2.7

È stato messo a punto un trattamento che ha lo scopo di prevenire la formazione della carie nei bambini. Per verificare l'efficacia del trattamento, vengono seguiti 68 bambini sottoposti a trattamento e 36 non sottoposti a trattamento. Nel primo gruppo, 6 bambini hanno sviluppato carie nei successivi due anni, mentre nel secondo tale numero è stato di 10 bambini. Questi dati sono sufficienti a concludere che il trattamento è efficace? Calcolare il valore-p del test.

Soluzione. Si tratta di un confronto tra due proporzioni. Denotiamo con p_x la probabilità che un bambino sottoposto al trattamento sviluppi carie nei due anni successivi, mentre p_y denota l'analoga probabilità per bambini non sottoposti a trattamento. Verifichiamo l'ipotesi $H_0 : p_x = p_y$. Poniamo

$$\hat{p}_x = \overline{x} = \frac{6}{68} \quad \hat{p}_y = \overline{y} = \frac{10}{36} \quad \hat{p} = \frac{n_x\hat{p}_x + n_y\hat{p}_y}{n_x + n_y} = \frac{16}{104}.$$

La statistica test è

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} = -2,5488$$

Il valore-p del test è

$$2(1 - P(Z \leq 2,5488)) = 0,01.$$

Possiamo dunque concludere che il trattamento è efficace: l'ipotesi H_0 di inefficacia del trattamento viene rifiutata per ogni livello maggiore dell'1%.

2.8

In uno studio per verificare gli effetti collaterali del trattamento con estrogeni post-menopausa, 16608 donne della stessa età sono state divise in due gruppi. Un gruppo, composto da 8506 donne, ha ricevuto il trattamento con estrogeni, mentre alle altre è stata somministrata una sostanza inerte ma identica all'apparenza. Nel primo gruppo, 751 donne hanno sofferto di patologie significative nei 5 anni successivi all'inizio del trattamento. Nel secondo gruppo, tale numero è stato di 623 donne. Quali conclusioni si posso trarre da questi dati?
Soluzione. Si tratta di un confronto tra due proporzioni. Denotiamo con p_x la probabilità che una donna sottoposta al trattamento abbia sofferto di patologie significative nei 5 anni successivi all'inizio del trattamento, mentre p_y denota l'analoga probabilità per donne non sottoposte a trattamento. Verifichiamo l'ipotesi $H_0 : p_x = p_y$. Poniamo

$$\hat{p}_x = \overline{x} = \frac{751}{8506} \quad \hat{p}_y = \overline{y} = \frac{623}{8102} \quad \hat{p} = \frac{n_x\hat{p}_x + n_y\hat{p}_y}{n_x + n_y} = \frac{1374}{16608}.$$

La statistica test è

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} = 2,6648$$

Il valore-p del test è

$$2(1 - P(Z \leq 2,6648)) = 0,0077.$$

Possiamo dunque concludere che il trattamento modifica la probabilità di insorgenza di patologie: l'ipotesi H_0 di indifferenza del trattamento viene rifiutata per ogni livello maggiore dell'1%. IN particolare, dato che $\hat{p}_x > \hat{p}_y$, concludiamo che il trattamento ha, come effetto collaterale, un aumento dell'incidenza di patologie gravi.

2.9

Piantine di pomodoro dello stesso tipo vengono piantate in due terreni, che differiscono per esposizione al sole e all'aria. Tra i pomodori raccolti dal terreno 1, ne vengono pesati 435, ottenendo una media campionaria di 41.3 grammi, e una deviazione standard campionaria di 12.1 grammi. Dai prodotti del terreno 2, vengono pesati 512 pomodori, ottenendo una media campionaria di 37.1 grammi, e una deviazione standard campionaria di 6.3 grammi. Questi dati mostrano una differenza significativa nei pesi medi dei pomodori prodotti nei due terreni? (Effettuare un test al 5%)

Soluzione. Effettuiamo un test di confronto di medie per campioni indipendenti e numerosi. Sia x il peso di un pomodoro raccolto dal terreno 1, e y il peso di un pomodoro raccolto dal terreno 2. Verifichiamo $H_0 : \mu_x = \mu_y$. La statistica test è

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} \simeq 6.527$$

Essendo $z_{0.025} \simeq 1.96$, la statistica test cade nella regione critica $|z| > z_{0.025}$, e pertanto H_0 viene rifiutata: questi dati mostrano una differenza significativa nei pesi medi dei pomodori prodotti nei due terreni.

2.10

Per accedere alle scuole americane di dottorato è necessario sostenere il Graduate Record Exam (GRE). In una certa Università si vogliono confrontare i punteggi nel GRE di studenti che hanno terminato il dottorato in meno di 4 anni con quello degli studenti che hanno impiegato più di 4 anni. Viene selezionato un campione casuale di 25 studenti per ognuna delle due categorie. Per il campione di studenti che hanno ottenuto il dottorato in meno di 4 anni, i punteggi nel GRE forniscono una media campionaria di 1056 e una deviazione standard campionaria di 295. Per quelli che hanno impiegato più di 4 anni la media campionaria è 912 e la varianza campionaria 270. Quali conclusioni si possono trarre da questi dati? (Effettuare un test al 5%; si assuma la normalità della distribuzione del punteggio nel GRE, e l'uguaglianza delle varianze nelle due popolazioni).
Soluzione. Usiamo un test di uguaglianza di medie per campioni normali indipendenti.

$$s_p = \sqrt{\frac{295^2 + 270^2}{2}} \simeq 282.78.$$

Come ipotesi nulla scegliamo $H_0 : \mu_x = \mu_y$ ($x =$ punteggio di uno studente che ha impiegato meno di 4 anni). La statistica test è

$$t = \frac{1056 - 912}{282.78\sqrt{\frac{2}{25}}} =\simeq 1.8.$$

Essendo $t_{48,0.025} \simeq 2.01$, H_0 viene accettata al 5%: a questo livello di significatività i dati non dimostrano una differenza significativa nel punteggio medio tra i due gruppi.

2.11

Sono state proposte due distinte tecniche chirurgiche per la riduzione di una certa anomalia anatomica del piede. La seguente tabella fornisce i dati relativi agli interventi effettuati.

	N. interventi	N. successi
Tecnica A	7413	6917
Tecnica B	4024	3812

I dati mostrano una significativa differenza nelle percentuali di successo con le due tecniche? (Effettuale un z-test, e calcolare il valore-p).
Soluzione. Effettuiamo uno z-test di confronto di proporzioni, per $H_0 : p_1 = p_2$, dove p_1 (risp. p_2 è la percentuale di successo con la tecnica A (risp. tecnica B). Abbiamo

$$\hat{p}_1 = 6917/7413 \quad \hat{p}_2 = 3812/4024 \quad \hat{p} = \frac{6917 + 3812}{7413 + 4024}.$$

La statistica test è

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{7413} + \frac{1}{4024}\right)}} \simeq -3.01.$$

Il corrispondente valore-p è, se $Z \sim N(0,1)$

$$2(1 - P(Z \leq |z|)) \simeq 0.002.$$

Il valore molto basso del valore-p, porta alla conclusione che i dati siano fortemente in contrasto con H_0. Essendo $\hat{p}_2 > \hat{p}_1$, concludiamo che c'è evidenza che la tecnica B ha una maggiore percentuale di successo.

2.12

Il direttore di un ufficio postale esegue un monitoraggio dei tempi di attesa dei clienti. In un primo monitoraggio, vengono misurati i tempi di attesa di 100 clienti, ottenendo una media campionaria di 12.4 minuti e una deviazione standard campionaria di 8.5 minuti. Successivamente, il direttore decide di sperimentare una riorganizzazione del lavoro, modificando le mansioni degli impiegati. A seguito di questa riorganizzazione viene ripetuto il monitoraggio. Di nuovo vengono misurati i tempi di attesa di 100 clienti, ottenendo una media campionaria di 11.3 minuti e una deviazione standard campionaria di 7.7 minuti. Questi dati forniscono evidenza che la riorganizzazione sia stata efficace? (Determinare un'opportuna ipotesi statistica, ed eseguire un test al 5%).

Soluzione. Indicando con x i dati relativi al primo gruppo di clienti e con y quelli relativi al secondo gruppo, i dati sono $\overline{x} = 12.4$, $s_x = 8.5$, $\overline{y} = 11.3$, $s_y = 7.7$ e $n_x = n_y = 100$. Effettuiamo un test al 5% per il confronto di medie di campioni indipendenti, scegliendo come ipotesi nulla $H_0 : \mu_x \leq \mu_y$ (cioè la riorganizzazione non è stata efficace). Dato che $s_x^2/s_y^2 = 1.22 \in (\frac{1}{2}, 2)$, siamo nelle condizioni di eseguire il test. Introducendo la statistica

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}},$$

la regione critica del test è data da $C = \{t > t_{n_x+n_y-2,0.05}\}$. Dalle tavole si ricava $t_{198,0.05} \approx t_{\infty,0.05} = z_{0.05} = 1.64$. Inoltre

$$s_p^2 = \frac{99s_x^2 + 99s_y^2}{198} = \frac{s_x^2 + s_y^2}{2} = 65.77 \qquad \Longrightarrow \qquad s_p = 8.1\,,$$

da cui

$$t = \frac{12.4 - 11.3}{8.1\sqrt{\frac{2}{100}}} = \frac{1.1}{1.15} = 0.96\,.$$

Dato che $t \not> t_{n_x+n_y-2,0.05}$, l'ipotesi H_0 è accettata: a questo livello di significatività, i dati non forniscono una significativa evidenza che la riorganizzazione sia stata efficace.

2.13

Molti affermano che i cittadini residenti nelle città capitali di stato tendono ad essere meno critici rispetto all'operato del governo. Una televisione tedesca ha intervistato un campione di 427 cittadini di Berlino, dei quali 271 si sono dichiarati almeno abbastanza soddisfatti del governo. Quindi, ha intervistato 818 cittadini di città diverse da Berlino, e di questi 441 hanno manifestato analoga soddisfazione. Quali conseguenze si possono trarre rispetto all'affermazione iniziale? (Calcolare il valore-p del test, e da questo trarre le conclusioni appropriate)

Soluzione. Effettuiamo un test di confronto di proporzioni, per l'ipotesi nulla $H_0 : p_1 = p_2$. Abbiamo che $\hat{p}_1 = \frac{271}{427}$, $\hat{p}_2 = \frac{441}{818}$, $\hat{p} = \frac{271+441}{427+818}$. La statistica test è

$$ST = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{427} + \frac{1}{818}\right)\hat{p}(1 - \hat{p}}} \simeq 3.24.$$

Il valore-p è

$$2P(Z > 3.24) = 2(1 - P(Z < 3.24)) \simeq 0.0012.$$

Il valore estremamente piccolo del valore p indica che i dato sono in forte contraddizione con l'ipotesi nulla: pertanto mostrano una differenza significativa nella soddisfazione per l'operato del governo tra i cittadini di Berlino e quelli delle altre città.

2.14

Due tipi di soluzioni chimiche sono state provate per misurarne il pH. L'analisi di 6 campioni della prima soluzione ha mostrato un pH medio di 7.52, con una deviazione standard campionaria di 0.032; l'analisi di 5 campioni della seconda soluzione ha mostrato un pH medio di 7.49, con una deviazione standard campionaria di 0.0244. Si vuole stabilire se le due soluzioni abbiano valori uguali o diversi del pH.

a) Impostare tale problema come una verifica di ipotesi, identificando un'opportuna ipotesi nulla.

b) Quali assunzioni sulle distribuzioni dei campioni è opportuno fare?

c) Eseguire il test al 5%, interpretando i risultati.

Soluzione.

a) Si tratta di un problema di confronto di medie, per campioni indipendenti e poco numerosi. Verifichiamo l'ipotesi nulle $H_0 : \mu_X = \mu_Y$.

b) Dobbiamo assimere la normalità delle distributioni, e l'uguaglianza delle varianza: $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, cosa lecita essendo $s_X^2/s_Y^2 \in (1/2, 2)$.

c) Lo stimatore combinato per σ^2 è

$$S_p^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2.$$

I valori sui dati sono: $n_X = 6$, $n_Y = 5$, $S_X = 0.032$, $S_Y = 0.0244$, $\overline{X} = 7.52$, $\overline{Y} = 7.49$. La statistica test, valutata sui dati, è

$$ST = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}} \simeq 1.72.$$

H_0 si rifiuta al 5% se $|ST| > t_{9,0.025} \simeq 2.262$. Poiché tale disuguaglianza non è verificata, concludiamo che i dati non contraddicono il fatto che le due soluzioni abbiano la stessa acidità media.

2.15

I seguenti dati si riferiscono ad uno studio sugli integratori di calcio e dei loro effetti sulla pressione sanguigna. Sono stati studiati un gruppo placebo e un gruppo trattato con integratori, e ne sono state rilevate le pressioni sanguigne.

Placebo	124.6	104.8	96.5	116.3	106.1	128.8	107.2	123.1	118.1
Calcio	129.1	123.4	102.7	118.1	114.7	120.9	104.4	116.3	

Ci sono ragioni per ritenere che l'integratore abbia effetti sulla pressione sanguigna? (Eseguire un test al 5%; assumere la normalità delle distribuzioni della pressione sanguigna)

Soluzione. Si noti anzitutto che le numerosità dei due gruppi, $n_1 = 9$ e $n_2 = 8$ sono piccole. Utilizziamo un test di confronto di medie per piccoli campioni, con ipotesi nulla $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Dai dati troviamo

$$\overline{x}_1 = 113.94 \quad s_1 = 10.81 \quad \overline{x}_2 = 116.2 \quad s_2 = 9.00.$$

Essendo $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.442 \in (1/2, 2)$, è lecito applicare un test per piccoli campioni. Dopo aver calcolato

$$S_p^2 = \frac{8s_1^2 + 7s_2^2}{15} = 100.23,$$

otteniamo la statistica test

$$ST = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}} = -0.4636.$$

La regione critica è data da $|ST| > t_{15,0.025} = 2.1315$. Dunque, la statistica test non cade nella regione critica: al livello di significatività assegnato, non ci sono ragioni sufficienti per ritenere che l'integratore abbia effetti sulla pressione sanguigna.

2.16

In un esperimento rivolto a valutare alcuni benefici fisici della pratica della corsa, viene misurato il *massimo volume di assorbimento di ossigeno* (VO_2), la cui distribuzione si può assumere normale. In un gruppo di 25 "runners" si sono ottenuti i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 47.5\ ml/Kg \\ s_x &= 4.8\ ml/Kg \end{aligned}$$

I risultati riguardanti invece 27 individui che non praticano la corsa, sono stati

$$\begin{aligned} \overline{y} &= 37.5\ ml/Kg \\ s_y &= 5.1\ ml/Kg \end{aligned}$$

Questi dati sono sufficienti a concludere, con un livello di significatività del 5%, che il massimo volume di assorbimento di ossigeno sia maggiore tra chi pratica la corsa?

Soluzione. Essendo $s_x^2/s_y^2 \in (1/2, 2)$, è lecito applicare un test di confronto di medie per campioni indipendenti con varianze uguali. Verifichiamo l'ipotesi nulla $\mu_x \leq \mu_y$. Si trova

$$s_p^2 = \frac{24s_x^2 + 26s_y^2}{50} \simeq 4.96$$

$$ST = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{27}}} \simeq 7.27.$$

Essendo $ST > t_{50,0.05} = 1.6759$, H_0 viene rifiutata: i dati sono sufficienti a concludere, con un livello di significatività del 5%, che il massimo volume di assorbimento di ossigeno sia maggiore tra chi pratica la corsa.

2.17

Una ricerca intende verificare se una regolare attività fisica riduca in modo significativo la produzione di HBE, un ormone secreto dalla ghiandola pituitaria in condizioni di stress. Ai dieci partecipanti alla ricerca (dieci individui dediti a vita sedentaria) viene misurato il livello di HBE nel mese di gennaio, e poi nel mese di maggio, dopo quattro mesi di attività fisica regolare. Questi sono i risultati ottenuti (i livelli di HBE sono in pg/mLi):

Partecipante	Gennaio	Maggio	Differenza
1	42	22	20
2	47	29	18
3	37	9	28
4	9	9	0
5	33	26	7
6	70	36	34
7	54	38	16
8	27	32	-5
9	41	33	8
10	18	14	4

È possibile concludere, a livello di significatività del 5%, che l'attività fisica riduce il livello di HBE? (Si assuma la normalità delle distribuzioni delle variabili in gioco.)

Soluzione. Trattandosi di dati appaiati, eseguiamo un test-t per le differenze (denotiamo con w la relativa variabile). Se μ è la media della distribuzione delle differenze, sottoponiamo a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu \leq 0$. Tale ipotesi viene rifiutata al 5% di significatività se

$$T = \frac{\overline{w}}{s/\sqrt{10}} > t_{0.05,9},$$

dove s è la deviazione standard campionaria relativa alle differenze w. Si trova: $\overline{w} = 13$, $s = 12.4$. Pertanto

$$T = 3.3152 > t_{0.05,9} = 1.833.$$

H_0 viene pertanto rifiutata: possiamo concludere che, a livello di significatività del 5%, l'attività fisica riduce il livello di HBE.

2.18

È stato condotto uno studio per verificare gli effetti di un integratore alimentare assunto da donne incinte, sul peso dei neonati. Un gruppo di 294 donne sono state trattate con tale integratore: i pesi dei loro figli alla nascita hanno media campionaria 3124 g, e deviazione standard campionaria 669 g. Le analoghe quantità in un altro gruppo di 286 donne trattate con un placebo, sono 3088 g e 728 g rispettivamente. Quali conclusione possiamo trarre? (Assumere la normalità delle distribuzioni in gioco, e determinare il *valore-p* di un opportuno test)

Soluzione. Usiamo un test di confronto di medie per due campioni indipendenti e numerosi. Indichiamo con μ_1 e σ_1 media e deviazione standard dei figli di madri che hanno assunto l'integratore, e con μ_2, σ_2 media e deviazione standard dei figli di madri che hanno assunto il placebo. Sottoponiamo a verifica l'ipotesi $\mu_1 \leq \mu_2$. La statistica test vale

$$st = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3124 - 3088}{\sqrt{\frac{669^2}{294} + \frac{728^2}{286}}} \simeq 0.6196$$

a cui corrisponde il valore-p

$$\overline{\alpha} = 1 - P(Z \leq st) \simeq 0.2677.$$

Da un valore così elevato del valore-p si deduce che i dati non dimostrano che l'integratore provochi un aumento del peso dei neonati alla nascita.

2.19

Per testare l'efficacia delle cinture di sicurezza sui bambini nel prevenire danni gravi, si esaminano due campioni di bambini che hanno subito incidenti stradali. Per il primo campione di 123 bambini, che indossavano la cintura di sicurezza, il numero di giorni passati in terapia intensiva ha una media campionaria pari a 0.83 e una deviazione standard campionaria pari a 1.77. Per il secondo campione di 290 bambini, che invece *non* indossavano la cintura di sicurezza, la media campionaria è pari a 1.39 e la deviazione standard campionaria vale 3.06. Questi dati permettono di concludere che i bambini che indossano la cintura di sicurezza passano mediamente un numero minore di giorni in terapia intensiva? Si esegua un test al 5%.

Soluzione. Indicando con μ_x (rispettivamente μ_y) il numero medio di giorni passati in terapia intensiva in seguito a un incidente per un bambino che indossa (rispettivamente *non* indossa) la cintura di sicurezza, testiamo l'ipotesi $H_0 : \mu_x > \mu_y$. Dato che le ampiezze dei campioni $n = 290$ e $m = 123$ sono elevate, si può usare la statistica

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

che ha distribuzione approssimativamente normale. I dati del problema sono $\overline{x} = 0.83$, $s_x = 1.77$, $\overline{y} = 1.39$, $s_y = 3.06$ da cui si ottiene $T = -2.33$. Dato che $z_{0.05} = 1.645$ e la regione critica è $\{T < -z_{0.05}\}$, l'ipotesi H_0 è rifiutata. Questi dati mostrano che i bambini che indossano la cintura di sicurezza passano mediamente un numero minore di giorni in terapia intensiva.