Programma del corso di Analisi Stocastica
(Laurea Magistrale in Matematica, a.a. 2019/2020)

Titolare del corso: Alessandra Bianchi

Segue l'elenco dettagliato degli argomenti svolti e delle dimostrazioni che potranno essere richieste nell'esame orale:

1. **Nozioni introduttive**
   Processi stocastici (nozioni di base): definizione, eventi cilindrici, leggi finito-dimensionali e legge del processo (teorema di Caratheodory). Teorema di estensione di Kolmogorov ed esempio di applicazione (schema di Bernoulli). Processi Gaussiani e loro proprietà. Indistinguibilità e modificazione di un processo.

2. **Moto browniano**
   Definizione di moto Browniano. Moto Browniano come processo Gaussiano. Teorema di continuità di Kolmogorov. Legge dei grandi numeri e comportamento asintotico. Principio di invarianza: Convergenza delle leggi finito dimensionali della passeggiata aleatoria. Costruzione di Levy del moto Browniano. Proprietà delle traiettorie: variazione e variazione quadratica del Browniano, q.c. Hoelder continuità , q.c. non derivabilità, legge del logaritmo iterato. Moto Browniano in dimensione d. Misura di Wiener.
   Dimostrazioni:

   - *Moto Browniano come processo Gaussiano.*
   - *Principio di invarianza: Convergenza delle leggi finito dimensionali della passeggiata aleatoria.*
   - *Costruzione di Levy del moto Browniano.*
   - *Convergenza della variavione quadratica in* L^2.
   - *Legge del logaritmo iterato.*

3. **Filtrazioni e Processi di Levy**
   Processi adattati e progressivamente misurabili. Definizione astratta di moto Browniano (rispetto ad una filtrazione). Processi di Levy. Tempi di arresto e proprietà di Markov forte. Principio di riflessione del moto Browniano.
   Dimostrazioni:

   - *Definizione astratta di moto Browniano ed equivalenza con la definizione classica.*
   - *Proprietà di Markov forte per processi di Lévy.*
   - *Principio di riflessione del moto Browniano.*

4. **Martingale**
   Martingale a tempo discreto e continuo: teorema dell'arresto, disuguaglianza massimale, disuguaglianza di Doob. Variazione quadratica di una martingala. Teorema di compensazione per la submartingala X^2 e teorema di caratterizzazione del moto Browniano. Definizione di martingala locale.
   Dimostrazioni:

- *Teorema dell'arresto.*
- *Disuguaglianza massimale.*
- *Disuguaglianza di Doob (per martingale a tempo discreto).*

5. **Integrale stocastico**
Definizione di integrale stocastico per funzioni semplici e per funzioni in $M^2[a,b]$. Proprietà dell'integrale stocastico (media e varianza) e isometria di Ito. L'integrale stocastico in M^2 come martingala continua e proprietà di localizzazione. Integrale stocastico per funzioni in $\Lambda^2[a,b]$. L'integrale stocastico in Λ^2 come martingala locale continua. Integrazione rispetto al moto Browniano d-dimensionale.
Dimostrazioni:

   - *Integrale stocastico in $M^2[a,b]$: proprietà e isometria di Ito.*
   - *Integrale stocastico in $M^2[0,T]$ come martingala continua.*
   - *Integrale stocastico in $S_0[a,b]$ e $\Lambda^2[a,b]$: proprietà.*
   - *Integrale stocastico in in $\Lambda^2[0,T]$ come martingala locale continua.*

6. **Calcolo Stocastico**
Formula di Ito per funzioni del moto Browniano. Processi di Ito. Variazione quadratica e covariazione quadratica per processi di Ito. Formula di Ito generale e caso multidimensionale. Applicazioni: Problema di Dirichlet in $mathbbR^d$ (caratterizzazione della soluzione); transienza e ricorrenza del moto Browniano. Supermartingala esponenziale. Teorema di Girsanov con applicazione. Rappresentazione di martingale come integrali di Ito.
Dimostrazioni:

   - *Formula di Ito per funzioni del moto Browniano.*
   - *Teorema di Girsanov (nell'ipotesi φ uniformemente limitata)*

7. **Equazioni differenziali stocastiche**
Definizione di soluzioni in senso forte e debole; definizione di unicità della soluzione per traiettorie e in legge. Teorema di esistenza e unicità con condizioni di Lipschitz e crescita sublineare. Applicazioni: la formula di Feinmann-Kac. Processi di Markov: definizione e prime proprietà. Diffusioni come processi di Markov. Generatore e semigruppo di un processo di Markov: esempi e prime proprietà.
Dimostrazioni:

   - *Teorema di esistenza e unicità con condizioni di Lipschitz e crescita sublineare.*