

# TEST DI AUTOVALUTAZIONE TEST CHI-QUADRO

I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

## Metodi statistici per la biologia

### 1 Parte A

#### 1.1

In un test  $\chi^2$  di adattamento viene verificato

- l'adattamento dei dati ad un particolare valore della media;
- l'adattamento dei dati ad un particolare valore della varianza;
- l'adattamento dei dati alla distribuzione  $\chi^2$ ;
- l'adattamento dei dati ad una distribuzione ipotizzata;

#### 1.2

Quale delle seguenti affermazioni è vera per un test  $\chi^2$  di buon adattamento?

- Il numero di gradi di libertà del quantile di riferimento è uguale al numero di elementi del campione meno uno;
- ogni parametro incognito della distribuzione teorica, stimato con gli stessi dati usati per il test, abbassa di un'unità il numero di gradi di libertà del quantile di riferimento;
- si può usare solo per campioni normali;
- può essere usato anche per campioni poco numerosi, purchè con distribuzione normale.

#### 1.3

Una società di statistica riceve la commissione di rilevare l'indice di gradimento del Sindaco di Zurigo tra i suoi concittadini. Il risultato viene pubblicato nella seguente forma: la percentuale dei cittadini favorevoli al Sindaco è  $63 \pm 2.3\%$ . Quale metodo statistico ritenete sia stato usato?

- Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale.
- Intervallo di confidenza per una proporzione.
- Test  $\chi^2$  di buon adattamento
- Test per una proporzione

#### 1.4

Si supponga di voler verificare l'ipotesi di indipendenza sulla base di una tabella di contingenza di dimensione  $6 \times 3$ , la cui frequenza totale è  $n = 250$ . La statistica test ha distribuzione approssimativamente

- Chi-quadrato con 10 gradi di libertà;
- Chi-quadrato con 249 gradi di libertà;
- Chi-quadrato con 17 gradi di libertà;
- nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

## 1.5

Quale dei seguenti test di verifica di ipotesi può essere usato anche per campioni di piccola taglia?

- Test di confronto di medie per popolazioni normali, campioni indipendenti e varianze ignote.
- Test su una proporzione
- Test  $\chi^2$  di buon adattamento
- Test sulla media di una popolazione normale con varianza ignota.

## 1.6

Si ipotizza che una variabile  $x$  sia distribuita come una binomiale  $B(2, 1/2)$ . Si ha a disposizione un campione di 100 dati per tale variabile, e si vuole usare un test  $\chi^2$  di buon adattamento. Qual è il valore della *frequenza attesa*  $e_1$  del valore 1?

- 50.
- 25.
- 1/2.
- 1/4.

## 1.7

Sia  $st$  la statistica test di un test  $\chi^2$  di buon adattamento. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Se  $st \geq 0$ , l'ipotesi di adattamento viene rifiutata ad ogni livello di significatività.
- Se  $st \geq 2$ , l'ipotesi di adattamento viene non rifiutata ad ogni livello di significatività.
- $st \geq 0$  qualunque sia il valore dei dati.
- L'ipotesi di buon adattamento viene rifiutata a livello di significatività  $\alpha$  se  $st > \chi_{n-1, \alpha}^2$ , dove  $n$  è la taglia del campione.

# 2 Parte B

## 2.1

In un sondaggio viene posta una domanda con 4 risposte possibili (chiamiamole  $A, B, C, D$ ). In un campione di 1000 intervistati, 212 scelgono la risposta  $A$ , 256 la  $B$ , 265 la  $C$  e 267 la  $D$ . Questi dati sono compatibili con l'ipotesi che le 4 scelte di risposta siano equidistribuite nella popolazione alla quale il sondaggio è riferito? (Usare un test di livello 0.05)

**Soluzione.** La statistica del test  $\chi^2$  è

$$st = \frac{(212 - 250)^2}{250} + \dots + \frac{(267 - 250)^2}{250} = 7.976 > \chi_{0.05, 3}^2 = 7.81$$

Pertanto l'ipotesi di equidistribuzione viene rifiutata al 5%.

## 2.2

Bambi osserva incuriosito gli alberi della foresta. Durante il proprio cammino Bambi conta 34 querce, 20 tigli, 30 acacie e 16 ontani. Supponendo che nella foresta non ci siano altri tipi di albero, Bambi può concludere che gli alberi della foresta non sono equidistribuiti tra i quattro tipi sopra elencati? (Usare un test di livello 0.05)

**Soluzione.** Il procedimento è identico a quello dell'esercizio precedente. Si ottiene  $st = 8.48$ , e pertanto l'ipotesi di equidistribuzione viene rifiutata al 5%.

## 2.3

Un gioco d'azzardo consiste nel lanciare tre dadi: la vincita è proporzionale al numero di sei ottenuti. Un giocatore lancia i tre dadi 100 volte. Per 48 volte non ottiene alcun sei, 35 volte ne ottiene 1, 15 volte 2 e 2 volte ottiene 3 sei. Questi risultati sono compatibili con l'equità dei dadi utilizzati?

**Soluzione.** Sia  $p_k$  la probabilità di ottenere  $k$  sei nel lancio di tre dadi equi. Chiaramente

$$p_k = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}.$$

Da ciò si calcolano le frequenze attese:  $100p_0 = 58$ ,  $100p_1 = 34.5$ ,  $100p_2 = 7$ ,  $100p_3 = 0.5$ . I valori 2 e 3 vanno riuniti in un'unica classe, la cui frequenza attesa è 7.5. Usando pertanto le tre classi corrispondenti ai valori  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2, 3\}$  si trova

$$st = \frac{(48 - 58)^2}{58} + \frac{(35 - 34.5)^2}{34.5} + \frac{(17 - 7.5)^2}{7.5} = 13.76$$

Essendo, ad esempio,  $\chi_{0.005,2}^2 = 10.597$ , l'ipotesi di equità dei dadi viene rifiutata ad ogni livello maggiore del 0.5%. I dati sono in contraddizione con tale ipotesi.

## 2.4

Si dica se i dati riportati nella seguente tabella sono compatibili con una distribuzione di Poisson di media 1.76:

valore	frequenza
0	10
1	14
2	15
3	5
4	3
5	2
6	0
7	1

**Soluzione.** Dopo aver calcolato le frequenze attese, ne risulta che è opportuno suddividere i valori nelle seguenti classi:  $C_1 = \{0\}$ ,  $C_2 = \{1\}$ ,  $C_3 = \{2\}$ ,  $C_4 = \{3\}$ ,  $C_5 = \{3 \text{ o più}\}$ . Come valore della statistica del test si ottiene

$$st = 1.69$$

che è minore di  $\chi_{\alpha,3}^2$  per qualunque valore ragionevole di  $\alpha$ : i dati sono in accordo con una distribuzione di Poisson.

## 2.5

La riuscita di un intervento chirurgico per l'applicazione di una protesi al ginocchio con la tecnica tradizionale è *molto soddisfacente* nel 56% dei casi, *abbastanza soddisfacente* nel 31% dei casi, e *non soddisfacente* nei casi rimanenti. Varie equipe mediche stanno sperimentando un nuovo tipo di intervento. In 112 operazioni effettuate, gli esiti *molto soddisfacenti* sono stati 71, quelli *abbastanza soddisfacenti* 34, e gli altri *non soddisfacenti*. Vi sono differenze significative tra le percentuali di riuscita di questo intervento rispetto a quello tradizionale (effettuare un test al 5% di significatività)?

**Soluzione.** Assumendo che il nuovo intervento abbia la stessa percentuale di riuscita del vecchio, ricaviamo le frequenze teoriche  $112 * 0.56$ ,  $112 * 0.31$ ,  $112 * 0.13$ , tutte maggiori di 5. La statistica del test  $\chi^2$  di adattamento è

$$st = \frac{(112 * 0.56 - 71)^2}{112 * 0.56} + \frac{(112 * 0.31 - 34)^2}{112 * 0.31} + \frac{(112 * 0.13 - 7)^2}{112 * 0.13} = 5.033 < \chi_{0.05,2}^2 = 5.99.$$

A livello di significatività del 5%, i dati non sono sufficienti a concludere che vi sono differenze significative tra le percentuali di riuscita del nuovo intervento rispetto a quello tradizionale

## 2.6

Un dato farmaco, secondo l'azienda produttrice, può causare due effetti collaterali, entrambi con probabilità  $p = 0.1$ . Inoltre i due effetti si manifestano indipendentemente l'uno dall'altro.

a. Sia  $X = 0, 1, 2$  il numero di effetti collaterali che si manifestano in un individuo scelto a caso a cui è stato somministrato il farmaco. Secondo le indicazioni della casa produttrice, qual è la distribuzione di  $X$ ?

b. Allo scopo di mettere alla prova le affermazioni della casa produttrice, il farmaco viene somministrato ad un campione di 1000 individui. Di questi, 782 non manifestano alcun effetto collaterale, 186 ne manifestano uno e i rimanenti manifestano entrambi gli effetti collaterali. Questi dati sono compatibili con quanto affermato dalla casa produttrice? (Effettuare un test al 5%)

**Soluzione.** a.  $X \sim B(2, 0.1)$ .

b. Le frequenze attese sono:

$$n\pi_0 = 1000(0.9)^2 = 810, \quad n\pi_1 = 1000 \times 2(0.9)(0.1) = 180, \quad n\pi_2 = 10.$$

L'ipotesi nulla che la distribuzione del numero di effetti collaterali sia  $B(2, 0.1)$  si verifica con un test  $\chi^2$  di buon adattamento, la cui statistica test è

$$st = \frac{(782 - 810)^2}{810} + \frac{(186 - 180)^2}{180} + \frac{(32 - 10)^2}{10} = 49.5679$$

Essendo  $T > \chi_{0.05, 2}^2 = 5.9915$ , l'ipotesi nulla viene rifiutata: i dati non sono compatibili con quanto affermato dalla casa produttrice.

## 2.7

Si dica se i dati nella seguente tabelle sono compatibili con una distribuzione di Poisson.

valori	0	1	2	3	4	5	6
frequenze	17	28	29	22	11	8	1

**Soluzione.** Non essendo specificato il valore del parametro  $\lambda$  della Poisson, cominciamo con lo stimarlo con la media campionaria:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 17 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 29 + \dots + 6 \cdot 1}{17 + 28 + 29 + \dots + 1} = 2.09.$$

Possiamo ora calcolare le frequenze attese  $e_k = 116e^{-2.09} \frac{(2.09)^k}{k!}$  per  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , e  $e_6 = 116 - \sum_{k=0}^5 e_k$ ,

e confrontarle con le relative frequenze osservate  $O_k$ :

valori	0	1	2	3	4	5	6 o più
$e_k$	14.35	29.99	31.34	21.83	11.41	4.77	1.66
$O_k$	17	28	29	22	11	8	1

Avendo due frequenze attese minori di 5 (oltre il 25% del totale delle frequenze attese), dobbiamo riunire le ultime due classi, ottenendo la seguente tabella:

valori	0	1	2	3	4	5 o più
$e_k$	14.35	29.99	31.34	21.83	11.41	6.43
$O_k$	17	28	29	22	11	9

da cui calcoliamo la statistica test

$$st = \frac{(17 - 14.35)^2}{14.35} + \frac{(28 - 29.99)^2}{29.99} + \dots + \frac{(9 - 6.43)^2}{6.43} \simeq 1.84.$$

Tale valore va confrontato, per un test a livello  $\alpha$ , con il percentile  $\chi_{6-1-1, \alpha}^2 = \chi_{4, \alpha}^2$ . Si vede che  $st < \chi_{4, \alpha}^2$  per qualunque valore ragionevole di  $\alpha$ : i dati sono in ottimo accordo con la distribuzione di Poisson.

## 2.8

È stato misurato il quoziente IQ in un campione di 200 giovani, ottenendo una media campionaria  $\bar{x} = 101.47$  e una deviazione standard campionaria 14.81. Inoltre i dati hanno dato luogo alla seguente tabella delle frequenze:

Punteggio IQ	Meno di 80	80 – 95	96 – 110	111 – 120	Più di 120
frequenza	20	20	80	40	40

Questi dati sono compatibili con l'ipotesi che la distribuzione dei punteggi IQ sia normale? (Eseguire un test al 5%).

**Soluzione.** Dobbiamo confrontare le frequenze osservate con quelle attese calcolate con la distribuzione  $N(101.47, (14.81)^2)$ . Se  $X$  ha tale distribuzione, e  $Z \sim N(0, 1)$ ,

$$\pi(1) = P(X \leq 80) = P\left(Z \leq \frac{80 - 101.47}{14.81}\right) = P(Z \leq -1.45) = 0.07.$$

$$\begin{aligned}\pi(2) = P(80 \leq X \leq 95) &= P\left(\frac{80 - 101.47}{14.81} \leq Z \leq \frac{95 - 101.47}{14.81}\right) \\ &= P(Z \leq -0.44) - P(Z \leq -1.45) = 0.26.\end{aligned}$$

E così via per le altre classi, ottenendo le seguenti frequenze

Punteggio IQ	Meno di 80	80 – 95	96 – 110	111 – 120	Più di 120
$O_k$	20	20	80	40	40
$e_k$	14.71	51.51	77.32	35.38	21.09

Si calcola poi la statistica test  $st$  che assume il valore  $st = 38.83$ . Avendo stimato media e varianza, questo valore va confrontato con il percentile  $\chi_{5-1-2,0.05}^2 = \chi_{2,0.05}^2 = 5.99$ .  $st$  cade nella regione critica: a livello di significatività del 5% (ma in realtà anche per livelli più bassi) i dati non sono compatibili con la distribuzione normale.

## 2.9

Nell'arco di un triennio, sono stati registrati 1603 incidenti stradali capitati ai 708 guidatori di una società di trasporto pubblico. La seguente tabella riporta come tali incidenti sono distribuiti tra i vari autisti:

n. di autisti	n. di incidenti
117	0
157	1
158	2
115	3
78	4
44	5
21	6
7	7
6	8
3	9
0	10 o più

Questi dati sono compatibili con l'ipotesi che il numero di incidenti per autista abbia distribuzione di Poisson?

**Soluzione.** Il primo passo nel test di buon adattamento consiste nello stimare il parametro della distribuzione di Poisson. Dalla tabella di frequenza si ottiene  $\hat{\lambda} = \bar{x} = 2.27$ . Otteniamo la seguente tabella, in cui le frequenze attese sono calcolate con la formula

$$e^{-2.27} \frac{2.27^k}{k!} 706$$

per  $k \leq 9$ .

n. di incidenti	frequenza	frequenza attesa
0	117	73.21
1	157	165.91
2	158	188
3	115	142.02
4	78	80.47
5	44	36.47
6	21	13.78
7	7	4.46
8	6	1.26
9	3	0.32
10 o più	0	0.09

Poiché vi sono troppe frequenze attese minori di 5, la tabella va ridotta come segue:

n. di incidenti	frequenza	frequenza attesa
0	117	73.21
1	157	165.91
2	158	188
3	115	142.02
4	78	80.47
5	44	36.47
6	21	13.78
7 o più	16	6.13

Da questa si calcola la statistica test:

$$st = \frac{(117 - 73.21)^2}{73.21} + \dots + \frac{(16 - 6.13)^2}{6.13} \simeq 57.9.$$

Poiché  $st > \chi_{0.05,6}^2 = 12.592$ , l'ipotesi  $H_0$  di adattamento alla distribuzione di Poisson viene rifiutata: i dati non sono compatibili con l'ipotesi che il numero di incidenti per autista abbia distribuzione di Poisson.

## 2.10

Un quotidiano locale ha fornito i seguenti dati relativi al numero di furti in appartamento in una cittadina nell'anno 2008, nei diversi giorni della settimana.

Giorni della settimana	Dom.	Lun.	Mar.	Mer.	Gio.	Ven.	Sab.
Numero di furti	74	60	56	48	58	61	75

Nella locale centrale di polizia ci si domanda se questi dati siano sufficienti a ritenere che i furti non si distribuiscano in modo uniforme nei sette giorni della settimana. Voi che ne dite? (Effettuare un test al 5%)

**Soluzione.** Applichiamo un test  $\chi^2$  di buon adattamento all'ipotesi  $H_0$  di adattamento alla distribuzione che assegna probabilità  $1/7$  ad ogni giorno della settimana. Poiché il numero totale di

furti è  $n = 432$ , le frequenze attese in ogni giorno della settimana sono uguali a  $432/7 = 61.7143$ . Otteniamo allora la statistica test

$$st = \frac{(74 - 61.7143)^2}{61.7143} + \frac{(60 - 61.7143)^2}{61.7143} + \frac{(56 - 61.7143)^2}{61.7143} + \dots + \frac{(75 - 61.7143)^2}{61.7143} \simeq 9.162.$$

essendo  $\chi_{6,0.05}^2 = 12.592$ , la statistica test non cade nella regione critica, e quindi  $H_0$  non viene rifiutata. Pertanto, a livello di significatività del 5%, questi dati non sono sufficienti a ritenere che i furti non si distribuiscano in modo uniforme nei sette giorni della settimana.