# Introduzione ai modelli probabilistici

lunedì 14 febbraio 2022 14:42

## 12° lezione

EASYBADGE 354719

Ricorrenza (verso transienza) in $\mathbb{Z}^d$ (con $d \geq 3$)

Con analogia di notazione: posto $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ PA su $\mathbb{Z}^d$ (semplice simmetrica)

$$u_{2n}^{(d)} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_d \geq 0: \\ i_1+\dots+i_d = n}} \binom{2n}{i_1, i_1, i_2, i_2, \dots, i_d, i_d} \frac{1}{(2d)^{2n}}$$

$$= \underbrace{\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}}_{\sim \frac{c}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{d^n} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_d \geq 0 \\ i_1+\dots+i_d = n}} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \cdot \frac{1}{d^n}$$

$$\leq \underbrace{\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}}_{\sim \frac{c}{\sqrt{n}}} \underbrace{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor, \lfloor \frac{n}{d} \rfloor, \dots \lceil \frac{n}{d} \rceil}}_{d \text{ volte}} \cdot \frac{1}{d^n} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{i_1,\dots,i_d \geq 0 \\ i_1+\dots+i_d = n}} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_d} \cdot \frac{1}{d^n}}_{\left(\frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d}\right)^n = 1}$$

$\sim \frac{c}{n^{\frac{d-1}{2}}}$ ($d$ volte)

$$= \frac{c'}{n^{\frac{d}{2}}}$$

Conclusione $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}^{(d)} \leq c' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}$ che è $< \infty$ $\forall\, d \geq 3$.

---

## La rovina del giocatore

Ci sono due giocatori (Ada e Bob) che si sfidano in una serie di scommesse successive. Ogni giocatore può vincere (o perdere) 1 € ad ogni scommessa con prob. 1/2.

(o perdere) 1 € ad ogni scommessa con prob. $1/2$.

Il gioco termina quando uno dei due finisce il capitale.

- Ada ha capitale $x \geq 0$.
- Capitale totale è $N \geq x$ (Bob ha capitale $N-x$).

**Q** Qual è la probabilità che Ada vada in rovina?

$\rightsquigarrow P_A(x) = P_A(x, N, 1/2)$

Sia $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $S_n :=$ capitale di Ada in $n$ scommesse.

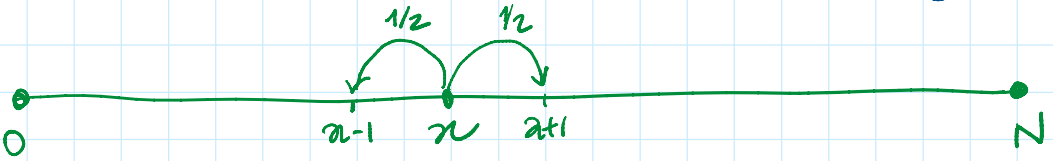
$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k \end{cases}$$

, dove le $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sono iid con

$$\mathbb{P}(X_k = +1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}, \quad X_k = \text{incremento di capitale di Ada nella } k\text{-esima giocata}$$

Nota: $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è ben definita ma descrive il capitale di Ada solo fino al passo (o tempo)

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \in \{0, N\}\}$$




Formalmente: $P_A(x) = \mathbb{P}_x(S_T = 0)$.

Osserviamo che $P_A(x)$ soddisfa le seguenti:

$$\begin{cases} P_A(0) = 1 \\ P_A(N) = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \{1, \dots, N-1\}$

$$\begin{cases} P_A(N) = 0 \\ P_A(x) = \frac{1}{2} P_A(x-1) + \frac{1}{2} P_A(x+1) \end{cases}, \quad \forall\, x \in \{1, \dots, N-1\}$$

$\Updownarrow$

① $\frac{1}{2}\left(P_A(x) - P_A(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(P_A(x+1) - P_A(x)\right)$

$P_A(x-1) - P_A(x-2) = \dots = P_A(1) - P_A(0) = P_A(1) - 1$

② $\forall\, x \in \{1, \dots, N\}$:

$$P_A(x) = \sum_{y=1}^{x} \left[P_A(y) - P_A(y-1)\right] + 1 = x \cdot \left(P_A(1) - 1\right) + 1$$

$P_A(x) - P_A(0)$

$\Downarrow$

③ $0 = P_A(N) = N\left(P_A(1) - 1\right) + 1 \iff \boxed{P_A(1) = \frac{N-1}{N}}$

$$\Rightarrow \quad P_A(x) = \frac{N-x}{N} = 1 - \frac{x}{N}$$

---

## CATENE DI MARKOV

- Sia $V$ uno spazio finito (o numerabile)
- Sia $\pi : V \to [0,1]$, $v \mapsto \pi(v)$, densità di probabilità su $V$
- Sia $P = (P_{j,k})_{j,k \in V}$ una matrice $|V| \times |V|$ t.c.

  i. $P_{j,k} \geq 0 \quad \forall\, j,k \in V$

  ii. $\sum_{k \in V} P_{j,k} = 1, \quad \forall\, j \in V$ (somma sulle righe e pari ad uno)

Def. Una succ. di v.a. $(X_n)_{n \geq 0}$ a valori in $V$

**Def.**: Una succ. di v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valore in $V$ è una catena di Markov (omogenea) con

- densità iniziale $\lambda$
- matrice di transizione $P$

se:

1. $\mathbb{P}(X_0 = k) = \lambda(k)$ , $\forall k \in V$
2. $\mathbb{P}(X_n = k_n \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{n-1} = k_{n-1})$
$= \mathbb{P}(X_n = k_n \mid X_{n-1} = k_{n-1}) = P_{k_{n-1}, k_n}$ , $\forall k_0, k_1, \dots, k_n \in V$

↑ proprietà di Markov

**Osservazione**: La proprietà di omogeneità si riferisce al fatto che

$$P_{j,k} = \mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j) = \mathbb{P}(X_{1+n} = k \mid X_{1+n-1} = j)$$

(cioè non dipende dal tempo).

---

Usando le proprietà 1. e 2. di C.M., si possono ottenere delle relazioni precise sulle v.a. $(X_n)$:

a. $\mathbb{P}(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \lambda(k_0) P_{k_0,k_1} \cdot P_{k_1,k_2} \cdots P_{k_{n-1},k_n}$

$= \mathbb{P}(X_n = k_n \mid X_{n-1} = k_{n-1}, \dots, X_0 = k_0) \cdot \mathbb{P}(X_0 = k_0, \dots, X_{n-1} = k_{n-1})$

$= P_{k_{n-1},k_n}$

b. $\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j\in V} \lambda(j) \cdot P^{(n)}_{j,k}} = \lambda \cdot P^n(k)$

$\sum_{j\in V} \mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = j) = \sum_j P_{j,k} \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = j) =$

($\mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j) = P_{j,k}$)

$\sum \sum \mathbb{P}(X \dots)$

$$= \sum_{i\in V} \underbrace{\sum_{j\in V} P_{ij}\cdot P_{jk}}_{P\times P(i,k) =: p^{(2)}(i,k)} \cdot \mathbb{P}(X_{n-2}=i)$$

$P_{j,k}$

dove $P^{(n)}_{j,k} = P^n(j,k)$ = prob. di andare da $j$ a $k$ in $n$ passi

Più generalmente, $P^n$ = matrice di transizione in $n$ passi, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Infatti $\sum_{k\in V} P^{(n)}_{j,k} = 1$

---

Esempio

1. La PA su $\mathbb{Z}$ è una CM (su $\mathbb{Z}$) con

- $P_{j,k} = \begin{cases} p & \text{se } k=j+1 \\ 1-p & \text{se } k=j-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, $\forall j,k\in\mathbb{Z}$

- $\lambda(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\left(= \delta_0(k)\right.$ notazione abbreviata. delta di Kronecker$\left.\right)$

---

Esempio: $V=\{a,b,c\}$. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM su $V$ con

$$P = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1/2 & 0 & 1/2 \\ b & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ c & 0 & 1 & 0 \end{array} = (P_{j,k})_{j,k\in V}, \quad \lambda(k) = \delta_a(k)$$

Rappresentazione grafica: la CM viene descritta come un grafo con vertici gli elementi di V e spigoli (frecce) tra i e j se $P_{i,j} > 0$. Esempio

$$\mathbb{P}(X_0 = a, X_1 = a, X_2 = c) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = c) = \frac{1}{2} = \sum_{k \in V} \lambda(k) \cdot P_{k,c}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = b) = \sum_{k \in V} \lambda(k) \cdot P^{(3)}_{k,b} = \lambda(a) \cdot P^{(3)}_{a,b}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1\right)$$